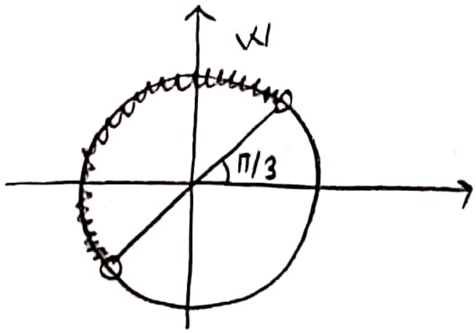
<u>SORU</u> :



Şekildeki W açık kümesi için bir homeomorfizma bulunuz.

$$W = \left\{ (x,y) \in S^1 \,\middle|\, -1 < x < 1/2 \,,\ -\sqrt{3}/2 < y < 1 \right\}$$ açık kümedir.

$$U = \left\{ u \,\middle|\, \pi/3 < u < 7\pi/3 \,,\ u \in \mathbb{R} \right\}$$ kümesi de E^1 de açık kümedir.

$$\Psi : U \subset E^1 \longrightarrow W \subset S^1$$
$$u \longrightarrow \Psi(u) = (\cos u, \sin u)$$

dönüşümü 1-1, örten ve süreklidir.

<u>1-1</u> :

$\forall u_1, u_2 \in U$ için $\Psi(u_1) = \Psi(u_2)$ iken $u_1 = u_2$ midir?

$$\Psi(u_1) = \Psi(u_2) \Rightarrow (\cos u_1, \sin u_1) = (\cos u_2, \sin u_2)$$

$$\Rightarrow \cos u_1 = \cos u_2 \,,\ \sin u_1 = \sin u_2$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \text{ olup } \Psi \text{ 1-1 dir.}$$

Tersi de süreklidir

$\forall (x,y) \in W$ için $\Psi(u)=(x,y)$ o.ş. $\exists u \in U$ vardır.

$(\cos u, \sin u) = (x,y) \Rightarrow x=\cos u\ ,\ y=\sin u$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan u$

$\Rightarrow \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = u$

$\Psi^{-1}(x,y) = u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

ters fonksiyonu da süreklidir.

$\Rightarrow \Psi$ homeomorfizmdir.

SORU: $S_0^2 = \left\{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$ küresinin bir dif bilir manifold

olduğunu gösteriniz.

S_0^2 nin 2 boyutlu bir manifold olduğunu biliyoruz. O yüzden E^2 de

bir homeomorfizma tanımlamalıyız.

$$W_1 = \left\{(x,y,z) \in S_0^2 \mid z>0\right\}$$

$$W_2 = \left\{(x,y,z) \in S_0^2 \mid z<0\right\}$$

$$W_3 = \left\{(x,y,z) \in S_0^2 \mid y>0\right\}$$

$$W_4 = \left\{(x,y,z) \in S_0^2 \mid y<0\right\}$$

$$W_5 = \left\{(x,y,z) \in S_0^2 \mid x>0\right\}$$

$$W_6 = \left\{(x,y,z) \in S_0^2 \mid x<0\right\}$$

kümeleri S_0^2 üzerinde birer açık kümedir.

Ayrıca $S_0^2 = \bigcup_{i=1}^{6} W_i$ yazılabileceğinden $\{W_i\}_{i\in I}$, $I=\{1,2,\dots,6\}$

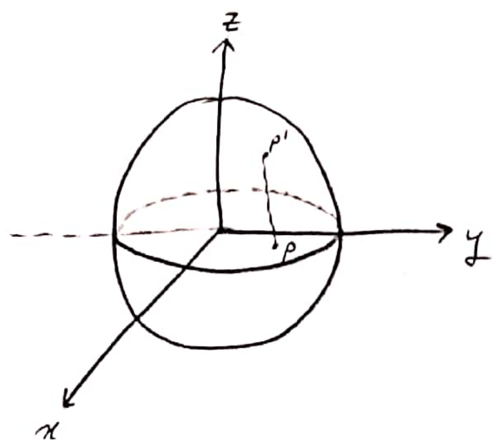
ailesi S_0^2 nin bir açık örtüsüdür.

