

MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ VE SİMÜLASYONU

1

Mustafa Kemal SEVİNDİR, Ph.D

sevindir@yildiz.edu.tr

Adi, Doğrusal Diferansiyel Denklemlerin Klasik Çözümleri

İntegrasyon Faktörü Yöntemi

İntegrasyon faktörü yöntemi, herhangi bir birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denkleme bir çözüm sağlar.

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = r(x)$$

denklemini ele alalım. Bu denklem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad P(x) = a_0(x)/a_1(x) \quad Q(x) = r(x)/a_1(x)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\text{Çözüm } y = e^{-\int P(x)dx} \left[Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \text{ olur.}$$

İntegrasyon sabiti C, başlangıç koşulu kullanılarak elde edilir.

Örnek

$$mC_p \frac{dT}{dt} + hAT = \dot{q}_{in} \quad T(0) = T_i \quad \dot{q}_{in} = \gamma e^{-\beta t}$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hA}{mC_p} T = \frac{\gamma}{mC_p} e^{-\beta t} \quad \frac{dT}{dt} + aT = be^{-\beta t}$$

$$a = \frac{hA}{mC_p} \quad b = \frac{\gamma}{mC_p} \quad P(t) = a \quad Q(t) = be^{-\beta t}$$

Böylelikle,

$$e^{-\int P(t)dt} = e^{-\int a dt} = e^{-at} \quad e^{\int P(t)dt} = e^{\int a dt} = e^{at}$$

5

$$T = e^{-at} \left[\int b e^{-\beta t} e^{at} dt + C \right] = e^{-at} \left[\int b e^{(a-\beta)t} dt + C \right]$$

$$T = e^{-at} \left[\frac{b}{a-\beta} e^{(a-\beta)t} + C \right]$$

Başlangıç koşulu uygulanırsa,

$$C = T_i - \frac{b}{a-\beta}$$

$$T = e^{-at} \left[T_i + \frac{b}{a-\beta} (e^{(a-\beta)t} - 1) \right]$$

elde edilir.

Adi, Doğrusal Diferansiyel Denklemlerin Klasik Çözümleri

Karakteristik Denklem

Karakteristik denklem yöntemi, sabit (zamanla değişmeyen) katsayılı, homojen n'inci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bir tekniktir.

Bu yöntem, sabit katsayılı doğrusal homojen diferansiyel denklemlere çözüm sağlar.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

denklemini ele alırsak,

a_n , a_{n-1} , a_1 , ve a_0 *sabit katsayılarıdır.*

Bu tekniğin *temel adımı*, $y = e^{rt}$ şeklinde bir çözümü varsaymaktır. Bu varsayım kullanılarak,

$$\frac{d^n y}{dt^n} = r^n e^{rt} ; \dots ; \frac{d^2 y}{dt^2} = r^2 e^{rt} ; \frac{dy}{dt} = r e^{rt} \quad \text{yazılabilir.}$$

Denklemden yerine konular,

$$a_n r^n e^{rt} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rt} + \dots + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0$$

ve her iki taraf e^{rt} 'ye bölünürse,

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

elde edilir.

Bu denklem **karakteristik denklem** olarak adlandırılır; $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1$ köklerini verir. Birden fazla kök olduğundan, ilk varsayımı $y = \sum_{i=1}^n C_i e^{r_i t}$

şeklinde yeniden yazıyoruz

yada,

$$y = C_n e^{r_n t} + C_{n-1} e^{r_{n-1} t} + \dots + C_1 e^{r_1 t} + a_0 e^{r_1 t}$$

$C_n, C_{n-1}, \dots$ ve C_1 sabitleri başlangıç koşulları kullanılarak değerlendirilir.

Bu yöntem oldukça basittir; en zor adım, karakteristik denklemin köklerini elde etmektir.

Sistem Tepkisinin Nitel Karakteristiğı

Karakteristik denklem yöntemi özellikle güçlüdür, çünkü denklemin kökleri tamamen sistemin niteliksel tepkisini (davranışını) tanımlar. Sistem tepkisi ile ilgili önemli bilgilerin çoğı bu köklerden elde edilebilir.

Tepki ile ilgili sorular şunlardır:

- Tepki kararlı mı? Yani, sınırlı bir giriş tarafından zorlandığında tepki sınırlı kalacak mı?
- Tepki monotonik (tekdüze) mi yoksa salınımlı mıdır?
- Monotonik ve kararlıysa, geçişlerin ortadan kalkması ne kadar sürer?
- Salınımlı ise, salınımın periyodu nedir ve salınımların ortadan kalkması ne kadar sürer?

Sınırlı bir giriş tarafından zorlandığında sınırlı kalabiliyorsa tepki kararlıdır. Sınırlı bir tepkiyle zorlandığında, durmadan yukarı veya aşağı hareket ediyor ve nihai bir değere ulaşıyorsa kararsız bir tepkidir. Kararlı bir tepki nihai değere ulaşır. Sınırlı giriş, nihai değere ulaşır olmalıdır.

İkinci mertebeden bir diferansiyel denklem düşünün; tüm bulguları herhangi bir n'inci mertebeden diferansiyel denkleme uygularsak,

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

aşağıdaki karakteristik denklem elde edilir

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

ve ikinci dereceden denklemden kökleri elde ederiz.

$$r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Karekök içerisindeki terimin değerine bağlı olarak üç olası durum vardır:

1. $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$

iki gerçekte kök r_1 ve r_2

2. $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$

tekrar eden tek bir gerçekte kök

3. $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$

$\alpha \pm i\beta$ şeklinde iki karmaşık kök

- Durum 1 için (iki gerçekte kök), $y = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$
- Durum 2 için (tekrar eden tek bir kök), her iki kök de $r = -(a_1/2a_2)$ 'dir. Çözümün ilk terimi $y_1 = C_1e^{rt}$ 'dir.

Çözümün ikinci terimi, bağımsız değişken ile çarpıldığında (katsayı hariç) aynıdır, ($y_2 = C_2 t e^{rt}$), sonra $y = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$ 'dir.

