Soru 1 : $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinant rankını belirleyiniz.

• **Hatırlatma :** A dan seçilen ve determinantı sıfırdan farklı olan en büyük mertebeli alt matrisi Δ_r olmak üzere Δ_r nin mertebesi olan r doğal sayısına A matrisinin "determinant rankı" denir.

• **Çözüm :** A matrisi m=3 satır ve n=3 sütundan oluştuğundan; önce 3x3 boyutlu A matrisinin determinantını belirlemeye çalışalım.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

1. satıra göre determinant açılımı yapalım

$$= 1.(3-0) - 1.(1-4) + 1.(0-6)$$
$$= 3+3-6$$
$$= 0$$

olduğundan A matrisinin rankı 3'den küçüktür.

Bu durumda 2x2 boyutlu kare matrisleri oluşturup bunların determinantlarını elde edebiliriz. Bunlardan herhangi birisinin determinantı sıfırdan farklı ise diğer 2x2 boyutlu kare matrislerin determinantlarını elde etmemize gerek yoktur.

2x2 kare matrislerden örneğin;

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$'in determinantı $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-1 = 2 \neq 0$ olduğundan A matrisinin rankı r=2 dir.

Görüldüğü gibi bu determinant değeri sıfırdan farklı olduğundan diğer 2x2 boyutlu kare matrislerin determinantlarının hesaplanmasına gerek duyulmamıştır.

Soru 2: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını belirleyiniz.

Çözüm: Elemanter satır işlemleri ile A matrisine denk bir B matrisi elde edelim:

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\to\alpha_1\\ \to\alpha_2\\ \to\alpha_3\end{array} \xrightarrow[\alpha_3\to\alpha_3+\alpha_1]{\alpha_2\to\alpha_2-2\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_3\to\alpha_3-\alpha_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_2\to\frac{\alpha_2}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_1\to\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=B$$

A ve B matrisleri denk matrisler olduklarından: rank A = rank B dir.

B matrisi $m=3$ satır ve $n=4$ sütundan oluştuğundan 4x4 boyutlu herhangi bir determinant elde edilemez dolayısıyla rankı $r=4$ olamaz.

B matrisinin üçüncü satırının tüm elemanları sıfır olduğundan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 17/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 17/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

olduğundan A matrisinin rankı $r=3$ olamaz.

Bu durumda 2x2 boyutlu matrislerin determinantlarını göz önüne alalım. Bunlardan herhangi biri sıfırdan farklı ise rank 2 aksi durumda 1 olacaktır. Örneğin,

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$ olduğundan; B matrisinin dolayısıyla A matrisinin rankı $r=2$'dir.

Soru 3: $\mathbb{R}^3$ te $E = \{ \vec{\alpha_1} = (1,0,1), \vec{\alpha_2} = (2,1,1), \vec{\alpha_3} = (4,3,1) \}$ sisteminin lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $\vec{\alpha_1}$, $\vec{\alpha_2}$ ve $\vec{\alpha_3}$ vektörlerini satır kabul eden matris:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, A matrisi $m=3$ satır ve $n=3$ sütuna sahip bir matristir.

• **Hatırlatma:** rank$A = r$ $(r < m)$ ise,

(i) Bu m tane vektörden r tanesi lineer bağımsızdır.

(ii) Geri kalan $m-r$ tane vektörün her biri bu r tane vektörün lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

(iii) $n=m$ ise verilen m vektörün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $|A| \neq 0$ olmasıdır.

(iv) m tane vektör lineer bağımlıdır.

Burada, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1+6+0) - (4+3+0) = 7 - 7 = 0$ olduğundan

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

A matrisinin rankı 3'den küçüktür.

2×2 lik $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ kare matrisi için $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$ olduğundan A matrisinin rankı $r=2$ dir.

$r = 2 < m = 3$ için hatırlatma (iv)'den $m=3$ vektör lineer bağımlıdır. Dolayısıyla, E kümesi lineer bağımlıdır.

