Uygulamalar

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{e^n(n^2+5)}$ serilerinin karakterlerini belirleyiniz.

Çözüm 1: $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ $[1,\infty)$'da pozitiftir, süreklidir.

$f'(x) = \frac{-2x^2+1}{e^{x^2}} < 0$ azalandır.

İntegral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dt}{e^t} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_1^{R^2}\frac{dt}{e^t} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} -e^{-t}\Big|_1^{R^2} = -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \frac{1}{e^R} - \frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{2e}.$$

$\begin{pmatrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x\to 1 & t\to 1 \\ x\to R & t\to R^2 \end{matrix}$

$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$ integrali yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ serisi de yakınsaktır.

Çözüm 2: $\forall n$ için $|\sin n| \le 1$ olduğundan $\frac{\sin^2 n}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi $p=2>1$ olduğundan yakınsaktır, mukayese testinden

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ serisi yakınsaktır.

Çözüm 3: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$

Kök testinden, seri ıraksaktır.

Çözüm 4: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 e^{-\overbrace{(n+1)^2}^{n^2+2n+1}}}{n^4 e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-2n-1}$

$= 1 \cdot 0 = 0 < 1$

Oran testinden seri yakınsaktır

Çözüm 5: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ seçelim. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ $r=\frac{1}{e}<1$ geometrik seri olup yakınsaktır

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+1}{e^n(n^2+5)}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1 \neq 0,\infty$$

Limit testine göre iki seri aynı karakterli olup, yakınsaktır.

Ek Soru: $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \dots$ serisinin karakteri?

$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$, $\sum \frac{1}{n}$ harmonik serisi ile limit testi uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}} + \overset{\infty}{\cancel{\ln n}}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\underset{0}{\cancel{\frac{5}{n^2}}}\right)} = \infty$$

Limit testine göre $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan seri ıraksaktır.

Ek Soru: $\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi \cdot \frac{\arctan k^2}{1+k^2}$ mutlak / şartlı yak. olup olmadığını belirleyin.

Mutlak yakınsak mı?

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{\arctan k^2}{1+k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k^2}{1+k^2}$ yakınsak mı?

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $p=2>1$ yak. serisini seçelim.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\arctan k^2}{1+k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k^2}{1+k^2}}_{1} \underbrace{\arctan k^2}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \neq 0,\infty$$

iki seri aynı karakterlidir.

seçilen seri yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k^2}{1+k^2}$ yakınsak

$\Rightarrow$ seri mutlak yakınsak.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sqrt{n}}{n^2+n} (x+2)^n$ serisinin mutlak / şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu x değerlerini araştırın. Yak. aralığını bulun.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}\,(x+2)^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)} \cdot \frac{n^2+n}{2^n\sqrt{n}\,(x+2)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}\,(n^2+n)}{(n^2+3n+2)\sqrt{n}} |x+2| = 2 \cdot |x+2| < 1$$

$\Rightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$ } mutlak yakınsaklık aralığı

Uç noktaları inceleyelim:

$x = -\frac{3}{2}$ için;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n}$ yakınsak mı?

$\frac{\sqrt{n}}{n^2+n} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{3/2}}$

$p = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ yakınsaktır.

Dolayısıyla, mukayese testinden seri yakınsaktır.
(mutlak yakınsak)

Sonuç olarak

$x = -\frac{5}{2}$ için;

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+n}$ alterne serisi mutlak yakınsaktır.

(Pozitif terimli seri ıraksak çıksaydı, alterne seri testinden şartlı yak. olup olmadığını incelerdik)

$x \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$: mutlak yakınsak

şartlı yak. olduğu aralık yok.

$x \in \mathbb{R} - \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$: ıraksak.

7) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x|<1$ ifadesinden yararlanarak, $f(x) = x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yak. aralığını bulun.

$x \longrightarrow -x^2$ dönüşümü ile,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \quad , \quad |-x^2| < 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad , \quad |x| < 1 .$$

$$\xrightarrow{\text{İNTEGRAL}} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad , \quad |x|<1$$

$-1<x<1$ old. dan $x=0$ seçilebilir.

$x=0 \Rightarrow C=0$

Şimdi de, $x \longrightarrow \frac{x}{2}$ dönüşümü ile,

$$x\arctan\frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1}(2k+1)} \quad , \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x|<2$$

8) $f(x) = xe^{-2x}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini yazınız. Elde ettiğiniz seriden yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ toplamını bulunuz.

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\therefore e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$$

$$f(x) = xe^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}$$

$x=1$ yazarsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} = 1 . e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

9) $f(x) = x\ln(1+x^3)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yak. aralığını bulun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

integral alırsak, $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx$

$$\Rightarrow -\ln(1-x)+c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x|<1$$

$x=0 \in (-1,1)$ için $c=0$

$$x \to -x^3 \Rightarrow -\ln(1+x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^3)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+3}}{n+1}, \quad |-x^3| = |x| < 1$$

$-x$ ile çarparsak $\Rightarrow x\ln(1+x^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^{3n+4}}{n+1}, \quad |x|<1$

10) a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = ?$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = ?$

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

integral alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x) + C$$

$x=0 \Rightarrow C=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$x=\frac{1}{2} \in (-1,1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$

$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Türev alırsak, $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad |x|<1$

x ile çarparsak, $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad |x|<1$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$

11) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ fonk.nun kuvvet serisi temsilini bulunuz.

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\int dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + C \quad (x=0 \Rightarrow C=0)$

$(|x|<1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) + C \quad (x=0 \Rightarrow C=0)$

$|-x|<1$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + 1\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$(-1)^n + 1 = \begin{cases} 2, & n \text{ çift} \\ 0, & n \text{ tek} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x|<1$

Genel terim: $a_n = \frac{2x^{2k+1}}{2k+1}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} + \cancel{\frac{1}{3!}} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} - \cancel{\frac{1}{n!}} + \cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n!}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 1+\sin n \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1+\sin n}{n!} \leq \frac{2}{n!}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ yakınsaktır, çünkü $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 \geq (2.2\dots 2.1) = 2^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$: geo seri yakınsak

Mukayese testinden seri yakınsaktır.

Oran testinden; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin(n+1)}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{1+\sin n} = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{0} + \underbrace{\frac{\overset{-1\leq\ \leq 1}{\sin(n+1)}}{n+1}}_{0}\Bigg) \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\sin n}}_{\text{yok?}}$$

limiti mevcut olmadığından test sonuç vermez.

14) Eğer $\{a_n\}$ dizisi yakınsak ve $2a_n + 3a_{2n+1} = \frac{5n+1}{2n+3}$ ise $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ olsun. O halde $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = A$ 'dır.

$$\lim_{n\to\infty} (2a_n + 3a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{2n+3} \Rightarrow 2A + 3A = \frac{5}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

15) Genel terimi $a_n = n - \ln(e^n+1)$ olan dizinin limitini bulunuz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(n - \ln(e^n+1)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\ln e^n - \ln(e^n+1)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{e^n}{e^n+1}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+1}\right) \overset{L'H}{=} \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n}\right) = \ln 1 = 0$$

16) Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin terimleri, ardışık olarak $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) a_n$ ile verilmiştir. Bu serinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2} < 1$$ olduğundan

Oran testine göre seri yakınsaktır.

17) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$ serisinin yak. aralığını ve temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$$ geometrik seri

$\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$ ise yakınsaktır. Yani yak. aralığı: $|x+1| < 2 \Rightarrow -3 < x < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+1}{2}} = \frac{1}{1-x} \qquad x \in (-3, 1)$$