- Durum 3 (iki karmaşık kök) için, kökler $r_1 = \alpha + i\beta$ ve

$$r_2 = \alpha - i\beta \text{ 'dır, burada } \alpha = \frac{a_1}{2a_2} \text{ ve } \beta = \frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2} \text{ 'dır.}$$

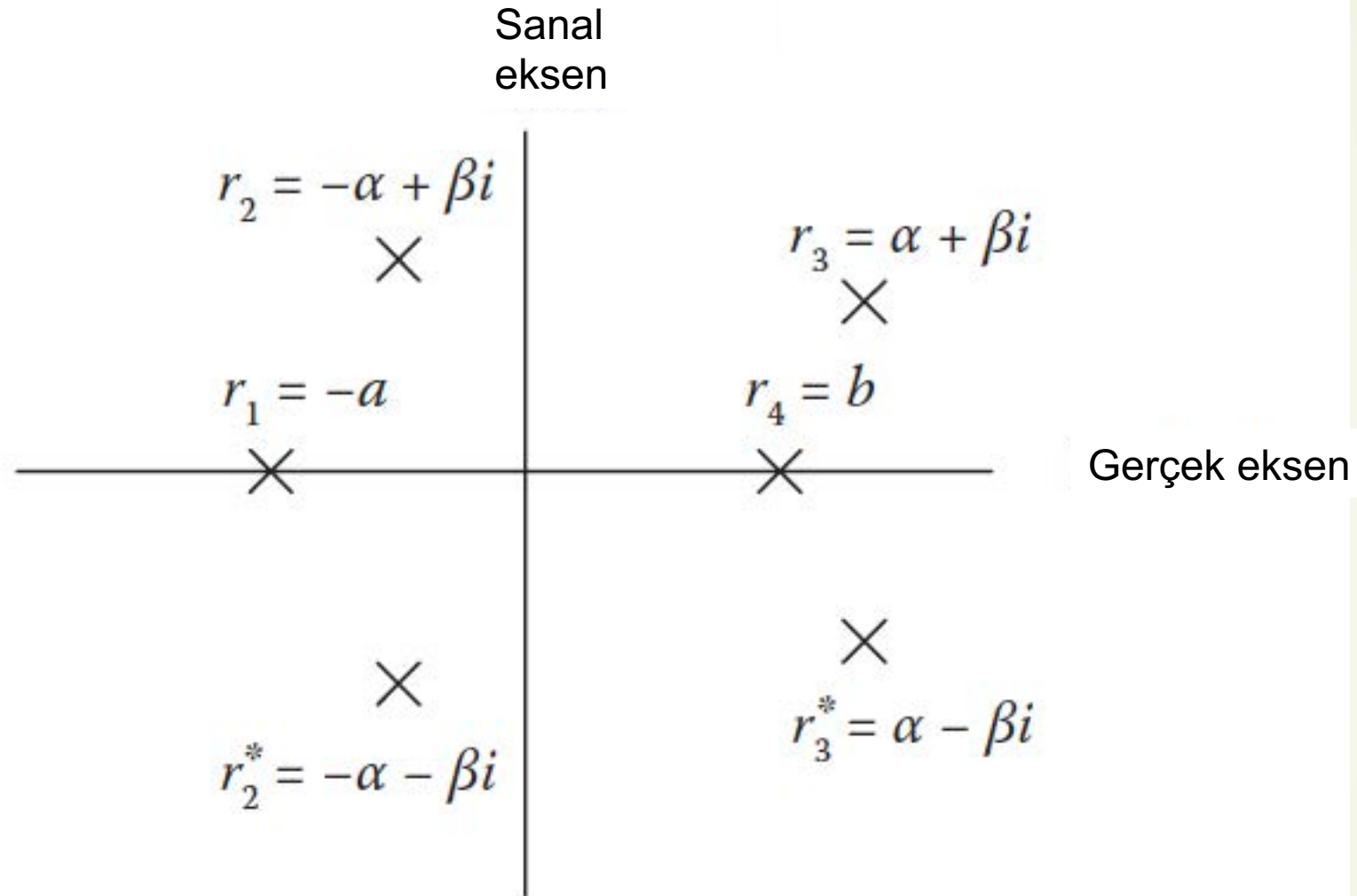
$$y = C_1' e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2' e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$y = e^{\alpha t} [C_1' e^{i\beta t} + C_2' e^{-i\beta t}]$$

Karmaşık üsler nedeniyle bu tepkinin iyi bir nitel göstergesini elde etmek oldukça zordur. Daha iyi bir ifade, karmaşık sayılardan kaçınarak, Euler eşitliği ($e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t$) kullanılarak elde edilebilir.

$$y = e^{\alpha t} [C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t]$$

İlk iki durum, üssel tepki ve üçüncü durum bir salınım tepkisi ile neticelenir. Kökler ya gerçekte ya da karmaşık olabilir; “karakteristik denklemin kökleri” ni gösteren şekli ele alalım.



Karakteristik denklemin kökleri

1 ve 4 numaralı yerler, köklerin gerçekte olduğunda 1 ve 2 durumlarına karşılık gelir ve 2 ve 3 numaralı yerler, köklerin karmaşık olduğu (yıldız işareti eşleniği gösterir) durum 3'e karşılık gelir.

Kökler	Çözüm şekli
r_1	$y = C_1 e^{-at}$
r_2, r_2^*	$y = e^{-\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t]$
r_3, r_3^*	$y = e^{\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t]$
r_4	$y = C_1 e^{bt}$

Bağımsız değişken t arttıkça, 1 ve 2 no'lu yerlerdeki köklerin çözümleri, negatif üssü sayesinde, tepkinin, 2 no'lu yerdeki üst üste binen salınımlarla birlikte üssel olarak azaldığını göstermektedir. Bununla birlikte, 3 ve 4 no'lu yerlerdeki köklerin çözümleri pozitif üssü sayesinde tepkilerin sınırsız arttığını göstermektedir. Böylece, 1 ve 2 numaralı yerlerdeki kökler kararlı tepkiler ve 3 ve 4 numaralı yerlerdeki kökler kararsız tepkiler sağlar. Fark, kökün gerçek kısmının bulunduğu yerdedir.

Negatif gerçek kısımlara sahip kökler için tepki kararlıdır; pozitif gerçek kısımlara sahip kökler için tepki kararsızdır. Dahası, gerçek kökler için cevap *monotonik* ve karmaşık kökler için tepki *salınımlı*dır. Çok sık olmamakla birlikte, kökler gerçek olup ve bu nedenle tepki üstel fonksiyon olarak verilmiş olsa da, tepki biraz salınımlıdır, monotonik değildir. Bu nadir örnek sadece çoklu kökler olduğunda gerçekleşebilir. Homojen diferansiyel denklemler için zorlayıcı fonksiyonu olmadığından, *sistemin niteliksel davranışı zorlayıcı fonksiyonun $[f(t)]$ türüne bağlı değildir, sadece sistemin kendisinin özelliklerine bağlıdır.*

Bu son ifadeleri aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

$$\text{Kök } \alpha \pm i\beta$$



Tepkinin kararlı ya da kararsız olması sadece α 'nın işaretine bağlıdır.
Negatif ise, tepki kararlıdır;
Pozitif ise, tepki kararsızdır.

