



MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN OPTİMİZASYONU

Dr. Müh. Mustafa Kemal SEVİNDİR

Yıldız Teknik Üniversitesi Mak. Müh. Böl.

Web: www.yildiz.edu.tr e-mail: sevindir@yildiz.edu.tr



İÇERİK

HAFTA	KONU
1. HAFTA	Optimizasyon kavramları
2. HAFTA	Çalışır ve optimum dizayn
3. HAFTA	Optimizasyon tanımları
4. HAFTA	Optimizasyon problemlerinin matematiksel gösterimi
5. HAFTA	Bir boyutlu kısıtlamasız optimizasyon (Golden Bölme Yöntemi)
6. HAFTA	Çok boyutlu kısıtlamasız optimizasyon
7. HAFTA	Lineer ve nonlinearer denklem sistemi çözümleri
8. HAFTA	Ara Sınav
9. HAFTA	Lagrange yöntemi
10. HAFTA	Uygulama
11. HAFTA	Eşitsizlik kısıtlı optimizasyon problemleri
12. HAFTA	Lineer optimizasyon
13. HAFTA	Simplex Yöntemi
14. HAFTA	Ara Sınav
15. HAFTA	Uygulama



DERS KAYNAKLARI

1. Design of Thermal System, W.F. Stocker
2. Optimization of Chemical Processes, T.F. Edgar, D.M. Himmelblau
3. Nocedal J. and Wright S.J., Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research, Springer, 636 pp, 1999.
4. Spall J.C., Introduction to Stochastic Search and Optimization, Estimation, Simulation and Control, Wiley, 595 pp, 2003.
5. Chong E.K.P. and Zak S.H., An Introduction to Optimization, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 476 pp, 2001.
6. Rao S.S., Engineering Optimization - Theory and Practice, John Wiley & Sons, New York, 903 pp, 1996.
7. Gill P.E., Murray W. and Wright M.H., Practical Optimization, Elsevier, 401 pp., 2004.
8. Goldberg D.E., Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Addison Wesley, Reading, Mass., 1989.
9. S. Boyd and L. Vandenberghe, Convex Optimization, Cambridge University Press, 2004.



PROF. DR. GEORGE POLYA (MATEMATİKÇİ, 1888-1985)

“Problemleri çözmek, yüzmeye, paten kaymaya veya piyano çalmaya benzer pratik bir beceridir.

Buna yalnız, seçici taklitler ve daima antrenman yaparak erişmek mümkündür.

Kitaplarda (bu kitapta) bütün problemleri çözmeniz için gerekli yöntemlerin, yani bütün kapıları açan olağanüstü anahtarın olmasını beklemeyin.

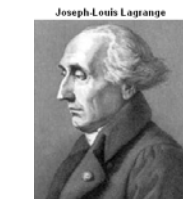
Fakat, burada taklit için iyi örnekler ve pratik beceri kazanmak için uygun olanaklar elde edebilirsiniz.

Yüzmeyi öğrenmek istiyorsanız suya girmeniz gerekir.

Problem çözmeyi öğrenmek için ise, onları çözmelisiniz...”

TARİHSEL GELİŞİM

- Isaac Newton (1642-1727)
(The development of differential calculus
methods of optimization)
- Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
(Calculus of variations, minimization of functionals,
method of optimization for constrained problems)
- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
(Solution by direct substitution, steepest
descent method for unconstrained optimization)



TARİHSEL GELİŞİM

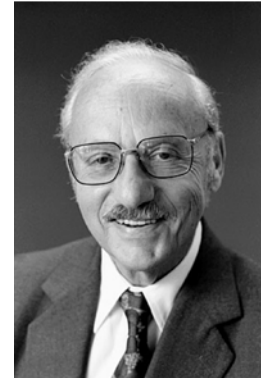
- Leonhard Euler (1707-1783)
(Calculus of variations, minimization of functionals)
- Gottfried Leibnitz (1646-1716)
(Differential calculus methods of optimization)



