Soru 1: $3x + 2y - z = 9$

$y - z = 4$

$2x + y + z = 2$

lineer denklem sisteminin Cramer metodu ile çözümünü bulunuz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi $m=3$ satır ve $n=3$ sütuna sahip bir matristir. A matrisinin determinantını Sarrus kuralı ile bulalım:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+0-4)-(-2-3+0) = -1-(-5) = 4 \neq 0$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

olduğundan lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır.

Burada, $m=n=3$ ve $|A| = 4 \neq 0$ olduğundan bu lineer denklem sistemi Cramer denklem sistemidir.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (9-4-4)-(-2-9+8) = 1-(-3) = 4 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 9 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{4}{4} = 1$$ bulunur.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (12+0-18)-(-8-6+0) = -6-(-14) = 8 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 3 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{matrix}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{8}{4} = 2$$ bulunur.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix} = (6+0+16)-(18+12+0) = 22-30 = -8 \Rightarrow$$

$$z = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{-8}{4} = -2 \text{ bulunur.}$$

<u>Soru 2</u>:

$$-x-y+z=2$$
$$2x+y=k$$
$$2x+2z=14$$

lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre k nın değeri kaçtır?

<u>Hatırlatma (Teorem 11.4)</u>: $AX=B$ lineer denklem sisteminde $|A|=\Delta=0$ olsun.

i) $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ determinantlarından en az biri sıfırdan farklı ise sistemin çözümü yoktur.

ii) $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ ise sistemin sonsuz çözümü vardır.

<u>Çözüm</u>: Lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü olması için Teorem 11.4'den $|A|=0$ ve $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ olmalıdır.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisi için :}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} = (-2+0+0)-(2+0-4) = -2-(-2) = 0 \text{ dır.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 14 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4+0+0)-(14+0-2k) = -10+2k \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{array}$$

$\Delta_1 = 0 \Rightarrow 2k-10=0 \Rightarrow k=5$ bulunur.

<u>Soru 3</u>: $x-2y+z=0$

$kx+y-3z=0$

$-x+3y+2z=0$

homojen lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre, k'nın değeri kaçtır?

<u>Hatırlatma (Teorem 11.5)</u> : $AX=0$ homojen lineer denklem sistemi verilsin.

i) $|A| = \Delta \neq 0$ ise sistemin $X=0$ aşikar çözümü vardır.

ii) $\Delta = 0$ ise $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ olduğundan sistemin sonsuz çözümü vardır.

<u>Çözüm</u> : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ k & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi için Teorem 11.5'den $|A|=0$ ise homojen lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ k & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2+3k-6)-(-1-9-4k) = 6+7k \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ k & 1 & -3 \end{array}$$

$|A| = 0 \Rightarrow 6+7k=0 \Rightarrow k = -\frac{6}{7}$ bulunur.

Soru 4 : $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$x - ay + z = b$$
$$ax - y + z = 0$$
$$x + y - z = 1$$

sisteminin çözümlerini irdeleyiniz.

Hatırlatma : * Tanım 11.2 : $AX = B$ lineer denklem sistemi verilsin. A, $m \times n$ tipinde bir matris ve $\operatorname{rank} A = p$ olsun. $p \leq \min\{m,n\}$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & a_{2n} \\ & & \vdots \\ a_{m1} \quad a_{mp} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinden seçilebilen p mertebeli bir alt matrisinin determinantına sistemin "asli determinantı" denir ve bu determinant

$$\delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$$ ile gösterilir.

* Tanım 11.3 (İlaveli Asli Determinant) : A katsayılar matrisinin δ_p asli determinantında yer alamayan $m-p$ tane satırdan birini satır olarak ve B matrisini de sütun olarak δ_p matrisine eklersek $(p+1) \times (p+1)$ tipinde bir matris elde edilir. Bu matrisin determinantına sistemin "ilaveli asli determinantı" denir.

*** Not 11.2 :** Her bir δ_p asli determinantı için $m-p$ tane ilaveli asli determinant vardır.

*** Not 11.3 :** δ_p asli determinantına ilave edilmeyen $m-p$ tane satırı tekrardan numaralandırırsak δ_p ye r. satırın eklenmesiyle elde edilen ilave asli determinantı δ_{p+r} ile gösterilir.

*** Teorem 11.6 :** $AX=B$ lineer denklem sistemi verilsin. Bu lineer denklem sisteminin çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart sistemin tüm ilaveli asli determinantlarının hepsinin sıfır olmasıdır.

Çözüm : Lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı :

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1+\cancel{a}-\cancel{a}) - (-\cancel{1}+\cancel{1}+a^2) = 1-a^2 \text{ dir.}$$

1) $1-a^2 \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 1 \Rightarrow a \neq \mp 1 \Rightarrow \Delta \neq 0$ olup sistemin Cramer yöntemi ile birlikte bir tek çözümü bulunur.

2) $\Delta = 0$ ise $a=-1$ veya $a=1$ olmalıdır.

- $a=-1$ hali ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ $m=3$ satır, $n=3$ sütuna sahip bir matris ve

$\Delta = 0$ olduğundan; $\text{rank} A < 3$ tür.

Burada, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2 \neq 0$

olduğundan; $\operatorname{rank} A = 2$ dir. Tanım 11.2 'den sistemin asli

determinantı $\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ dir.

Tanım 11.3 'den δ_2 asli determinantında yer almayan $m-p=3-2=1$ tane satırı satır olarak ve B matrisini de sütun olarak δ_2 matrisine eklersek 3×3 tipinde bir matris elde ederiz.

Not 11.2'den δ_2 asli determinantı için $m-p = 3-2 = 1$ tane ilaveli asli determinant vardır.

O zaman, ilaveli asli determinant:

$$\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\downarrow}{=} b(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

1. sütuna göre determinant açılımı yaparsak

$\delta_{2+1} = b(1-1) + 1.(1-(-1)) = 2 \neq 0$ olduğundan; teorem 11.6'dan sistemin çözümü yoktur.

• $a = 1$ hali:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi için $\Delta = 0$ ve $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi

için $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2 \neq 0$ olduğundan; $\operatorname{rank} A = 2$ dir. Tanım 11.2'den sistemin asli determinantı $\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ dir.

Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde ilaveli asli determinant;

$$\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\downarrow}{=} b(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

3. sütuna göre determinant açılımı yaparsak

$$\delta_{2+1} = b.(1-(-1)) + 1.(-1-(-1)) = 2b \text{ dir.}$$

Sistemin çözümü olması için teorem 11.6'dan $\delta_{2+1} = 2b = 0$ olmalıdır. O halde, $b = 0$ ise çözüm vardır. Aksi halde çözüm yoktur.