$U=\{(u,v)\in E^2 \mid u^2+v^2<1\}$ kümesi E^2 de bir açık alt kümedir.

$\Psi_1 : U\subset E^2 \longrightarrow W_1 \subset S_0^2$

$(u,v) \longrightarrow \Psi_1(u,v)=(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$

dönüşümü sürekli, 1-1 ve örtendir.



$\forall (x,y,z)\in W_1$ için $\Psi_1(u,v)=(x,y,z)$ o.ş $(u,v)\in U$ var mıdır?

$\Psi_1(u,v)=(x,y,z) \Rightarrow (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})=(x,y,z)$

$\Rightarrow u=x \ , \ v=y \ , \ z=\sqrt{1-u^2-v^2}$

$\Psi_1^{-1}(x,y,z)=(u,v)$

$\Psi_1^{-1}(x,y,z)=(x,y)$ elde edilir.

Ψ_1^{-1} de sürekli olduğundan (Ψ_1, W_1) ikilisi S_0^2 için bir haritadır.

$\Psi_2 : U\subset E^2 \longrightarrow W_2 \subset S_0^2$

$(u,v) \longrightarrow \Psi_2(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})$ dönüşümü bir homeomorfizm olduğundan (Ψ_2, W_2) ikilisi de bir haritadır.

$\Psi_3 : U \subset E^2 \to W_3 \subset S_0^2$

$(u,v) \to \Psi_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ dönüşümü de bir homeomorfizmdir

ve

$\Psi_3^{-1}(x,y,z) = (u,v)$

$\Psi_3^{-1}(x,y,z) = (x,z)$

$\Rightarrow (\Psi_3, W_3)$ bir haritadır.

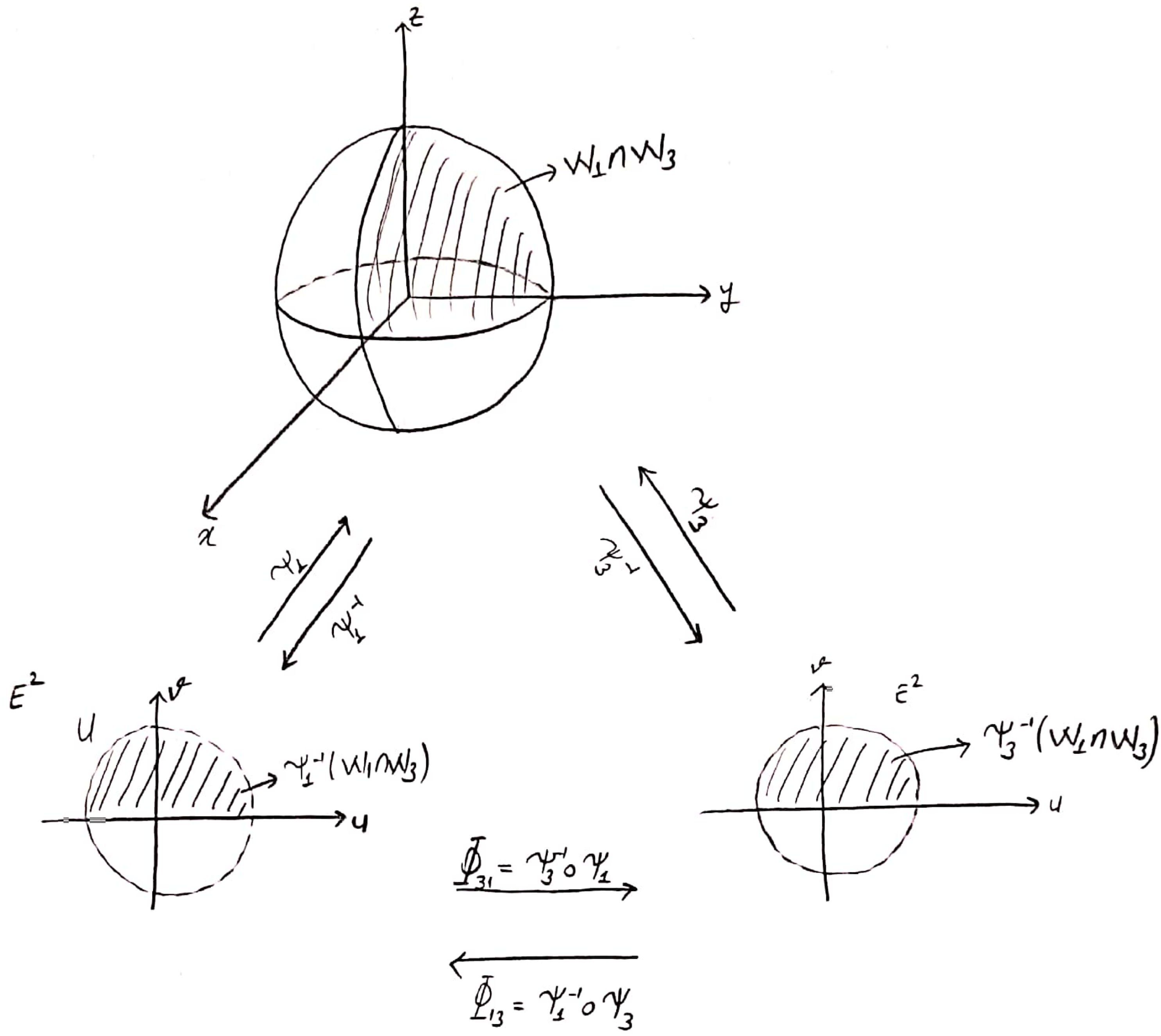
Benzer şekilde diğer haritalar da bulunur.