İsim: Gottfried Wilhelm von Leibniz

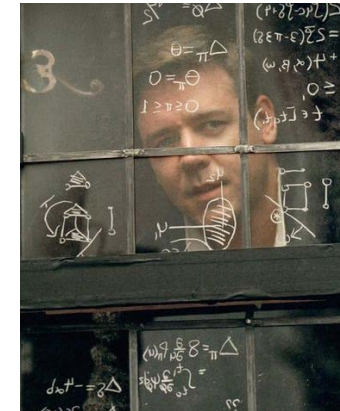
TARİHSEL GELİŞİM

- George Bernard Dantzig (1914-2005)
(Linear programming and Simplex method (1947))
- Richard Bellman (1920-1984)
(Principle of optimality in dynamic programming problems)
- Harold William Kuhn (1925-2014)
(Necessary and sufficient conditions for the optimal solution of programming problems, game theory)



TARİHSEL GELİŞİM

- Albert William Tucker (1905-1995)
(Necessary and sufficient conditions for the optimal solution of programming problems, nonlinear programming, game theory: his PhD student was John Nash)
- Von Neumann (1903-1957)
(game theory)



John von Neumann



MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME





MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME

Tasarım, bir ürün yada prosesin tüm hesaplarının ve çizimlerinin yapılarak raporlanmasıdır.

Tasarım;

1. Ekipman (eleman)
2. Proses yada sistem

olmak üzere ikiye ayrılır.

Bu sahada çalışan bir mühendisin temel görevi tüm diğer görevlerinin yanı sıra sistem dizaynı yapmaktır. Sistem tasarımının çıktısı ise;

- Hesaplamaları içeren raporlar
- Ürün yada donanımın teknik özellikleri
- Çizimlerdir.



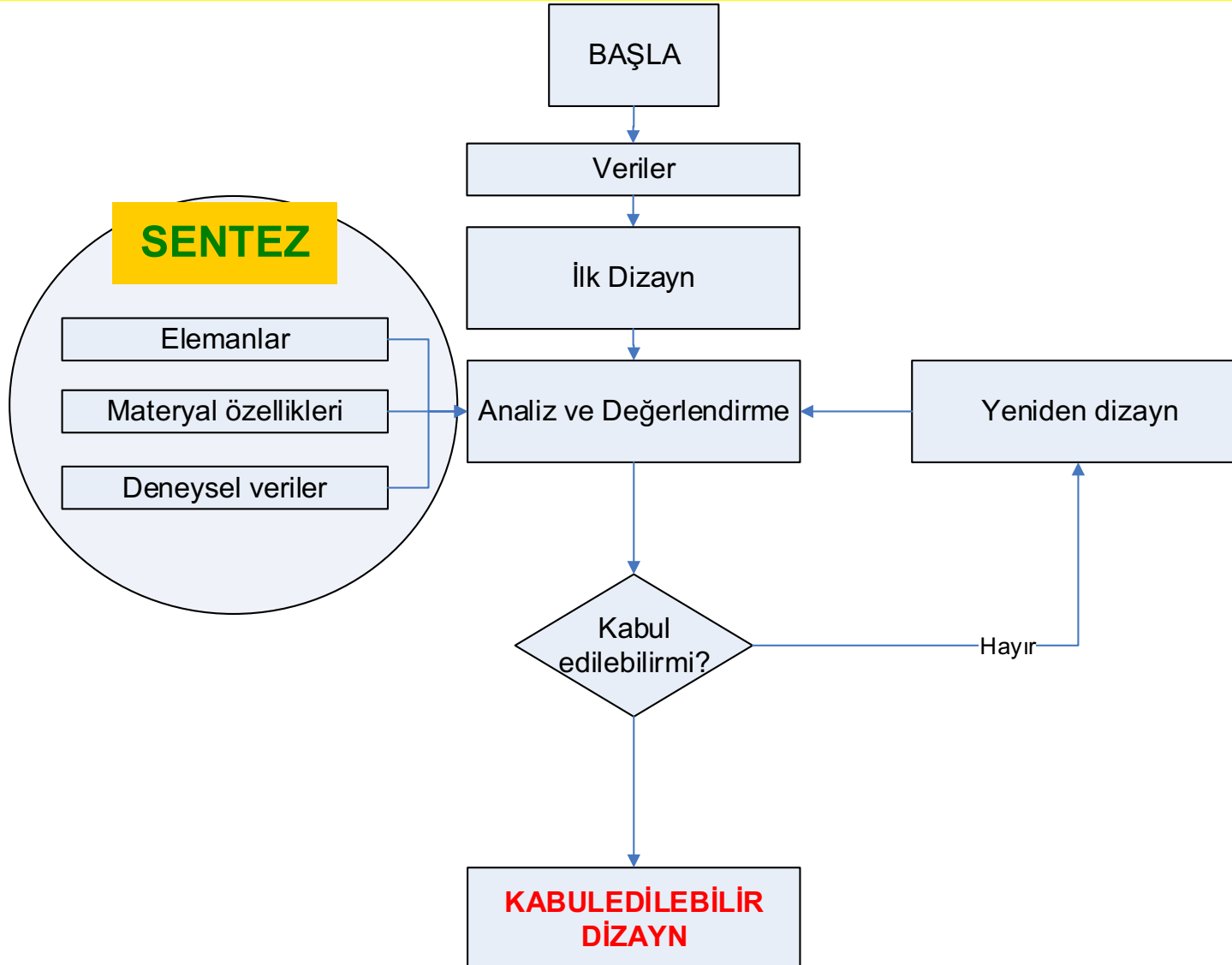
MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME

Mühendislik eğitimi eleman/ekipman tasarımı üzerinedir. Fakat uygulamada mühendisler daha çok sistem tasarımı ile karşılaşır.

Ekipman tasarımı üzerine olan temel bilgilerin iyi olması mühendislik için gereklidir. Fakat daha önemli olan bu bilgileri bir araya getirmek ve uygulamada bunlardan yararlanmaktır.

Farklı bilgilerin bir araya getirilmesine **SENTEZ** denilir.

MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME





MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME

Tasarım;

- Çalışır tasarım
- Optimum dizayn

olmak üzere ikiye ayrılır.

Yapılan tasarım ne zaman çalışır tasarım kabul edilebilir?

1. Amaç sağlanmalı
2. Ömür ve bakımları uygun olmalı
3. Boyut, ağırlık, sıcaklık, malzeme özellikleri, gürültü gibi kısıtlara uygun olmalı



MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME

Çalışır tasarım kaç tanedir?

Tasarımda yapılan kabul sayısına bağlı olarak, verilen kısıtlara uyacak çok sayıda çalışır dizayn yapılabilir.

Çalışır sistemlerden hangisi en iyidir?

Çalışır sistemler için performans ölçütü tanımlanarak kıyaslama yapılabilir. Bu ölçütler;

* Verim

* Emisyon

* Yatırım Maliyeti

* Gürültü

* Bakım maliyeti

* vb..

* Boyut



MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME

Optimum tasarım nedir?

Verilen optimizasyon kriterini içeren amaç fonksiyonunu maksimum ya da minimum yapan tasarım parametrelerinden oluşan tasarımdır.

Optimizasyon ölçütleri:

- Maliyet
- Boyut
- Ağırlık
- Gürültü
- Güvenlik
- Estetik



MÜHENDİSLİK VE KARAR VERME

Mühendisin görevi hangi tasarımı yapmak ?

- Zaman kısıtı
- Maliyet fazlalığı
- Verilerin yetersizliği ve güvenirliği
- Bilgi eksikliği
- Eleman eksikliği

ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

Aralarındaki 15 m yükseklik olan iki depo arasında 400 m boru kullanılacaktır. Saatte 10 m³ su basmak için gerekli sistemi tasarlayın.