Hatırlatma (ii)'den $m-r = 3-2 = 1$ tane vektör $r=2$ tane vektörün lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. Burada,

$(4,3,1) = -2.(1,0,1) + 3.(2,1,1)$ olduğundan;

$\{(1,0,1),(2,1,1)\}$ sistemi (hatırlatma (i)'den $r=2$ tane vektör lineer bağımsızdır) lineer bağımsızdır.

Soru 4: (a) $\mathbb{R}^3$ de $\vec{\alpha}=(1,2,-3)$, $\vec{\beta}=(4,-5,6)$ vektörlerinin vektörel çarpımını bulunuz.

(b) $\vec{\alpha}=(0,4,5)$, $\vec{\beta}=(-1,2,3)$ ve $\vec{\gamma}=(2,0,-2)$ vektörlerinin karma çarpımını bulunuz.

Çözüm: • **Hatırlatma:** $\{\vec{e_1}=(1,0,0), \vec{e_2}=(0,1,0), \vec{e_3}=(0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ve $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ için $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ vektörlerinin vektörel çarpımı:

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$ ile hesaplanabilir.

(a) $$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{e_1}+(\beta_1\alpha_3-\alpha_1\beta_3)\vec{e_2}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{e_3}$$

$$\begin{array}{cccccc} - & \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & + \\ - & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & + \end{array}$$

$= (2.6-(-3).(-5))\vec{e_1}+(4.(-3)-1.6)\vec{e_2}+(1.(-5)-2.4)\vec{e_3}$

$= -3\vec{e_1}-18\vec{e_2}-13\vec{e_3}$ bulunur.

• **Hatırlatma:** $\forall \vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^3$ vektörlerinin karma çarpımı:

$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=\det(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ şeklinde tanımlanır.

(b) $$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(0+0+24)-(20+0+8)=24-28=-4$$ bulunur.

$$\begin{array}{ccccc} - & 0 & 4 & 5 & + \\ - & -1 & 2 & 3 & + \end{array}$$

Soru 5: V, $\emptyset = \{1, t, e^t, te^t\}$ tabanı ile verilmiş vektör uzayı olsun ve $A: V \to V$, $A(f) = f' = \frac{df}{dt}$ ile tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun. Bu lineer dönüşümün determinantını ve izini bulunuz.

• Hatırlatma: * A lineer dönüşümünün determinantı A nın $\emptyset$ bazına göre $A_\emptyset$ matrisinin determinantı ile tanımlanır.

* Bir lineer dönüşümün izi o lineer dönüşüme karşılık gelen matrisin izine eşittir ve ($A: V \to V$ için), V de baz seçiminden bağımsızdır.

Çözüm: Öncelikle A nın $\emptyset$ bazına karşılık gelen matrisi $A_\emptyset$ yi bulalım.

$A(1) = 0 \Rightarrow A(1) = 0.1 + 0\,t + 0.e^t.0.(te^t)$ olduğundan; $[A(1)]_\emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur.

$A(t) = 1 \Rightarrow A(t) = 1.1 + 0.t + 0.e^t + 0.(te^t)$ olduğundan; $[A(t)]_\emptyset = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur.

$A(e^t) = e^t = 0.1 + 0.t + 1.e^t + 0(te^t)$ olduğundan; $[A(e^t)]_\emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur.

$A(te^t) = e^t(1+t) = 0.1 + 0.t + 1.e^t + 1(te^t)$ olduğundan; $[A(te^t)]_\emptyset = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur.

Böylece, $A_\emptyset = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Burada, 1. sütuna göre determinant açılımı yaparsak; $|A_\emptyset| = 0$ bulunur.

O hâlde, bu lineer dönüşümün determinantı sıfırdır.

$\text{iz}\, A_\emptyset = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$ olduğundan; A lineer dönüşümünün izi 2 dir.