Böylece $\{(\Psi_i, W_i)\}_{i\in I}$ ailesi S_0^2 için bir atlastır.

$W_1 \cap W_3 = \{(x,y,z) \in S_0^2 \mid y>0, z>0\} \neq \emptyset$

$\Psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3) = \{(u,v) \in U \mid v>0\}$

$\Psi_3^{-1}(W_1 \cap W_3) = \{(u,v) \in U \mid v>0\}$



$$\Phi_{31} : \psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3) \longrightarrow \psi_3^{-1}(W_1 \cap W_3)$$

$\forall (u,v) \in \psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3)$ için

$$\Phi_{31}(u,v) = (\psi_3^{-1} \circ \psi_1)(u,v)$$

$$= \psi_3^{-1}(\psi_1(u,v)) = \psi_3^{-1}\left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları difbilir olduğundan Φ_{31} dönüşümü difbilirdir. ($U=(u,v) \in E^2$, $u^2+v^2<1$ aralığında difbilir)

$\Rightarrow$ Φ_{13} dönüşümü de difbilirdir.

Benzer şekilde diğer dönüşümlerin de difbilir olduğu görülür. Böylece $\{(\Psi_i, W_i)\}_{i\in I}$ atlası bir difbilir yapıdır. Bu nedenle S_0^2 bir difbilir manifoldtur.

<u>SORU</u> : Silindirin iki haritadan oluşan bir atlasını bularak difbilir manifold olduğunu gösteriniz.

M silindir yüzeyi olmak üzere, silindir 2-boyutlu topolojik manifoldtur. O yüzden E^2 nin bir açığına homeomorf bulmalıyız.

$\mathcal{U}_1 = \{(u,v) \in E^2 \mid -\pi < u < \pi, \ v \in \mathbb{R}\}$ açık alt kümesini ele alalım.

$$\Psi_1 : \mathcal{U} \subset E^2 \longrightarrow M \subset E^3$$
$$(u,v) \longrightarrow \Psi_1(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

dönüşümünü tanımlayalım.