Tepkinin monotonik ya da salınımlı olması sadece β 'nin sayısal değerine bağlıdır.
 $\beta=0$ ise, kökler gerçekte ve tepki monotoniktir;
 $\beta \neq 0$ ise, kökler karmaşık, ya da sanal, ve tepki salınımlıdır.

Adi, Doğrusal Diferansiyel Denklemlerin Klasik Çözümleri

Belirsiz Katsayılar

Belirsiz katsayı yöntemi, sabit katsayılı homojen olmayan n 'inci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bir tekniktir.

Karakteristik denklem yöntemi sadece homojen diferansiyel denklemler için geçerlidir.

Homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünü (y) elde etmek için çözümün iki parçaya bölünmesi gerekir. Tamamlayıcı çözüm (y_C) ve özel çözüm (y_P).

$$y = y_C + y_P$$

Özel çözümün biçimi sadece zorlayıcı fonksiyonun biçimine bağlıdır ve bu yüzden bazen *zorlanmış tepki* olarak da adlandırılır.

Özel çözüm sadece zorlayıcı fonksiyona bağlı olduğundan, sistemin kendisi ile ilgili yapılacak herhangi bir şey yoktur. Tamamlayıcı çözüm, başlangıç koşulları dahil olmak üzere, sistemle ilgili olan çözümdür.

$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$ denklemini ele alalım.

$$a_2 \frac{d^2 (y_C + y_P)}{dt^2} + a_1 \frac{d(y_C + y_P)}{dt} + a_0 (y_C + y_P) = f(t)$$

$$a_2 \frac{d^2 y_C}{dt^2} + a_1 \frac{dy_C}{dt} + a_0 y_C + a_2 \frac{d^2 y_P}{dt^2} + a_1 \frac{dy_P}{dt} + a_0 y_P = f(t)$$

y_P zorlayıcı fonksiyona bağlı çözümdür.

$$a_2 \frac{d^2 y_P}{dt^2} + a_1 \frac{dy_P}{dt} + a_0 y_P = f(t)$$

$$a_2 \frac{d^2 y_C}{dt^2} + a_1 \frac{dy_C}{dt} + a_0 y_C = 0$$

Tamamlayıcı kısmın çözümü, sadece homojen kısmın çözümüne karşılık geldiğinden, bundan sonra y_H olarak adlandıracacağız.

Genel çözüm, “ilgili homojen denklemin çözümü” ile “homojen olmayan denklemin özel bir çözümü” nün toplamıdır.

$$y = y_H + y_P$$

Özel çözümün biçimi sadece zorlayıcı fonksiyonun biçimine bağlıdır.

Homojen diferansiyel denklemlerin çözümü, sistemi etkileyen zorlayıcı fonksiyonun tipinden bağımsızdır. Bu nedenle, sadece sistemin kendisine bağlıdır ve bazen buna ***doğal tepki*** denir.

$$y = y_H + y_P$$

Toplam çözüm

Sadece sistemin kendisine bağlı (doğal tepki)

Sadece zorlayıcı fonksiyonun biçimine bağlı (zorlanmış tepki)

Karakteristik denklem yöntemini kullanarak homojen çözümü elde ettik. Özel bir çözümü elde etmek için belirsiz katsayılar yöntemini kullanırız; bu yöntem aşağıdakilerden oluşur:

- Zorlayıcı fonksiyon temelinde özel bir çözüm seçin (“deneme çözümü” olarak da adlandırılır).

Zorlayıcı Fonksiyonun biçimi $f(t)$	Özel Çözüm biçimi
$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$	$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0$
$(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0) e^{qt}$	$(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) e^{qt}$
$(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0) \cos pt$ $+ (b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0) \sin pt$	$(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0) \cos pt$ $+ (B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_1 t + B_0) \sin pt$
$a e^{qt} \cos pt + b e^{qt} \sin pt$	$A e^{qt} \cos pt + B e^{qt} \sin pt$

- Zorlayıcı fonksiyon bir sinüs veya kosinüs içeriyorsa, özel çözüm hem sinüs hem de kosinüs içermelidir.
- Özel çözümün herhangi bir kısmı homojen denklemin bir çözümü ise, bu özel çözümü bağımsız değişkenle çarpın. Gerekirse tekrarlayın, yani bağımsız değişkenle çarpıldıktan sonra sonuç yine de homojen denklemin bir çözümü oluyorsa, bağımsız değişkenle tekrar çarpılır.

Örnek

Aşağıdaki denklemin çözümünü elde edin,

$$y'' + y' - 12y = 12t - 72t^2 \quad y'(0) = 0 \quad y(0) = 3$$

$$y = y_H + y_P$$

$$y_H'' + y_H' - 12y_H = 0$$

$y_H = e^{rt}$ olduğunu varsayalım.

$$r^2 + r - 12 = 0$$

$$(r + 4)(r - 3) = 0 \Rightarrow r_1 = 3; r_2 = -4$$

Bir kök, r_1 , pozitif gerçekteksende ve diğer kök, r_2 , negatif gerçekteksendedir ve bu da kararsız bir tepkiye işaret eder. Her iki kökte gerçektir (sanal kısımlar yok), tepkinin monotonik olduğunu gösterir.

$$y_H = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-4t}$$

Zorlayıcı fonksiyon $12t - 72t^2$ bir polinomdur, bu yüzden özel bir çözüm

$$y_P = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$
$$y_P' = 2A_2 t + A_1 \quad y_P'' = 2A_2$$

$$2A_2 + 2A_2t + A_1 - 12(A_2t^2 + A_1t + A_0) = 12t - 72t^2$$
$$(2A_2 + A_1 - 12A_0) + (2A_2 - 12A_1)t - 12A_2t^2 = 12t - 72t^2$$

Bu son denklem, eşitliğin her iki tarafında iki polinom göstermektedir.