- Ψ_1 süreklidir.
- Ψ_1 1-1 dir:

$\forall (u_1,v_1)(u_2,v_2) \in \mathcal{U}_1$ için $\Psi_1(u_1,v_1) = \Psi_1(u_2,v_2)$ iken $(u_1,v_1) = (u_2,v_2)$ midir?

$$(\cos u_1, \sin u_1, v_1) = (\cos u_2, \sin u_2, v_2) \Rightarrow \cos u_1 = \cos u_2, \ \sin u_1 = \sin u_2, \ v_1 = v_2$$
$$\Rightarrow u_1 = u_2, \ v_1 = v_2$$
$$\Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$
$$\Rightarrow \Psi_1, \ 1\text{-}1 \text{ dir.}$$

• $\Psi_1 : U_1 \subset E^2 \to \Psi_1(U_1) \subset M$ örtendir.

$\forall (x,y,z) \in \Psi_1(U_1)$ için $\Psi_1(u,v) = (x,y,z)$ o.s $\exists (u,v) \in U_1$ vardır.

$$\Psi_1(u,v) = (\cos u, \sin u, v) = (x,y,z) \Rightarrow x = \cos u \;,\; y = \sin u \;,\; z = v$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan u \Rightarrow u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \;,\; v = z$$

$$\Rightarrow (u,v) = \left(\arctan \frac{y}{x}, z\right) \in U_1 \text{ örtendir.}$$

• Ψ_1 1-1 ve örtendir, tersi vardır. Süreklidir.

Örtenlikten yararlanarak $\Psi_1^{-1}(x,y,z) = (u,v) = \left(\arctan \frac{y}{x}, z\right)$ bulunur.

Süreklidir.

$\Rightarrow \Psi_1$ homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\Psi_1, U_1)$ ikilisi bir haritadır.

Benzer şekilde

$U_2 = \left\{ (u,v) \in E^2 \;\middle|\; 0 < u < 2\pi ,\; v \in \mathbb{R} \right\}$ açık alt kümesini ele alalım.

$$\Psi_2 : U_2 \subset E^2 \longrightarrow M \subset E^3$$
$$(u,v) \longrightarrow \Psi_2(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