Bu polinomların eş terimlerin katsayılarını denkleştirerek, A_2 , A_1 ve A_0 'ı elde ederiz.

$$12A_2 = 72 \Rightarrow A_2 = 6$$

$$2A_2 - 12A_1 = 12$$

$$2(6) - 12A_1 = 12 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$2A_2 + A_1 - 12A_0 = 0$$

$$2(6) + 0 - 12A_0 = 0 \Rightarrow A_0 = 1$$

Böylece,

$$y_p = 1 + 6t^2$$

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-4t} + 6t^2 + 1$$

Başlangıç koşulları uygulanarak, $C_1 = 8/7$ ve $C_2 = 6/7$ elde edilir.

$$y = \underbrace{\frac{8}{7}e^{3t} + \frac{6}{7}e^{-4t}}_{\text{Sistemin kendisinden}} + \underbrace{6t^2 + 1}_{\text{Zorlayıcı fonksiyondan}}$$

Sistemin kendisinden

Zorlayıcı fonksiyondan

Örnek

Aşağıdaki denklemin çözümünü elde edin,

$$y'' + y' - 12y = e^{2t} \quad y'(0) = 0 \quad y(0) = 3$$

Denklemin homojen kısmı, önceki örnekte olduğu gibidir. Bu sefer zorlayıcı fonksiyon bir üstel fonksiyon, bu yüzden

$$y_P = A_0 e^{2t} \quad \text{özel bir çözüm olabilir.}$$

$$y'_P = 2A_0 e^{2t} \quad y''_P = 4A_0 e^{2t}$$

$$4A_0e^{2t} + 2A_0e^{2t} - 12A_0e^{2t} = e^{2t}$$

$$4A_0 + 2A_0 - 12A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{6}$$

$$y_P = -\frac{1}{6}e^{2t}$$

$$y = \underbrace{1,857e^{3t} + 1,309e^{-4t}}_{\text{Sistemin kendisinden ve başlangıç koşulundan}} - \underbrace{0,167e^{2t}}_{\text{Zorlayıcı fonksiyondan}}$$

Sistemin kendisinden
ve başlangıç koşulundan

Zorlayıcı fonksiyondan

Örnek

Aşağıdaki denklemin çözümünü elde edin,

$$y'' + y' - 12y = e^{3t} \quad y'(0) = 0 \quad y(0) = 3$$

Denklemin homojen kısmı, önceki iki örnek ile aynıdır. Özel çözüm, $y_P = A_0 e^{3t}$, homojen çözümün bir parçası olduğu için çalışmaz. Yani öneri y_P 'yi bağımsız değişken t ile çarpmaktır.

$$y_P = A_0 t e^{3t}$$

$$y_P' = A_0 e^{3t} + 3A_0 t e^{3t}$$

$$y_P'' = 6A_0 e^{3t} + 9A_0 t e^{3t}$$

Diferansiyel denklemde yerine konursa, $A_0 = 1/7$ elde edilir; böylece,

$$y_P = \frac{1}{7} t e^{3t} \text{ olur.}$$

Başlangıç koşullarını kullanarak $C_1 = 1,694$ ve $C_2 = 1,306$ bulunur.

Böylece,

$$y = 1,694 e^{3t} + 1,306 e^{-4t} + 0,143 t e^{3t} \text{ olur.}$$

Örnek

Aşağıdaki diferansiyel denklem, bir sönümsüz kütle-yay sistemini tanımlamaktadır:

$$x'' + 16x = 4 \sin \omega t$$

İlgili homojen denklemin çözümünü bulmaya başlıyoruz,

$$x_H'' + 16x_H = 0$$

$x_H = e^{rt}$ olarak varsayarsak,

$$r^2 + 16 = 0 \Rightarrow r_1 = 4i; r_2 = -4i \quad \text{elde ederiz.}$$

Ve önceki işlemleri kullanarak,

$$x_H = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$$

elde ederiz.

Bu homojen tepkinin veya doğal tepkinin frekansı 4radyan/zaman'dır. Buna *doğal frekans* diyoruz ve bunu ω_n ile gösteriyoruz.

Özel çözüm için, ilk önce şunu düşünelim: $\omega \neq 4$. Bu durumda, özel çözüm

$$x_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$x'_p = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$x''_p = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

olur.

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + 16A \cos \omega t + 16B \sin \omega t = 4 \sin \omega t$$
$$(16A - A\omega^2) \cos \omega t + (16B - B\omega^2) \sin \omega t = 4 \sin \omega t$$

Bu denklemde eş terimlerin katsayıları denkleştirilirse,

$$16A - A\omega^2 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$16B - B\omega^2 = 4 \Rightarrow B = \frac{4}{16 - \omega^2}$$

Sonuçta

$$x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + \frac{4}{16 - \omega^2} \sin \omega t$$

$\omega \rightarrow 4$ ya da $\omega \rightarrow \omega_n$ olduğunda x büyür.

Şimdi $\omega = 4$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, özel çözüm önerisi kendi içinde homojen kısmın bir çözümüdür ve işe yaramayacaktır. O zaman prosedür, öneriyi bağımsız değişken ile çarpmaktır. Özel çözüm o zaman,

$$x_p = t(A \cos 4t + B \sin 4t) \quad \text{olur.}$$

$$x_p' = A \cos 4t + B \sin 4t + t(-4A \sin 4t + 4B \cos 4t)$$

$$x_p'' = -8A \sin 4t + 8B \cos 4t + t(-16A \cos 4t + 16B \sin 4t)$$

$$-8A \sin 4t + 8B \cos 4t + t(-16A \cos 4t + 16B \sin 4t) + 16t(A \cos 4t + B \sin 4t) = 4 \sin 4t$$

$$-8A \sin 4t + 8B \cos 4t = \sin 4t$$

Eş terimlerin katsayıları eşitlenirse; $A = -1/2$ ve $B = 0$ olur.
Bu durumda, genel çözüm

$$x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t - \frac{1}{2}t \cos 4t \text{ dir.}$$

t arttıkça x 'in sınırsız hale geldiğini unutmayın.

Çoklu Zorlayıcı Fonksiyonlar

Bazen birden fazla zorlayıcı fonksiyon sistemi aynı anda etkileyebilir. Örneğin aşağıdaki denklemi düşünün;

$$y'' + y' - 12y = 12t - 72t^2 + e^{2t} \quad y'(0) = 0 \quad y(0) = 3$$

İki zorlayıcı fonksiyonu gösteren bu diferansiyel denklemi açık bir şekilde yazabiliriz.

$$y'' + y' - 12y = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) = 12t - 72t^2$$

$$f_2(t) = e^{2t}$$

$$y = y_H + y_{P1} + y_{P2}$$

y_{P1} , birinci zorlayıcı fonksiyon $f_1(t)$ den ve y_{P2} , ikinci zorlayıcı fonksiyon $f_2(t)$ den dolayı özel bir çözümdür.

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-4t} + 6t^2 + 1 - \frac{1}{6} e^{2t}$$

Başlangıç koşullarından, $C_1=27/21$ ve $C_2=37/42$ 'dir.

$$y = \frac{27}{21} e^{3t} + \frac{37}{42} e^{-4t} + 6t^2 + 1 - \frac{1}{6} e^{2t}$$

Adi, Doğrusal Diferansiyel Denklemlerin Klasik Çözümleri

Birinci ve İkinci Mertebeden Sistemlerin Tepkisi

Modellerin çoğu birinci veya ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır; bu genellikle fiziksel / endüstriyel modeller için geçerlidir.

Birinci Mertebeden Sistemler

Örneğin;

$$mC \frac{dT}{dt} = \dot{q}_{giren} - hA(T - T_A)$$

Bu sistemlerin iki farklı giriş türüne, bir adım fonksiyonuna ve bir sinüs dalgasına tepkileri.

Sabit katsayılı doğrusal birinci mertebeden diferansiyel denklemi düşünün:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b x(t) \quad y(0) = y_0$$

Denklemin üç katsayısı vardır, a_1 , a_0 ve b , fakat, genellikle kaybı olmadan, denklemi üçünden birine bölebiliriz, böylece denklemi sadece iki parametreyle karakterize edebiliriz.

Sıfır olmaması koşuluyla, bağımlı değişkenin katsayısı (a_0) ile bölünmesi genellikle alışılmış bir durumdur. Böyle bir işlem, aşağıdaki denklemi verir; bu, sabit katsayılı doğrusal birinci mertebeden diferansiyel denklemin *standart formudur*.

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

$\tau = a_1/a_0$, genellikle *zaman sabiti* olarak adlandırılır; zaman birimi ile.

$K = b/a_0$, genellikle *sistem kazancı* olarak adlandırılır; bağımlı değişken/zorlayıcı fonksiyon birimi ile.

Kararlı durum işlemiyle başlarsak, bunun anlamı

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$x(0)$ zorlayıcı fonksiyon ile, $y(0) = K x(0)$ dır.

τ zaman boyutuna ve K ise y/x boyutuna sahip olmalıdır.

Herhangi bir doğrusal birinci mertebeden diferansiyel denklem, denklemde $y(t)$ bağımlı değişkeni görüldüğü sürece, standart forma dönüştürülebilir.

Örneğin;

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = K_1 \dot{q}_{giren} + K_2 T_A$$

$$\tau = \frac{MC}{hA} = \frac{(1,75 \text{ kg})(450 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})}{(20 \text{ J/s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0,05 \text{ m}^2)} = 787,5 \text{ s}$$

$$K_1 = \frac{1}{hA} = \frac{1}{(20 \text{ J/s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0,05 \text{ m}^2)} = 1,0 \frac{^\circ\text{C}}{\text{J/s}}$$

$$K_2 = 1,0 \text{ boyutsuz.}$$

$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ denklemi, ters türev, değişkenlerin ayrılması ya da integrasyon faktörü ile çözülebilmesine rağmen, denklemi burada karakteristik denklem ve belirsiz katsayı yöntemleriyle çözmeyi seçeceğiz. Homojen olmayan bir denklem olarak, önce homojen denklemi çözeriz.

$$\tau \frac{dy_H(t)}{dt} + y_H(t) = 0 \qquad \tau r + 1 = 0$$

ve kök $r = -\frac{1}{\tau}$ $y_H(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}}$

Özel çözüm zorlayıcı fonksiyona bağlıdır.

Adım Fonksiyon Girişi

$x(t)$ zorlayıcı fonksiyonunun, $t=0$ anında $x(0)$ başlangıç değerinden $x_F = x(0) + D$ son değerine, yani $x(t) = x(0) + Du(t)$, (D birim büyüklüğünde adım değişikliği) değerine dönüştüğünü varsayalım. Bu durumda,

$$y_P(t) = A_0 \quad \frac{dy_P(t)}{dt} = 0$$

$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ denkleminde yerine konursa

$$\tau(0) + A_0 = Kx_F \quad y_P(t) = A_0 = Kx_F \text{ elde edilir.}$$

Sonuçta,

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} + K x_F$$

Başlangıç koşullarını kullanarak, C'yi elde ederiz.

$$y_0 = C(1) + K x_F \Rightarrow C = y_0 - K x_F$$

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + K x_F (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ dir.}$$

$$\text{Çünkü } x_F = x(0) + D$$

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + K(x(0) + D)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + Kx(0) - Kx(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + KD(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Ve sonuçta, $y(0) = Kx(0)$ olduğundan,