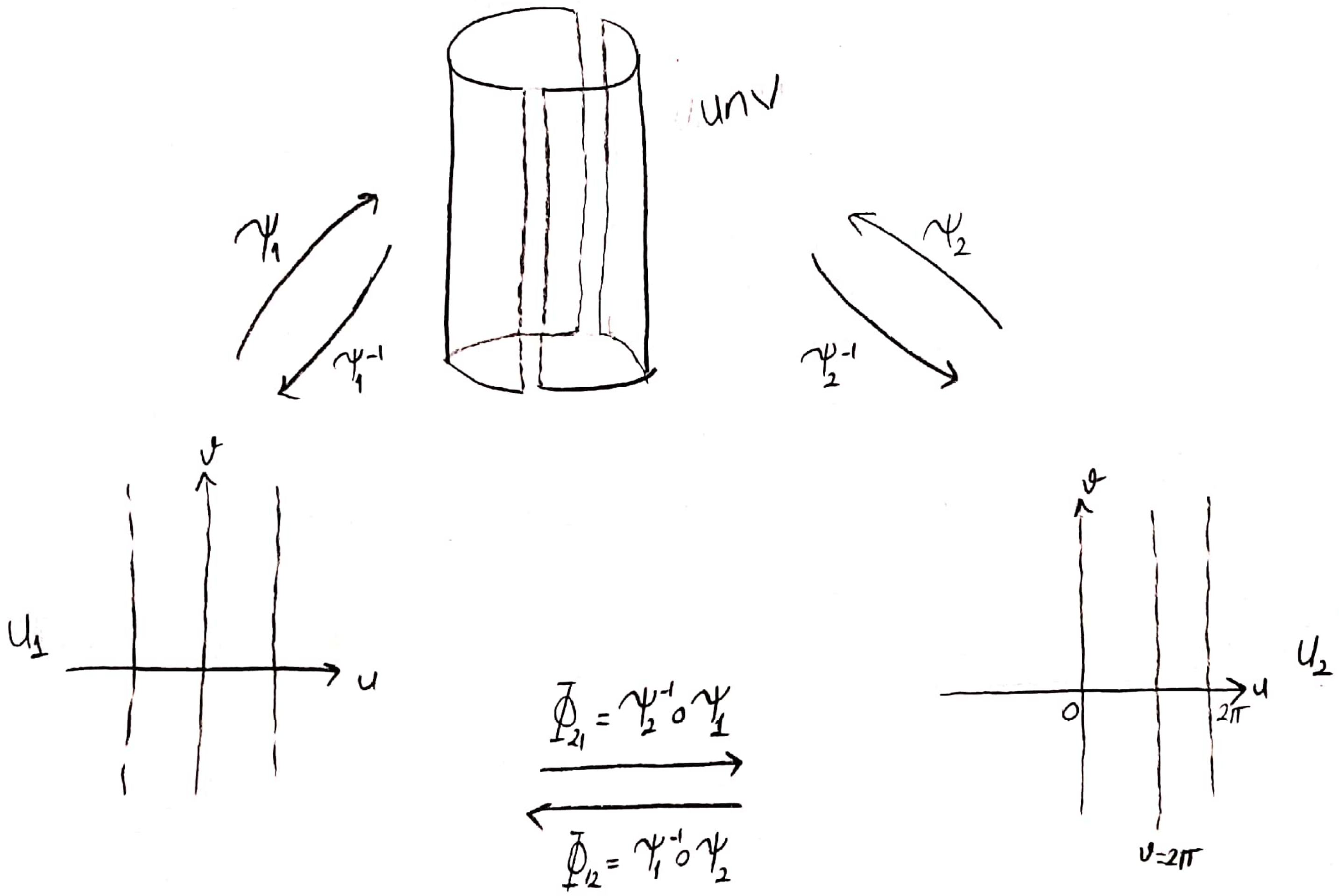
dönüşümünü tanımlayalım.

Benzer şekilde Ψ_2 bir homeomorfizmadır.

$\Rightarrow (\Psi_2, U_2)$ ikilisi bir haritadır.

$\Rightarrow \{(\Psi_i, U_i)\}_{i\in I}$, $I=\{1,2\}$ kümesi, silindir için bir atlastır.

Bulduğumuz bu atlasın dif.bilir bir yapı olduğunu gösterirsek, silindirin dif.bilir manifold olduğunu göstermiş oluruz.



$$\Phi_{21} : \Psi_1^{-1}(U\cap V) \longrightarrow \Psi_2^{-1}(U\cap V)$$

$\forall (u,v) \in \Psi_1^{-1}(U\cap V)$ için $\Phi_{21}(u,v) = (\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1)(u,v) = \Psi_2^{-1}(\Psi_1(u,v))$

$$= \Psi_2^{-1}(\cos u, \sin u, v)$$

$$= (u,v)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları dif. bilir old. dan Φ_{21} dönüşümü difbilirdir.

$$\Phi_{12} : \Psi_2^{-1}(U\cap V) \longrightarrow \Psi_1^{-1}(U\cap V)$$

$\forall (u,v) \in \Psi_2^{-1}(U\cap V)$ için $\Phi_{12}(u,v) = (\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2)(u,v) = \Psi_1^{-1}(\Psi_2(u,v))$

$$= \Psi_1^{-1}(\cos u, \sin u, v)$$

$$= (u,v)$$

Bu fonksiyonun koordinat fonksiyonları difbilir old. dan Φ_{12} dönüşümü difbilirdir. Böylece, $\{(\Psi_i, U_i)\}_{i\in I=\{1,2\}}$ atlası difbilir yapıdır. Bu nedenle silindir difbilir manifoldtur.