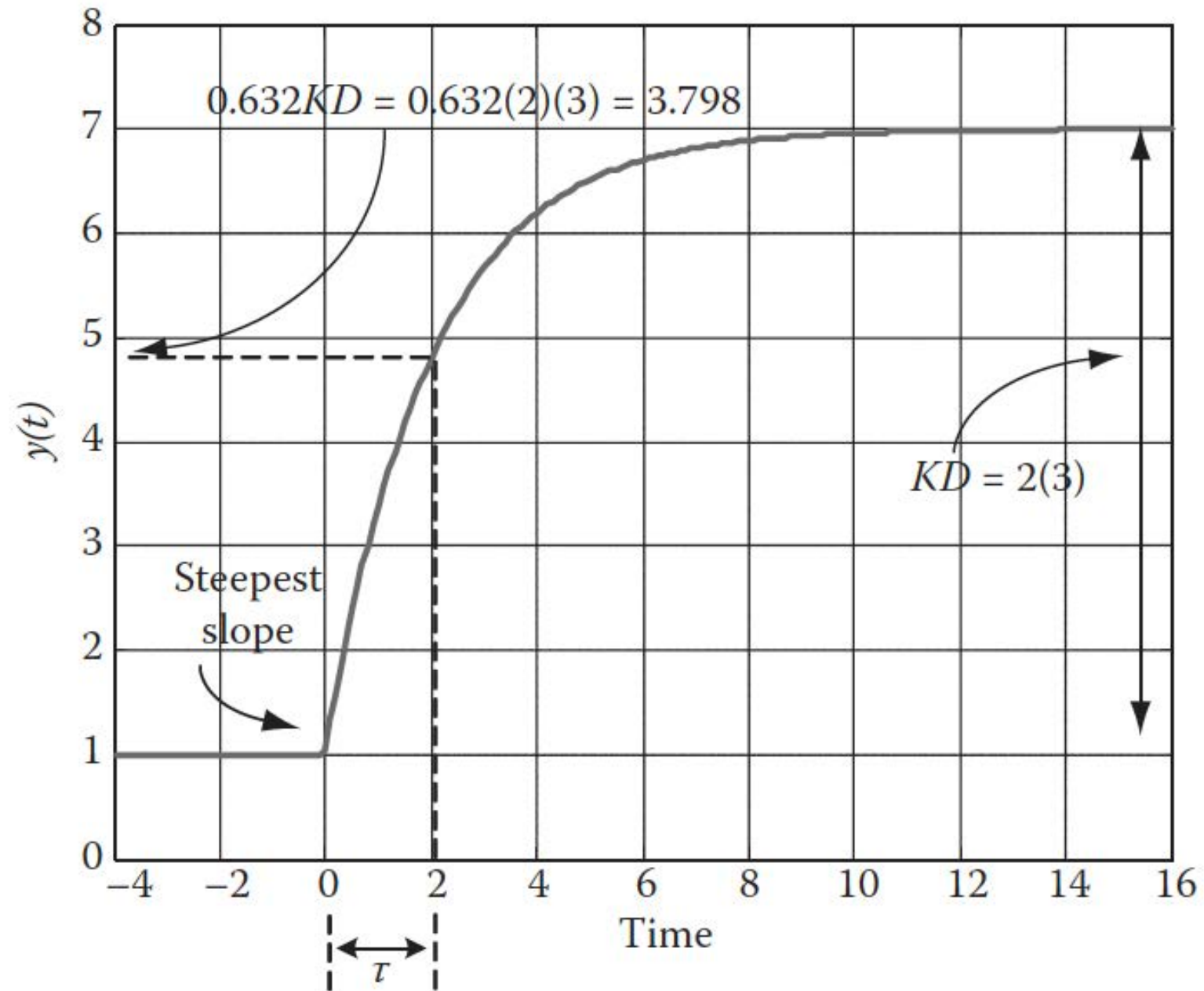
$$y(t) = y(0) + KD(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{olur.}$$

$D = x_F - x(0)$. Adım değişikliği için D 'yi yazmak yerine, birçok ders kitabı adım tepki denklemini

$$y(t) = y(0) + K(x_F - x(0))\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

şeklinde verir.

Açıkçası, negatif gerçekte kök, sistemin tepkisinin kararlı ve monotonik olduğunu gösterir. Yukarıdaki denklem, herhangi bir birinci mertebeden sistemin birim adım tepkisini açıklamaktadır. Bu denklemler birçok mühendislik dersinde kullanılmaktadır.



Birinci mertebeden bir sistemin girişteki bir adım değişikliğine tepkisi.

Tepkinin grafiği çok öğreticidir; yukarıdaki şekil, $K=2$, $D=3$, $\tau=2$ ve $y(0)=1$ olduğunda sistemin tepkisini göstermektedir.

- Tepki eğrisindeki en dik eğim tepkinin başlangıcında gerçekleşir; bu, birinci mertebeden sistemlerin zorlayıcı fonksiyona veya girdi değişkenindeki adım değişikliğine verdiği tipik tepkilerdir.

- Bağımlı değişkendeki toplam değişim, çıkış değişkeni KD (sistem kazancı çarpı girişteki değişim) tarafından verilmektedir; böylece, K kazancının girdideki birim değişim başına çıktıdaki değişimi verdiğini (veya çıktıdaki değişimin çıktıya ne kadar duyarlı olduğunu) söyleriz; açıkçası, K 'nın birimleri de bu anlamı göstermektedir.

- Toplam değişimin %63,2'si bir zaman sabitinde gerçekleşir. Açıkçası, tepki denklemi bu sayıyı vermektedir. $t = \tau$ olduğunda

$$y(t = \tau) = y_0 + KD \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} \right) = y_0 + KD(1 - e^{-1})$$

$$y(t = \tau) = y_0 + KD(1 - 0,368) = y_0 + 0,0632 \cdot KD$$

olur.

Aslında bu, zaman sabiti τ 'nın önemini elde etmemize yardımcı olur. Zaman sabiti ne kadar küçük olursa, sistemin toplam değişikliğinin %63,2'sine ulaşması için gereken süre o kadar az olur; böylece, sisteme daha hızlı tepki verir. Bu nedenle, zaman sabiti, zaman değişmeye başladığında sistemin hızı ile ilgilidir. Aşağıdaki tablo, çıktıdaki değişim ile t/τ 'yu karşılaştırmaktadır. Tepkinin, adım uygulandıktan hemen sonra maksimum hızda başladığını ve sonra değişiklik miktarının azaldığını, böylece KD'nin son değişikliğinin asimptotik olarak yaklaştığını unutmayın.

t/τ	Çıktıdaki Değişim
0	0
1.0	0.632
2.0	0.865
3.0	0.950
4.0	0.982
5.0	0.993
$\cong \cong \cong$	$\cong \cong \cong$
∞	1.000

Birinci mertebeden adım tepkisi.

Bir zaman sabitinden sonra, tepki nihai değişiminin %63,2'sine ve beş zaman sabitinde, değişimin %99'undan fazlasına ulaşır. Başka bir deyişle, tepki beş zaman sabitinden sonra esas olarak tamamlanır; yeni kararlı duruma ulaşmak için gereken süreyi 5τ olarak kullanmak çoğu mühendislik alanında yaygın olarak kabul görmektedir.

Tüm birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin girdideki adım değişikliğine nitel cevabı aynıdır. Nicel kısım farklıdır.

Sinüzoidal Fonksiyon Girdisi

$x(t) = B \sin \omega t$ olduğunu varsayalım, bu durumda

$$y_P(t) = A_1 \cos \omega t + A_0 \sin \omega t$$

$$y'_P(t) = -A_1 \omega \sin \omega t + A_0 \omega \cos \omega t$$

$y_P(t)$ ve $y'_P(t)$, $\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ denkleminde yerine konursa,

$$\begin{aligned} \tau(-A_1 \omega \sin \omega t + A_0 \omega \cos \omega t) + A_1 \cos \omega t + A_0 \sin \omega t &= KB \sin \omega t \\ (-\tau A_1 \omega + A_0) \sin \omega t + (\tau A_0 \omega + A_1) \cos \omega t &= KB \sin \omega t \end{aligned}$$

Eş terimleri eşitlersek,

$$-\tau A_1 \omega + A_0 = KB$$

$$\tau A_0 \omega + A_1 = 0$$

Bu son iki denklemden,

$$A_0 = \frac{KB}{1+(\tau\omega)^2}$$

$$A_1 = \frac{-KB\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}$$

$$y_P(t) = \frac{-KB\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} \cos \omega t + \frac{KB}{1+(\tau\omega)^2} \sin \omega t$$

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{KB\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} \cos \omega t + \frac{KB}{1+(\tau\omega)^2} \sin \omega t$$

Başlangıç koşullarını kullanarak, C'yi elde ederiz.

$$C = y_0 + \frac{KB\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}$$

Dolayısıyla,

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{KB\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{KB\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} \cos \omega t + \frac{KB}{1+(\tau\omega)^2} \sin \omega t$$

Birçok mühendislik alanında, sistem dinamiği çalışması birincil öneme sahiptir ve yukarıdaki denklem sıklıkla kullanılır. Genellikle, bu denklem aynı zamanda

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{KB\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{KB}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \sin(\omega t + \theta)$$

ifade edilir. $\theta = -\tan^{-1}(\tau\omega)$. Yukarıdaki denklem aşağıdaki trigonometrik eşitlik kullanılarak açındırılabilir,

$$E \cos \omega t + F \sin \omega t = D \sin(\omega t + \theta)$$
$$D = \sqrt{E^2 + F^2} \quad \theta = \tan^{-1}(E/F)$$

İkinci Mertebeden Sistemler

İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerden oluşan modeller de oldukça yaygındır. Örneğin,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + kx = f_A(t)$$

Burada ikinci mertebeden sistemlerin aynı iki girdiye, adım fonksiyonuna ve sinüs dalgasına tepkisini vereceğiz. Amacımız, ikinci dereceden sistemlerin parametrelerinin tepkilerini nasıl etkilediğini öğrenmek.

Doğrusal ikinci mertebeden diferansiyel denklemi düşünün:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b x(t)$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad y(0) = y_0$$

Denklemin a_2 , a_1 , a_0 ve b olmak üzere dört katsayısı, vardır, ancak, genellik kaybı olmaksızın, denklemi üç parametreyle karakterize etmek için üç katsayıdan biriyle (genellikle a_0) bölebiliriz.

$$\tau^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

$\tau = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$: (a_2 ve a_0 'ın aynı işarete sahip olduğu varsayılır) genellikle karakteristik zaman olarak adlandırılır; zaman biriminde.

$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$: genellikle sönüm oranı olarak adlandırılır; boyutsuz

$K = \frac{b}{a_0}$: genellikle sistem kazancı olarak adlandırılır; bağımlı değişken/zorlayıcı fonksiyon biriminde.

Şimdi $m \frac{d^2 x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + kx = f_A(t)$ denklemini bu biçimi kullanarak yazabiliriz,

$$\tau^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dx}{dt} + x = K f_A(t)$$

$$\tau = \sqrt{m/k} \text{ sn}; \quad \zeta = \left(P / 2\sqrt{mk} \right), \quad K = \frac{1}{k} \text{ m/N}$$

Tam çözüm; $y(t) = y_H + y_P$

Karşılık gelen homojen denklem

$$\tau^2 \frac{d^2 y_H(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy_H(t)}{dt} + y_H(t) = 0$$

$$\tau^2 r^2 + 2\zeta\tau r + 1 = 0$$

denklemin kökleri,

$$r_1, r_2 = \frac{-2\zeta\tau \pm \sqrt{4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2}}{2\tau^2} = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad \text{dir.}$$

Denklem, denklemin köklerini gösterir, böylece sistemin tepkisi ζ 'nin sayısal değerine bağlıdır.

Artık “sönüm oranı” teriminin salınımların sönümlenmesini ifade ettiğini görebiliyoruz; tepkinin davranışı aşağıdaki gibi özetlenmiştir:

$$\zeta > 1$$

Kökler negative gerçek, dolayısıyla monotonik ve kararlı bir tepki

$$0 < \zeta < 1$$

Kökler, negatif gerçek kısımlı karmaşık, dolayısıyla salınımlı ve kararlı bir tepki

$$\zeta = 0$$

Kökler sıfır gerçek kısımlı karmaşık, böylece sürekli bir salınım tepkisi

$$\zeta = 1$$

Kökler gerçek ve tekrarlanabilir, bu nedenle monotonik ve kararlı bir tepki

$$-1 < \zeta < 0$$

Kökler pozitif gerçek kısımlı karmaşık, bu nedenle büyüyen salınım tepkisi

$$\zeta \leq -1$$

Kökler pozitif gerçek, bu yüzden monotonik kararsız tepki

Adım Fonksiyon Girdisi

$x(t)$ zorlayıcı fonksiyonunun, $t=0$ anında $x(0)$ başlangıç değerinden $x_F = x(0) + D$ son değerine, yani $x(t) = x(0) + Du(t)$ değerine D birim büyüklüğünde adım değişimiyle değiştiğini varsayalım. Bu durumda,

$$y_P(t) = A_0, \quad \frac{dy_P(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 y_P(t)}{dt^2} = 0$$

Böylece $\tau^2(0) + 2\zeta\tau(0) + A_0 = Kx_F$

$$y_P(t) = A_0 = Kx_F$$

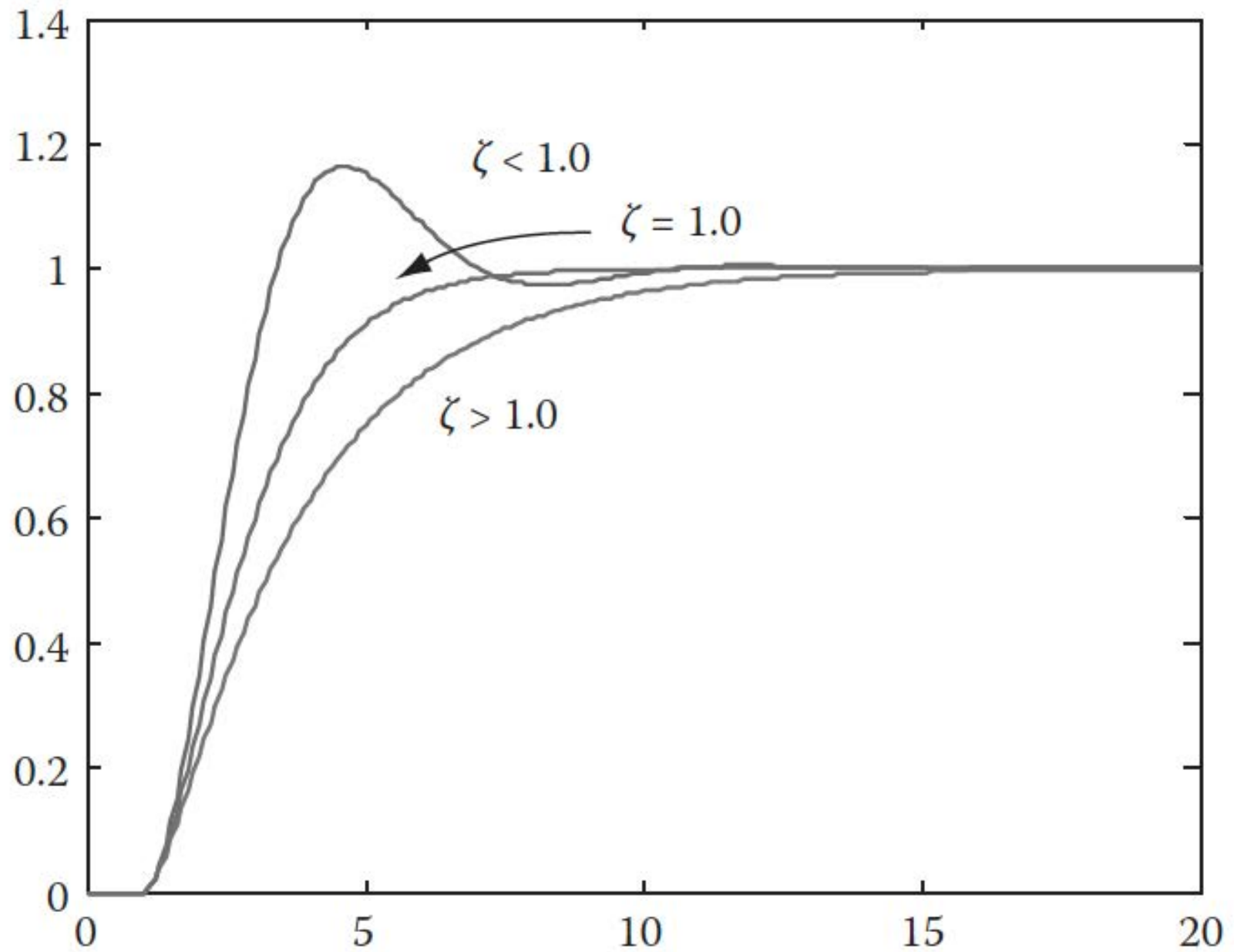
ya da
olur.

Sonuçta, $y(t) = y_H + y_P = y_H + Kx_F$ dır.

Adım tepkilerini grafiksel olarak göstermek için aşağıdaki ikinci mertebeden sistemi göz önünde bulunduralım:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = f(t)$$

ve $\tau = 1$ varsayalım. Başlangıç koşulları $y(0)=0$ ve $y'(0)=0$ 'dır. Aşağıdaki şekil, $f(t)$ değerinin 0'dan 1'e değiştiğinde sistemin tepkisini göstermektedir.



İkinci mertebeden sistemin zorlayıcı fonksiyondaki değişikliğe tepkisi

Son değerlerine ulaşmadan önce salınan sistemler, **az sönümlü (underdamped)** sistemler; son değerlerine ulaşmadan salınmayan sistemler **aşırı sönümlü (overdamped)** sistemler olarak adlandırılır. Son değerlerine salınımsız olarak hızlı bir şekilde yaklaşan, **kritik sönümlü** sistemler olarak adlandırılan sistemler de vardır.

Bunu şöyle özetleyebiliriz:

Az sönümlü sistemler: $\zeta < 1,0$ ya da $b_1^2 - 4a_2a_0 < 0$

Aşırı sönümlü sistemler: $\zeta > 1,0$ ya da $b_1^2 - 4a_2a_0 > 0$

Kritik sönümlü sistemler: $\zeta = 1,0$ ya da $b_1^2 - 4a_2a_0 = 0$

Sinüzoidal Fonksiyon Girdisi

$x(t) = B \sin \omega t$ olduğunu varsayalım, bu durumda,

$$y_P(t) = A_1 \cos \omega t + A_0 \sin \omega t$$

$$y'_P(t) = -A_1 \omega \sin \omega t + A_0 \omega \cos \omega t$$

$$y''_P(t) = -A_1 \omega^2 \cos \omega t - A_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$y_P(t)$, $y_P'(t)$ ve $y_P''(t)$ 'yi

$\tau^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ denkleminde yerine koyarsak

$$\tau^2(-A_1\omega^2 \cos \omega t - A_0\omega^2 \sin \omega t) + 2\zeta\tau(-A_1\omega \sin \omega t + A_0\omega \cos \omega t) + A_1 \cos \omega t + A_0 \sin \omega t = Kx(t)$$

ya da

$$(-A_1\tau^2\omega^2 + 2\zeta\tau A_0\omega + A_1) \cos \omega t + (A_0 - A_0\tau^2\omega^2 - 2\zeta\tau A_1\omega) \sin \omega t = KB \sin \omega t$$

elde edilir. Eşleşen terimlerden

$$A_0 - A_0\tau^2\omega^2 - 2\zeta\tau A_1\omega = KB$$

$$-A_1\tau^2\omega^2 + 2\zeta\tau A_0\omega + A_1 = 0$$

$$A_0 = \frac{KB(1-\tau^2\omega^2)}{(\tau^2\omega^2-1)^2+4\tau^2\zeta^2\omega^2}$$

$$A_1 = \frac{-2KB\tau\zeta\omega}{(\tau^2\omega^2-1)^2+4\tau^2\zeta^2\omega^2}$$

$$y(t) = y_H + y_P = y_H + \frac{KB}{(\tau^2\omega^2-1)^2+4\tau^2\zeta^2\omega^2} (-2\tau\zeta\omega \cos \omega t + (1-\tau^2\omega^2) \sin \omega t)$$

$$y(t) = y_H + y_P = y_H + \frac{KB}{\sqrt{(\tau^2\omega^2-1)^2+4\tau^2\zeta^2\omega^2}} \sin(\omega t + \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\tau\zeta\omega}{1-\omega^2\tau^2} \right)$$