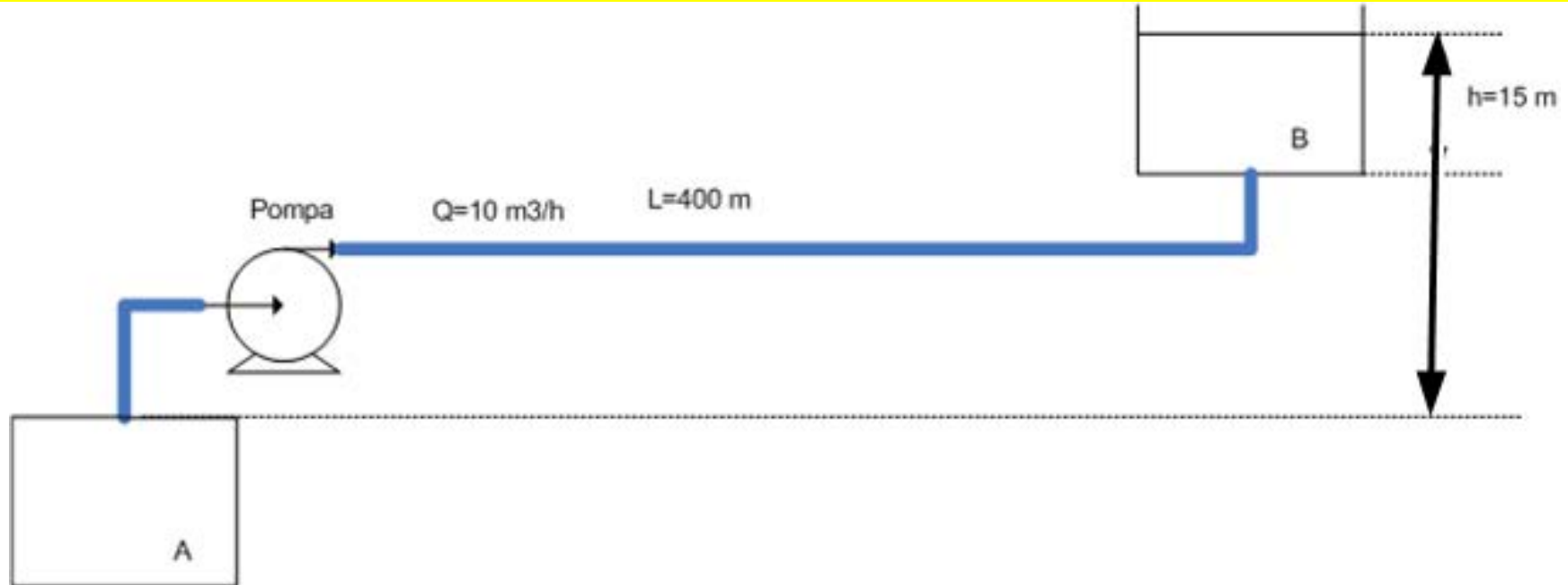


İSTENENLER:

Pompa : Debi, Basma Yüksekliği, Tip, Devir Sayısı

Boru: Çap, Boy, Boru Özelliği (Malzeme, et kalınlığı)

ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN



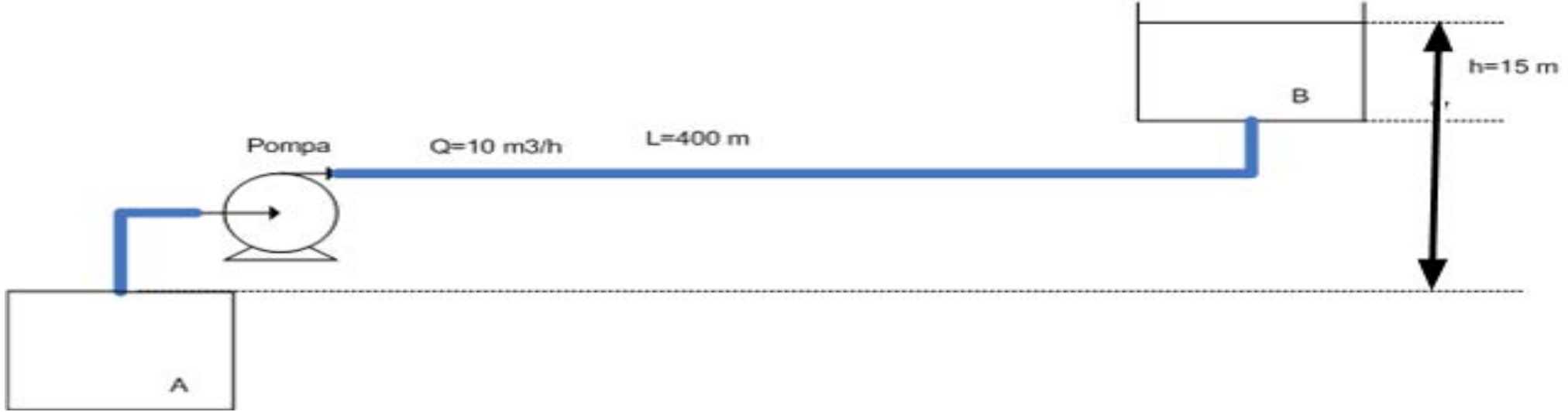
1. Yükseklik farkından dolayı ihtiyaç duyulan basınç:

$$\Delta P_s = h g \rho = 15 * 9,807 * 1000 = 147105\text{ Pa}$$

$$\Delta P_s = 147,1\text{ kPa}$$



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

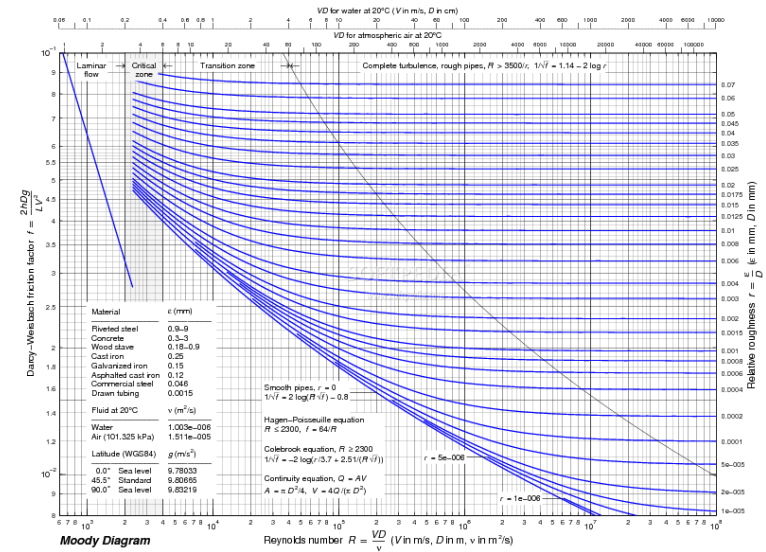


2. Borudaki enerji kayıpları için gerekli olan basınç:

$$\Delta P_k = f \frac{L V^2}{2D} \rho \text{ [Pa]} \text{ yada}$$

$$\Delta P_k = \frac{8fL Q^2}{\pi^2 D^5} \rho \text{ [Pa]}$$

$$\text{ve } f=(Re, \varepsilon/D), \quad Re = \frac{DV}{\nu}$$



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN



2. Borudaki enerji kayıpları için gerekli olan basınç:

$$\Delta P_k = 100\text{ kPa (KABUL)}$$

3. Toplam pompa basıncı

$$\Delta P = \Delta P_s + \Delta P_k = 147,1 + 100 = 247,1\text{ kPa}$$

ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

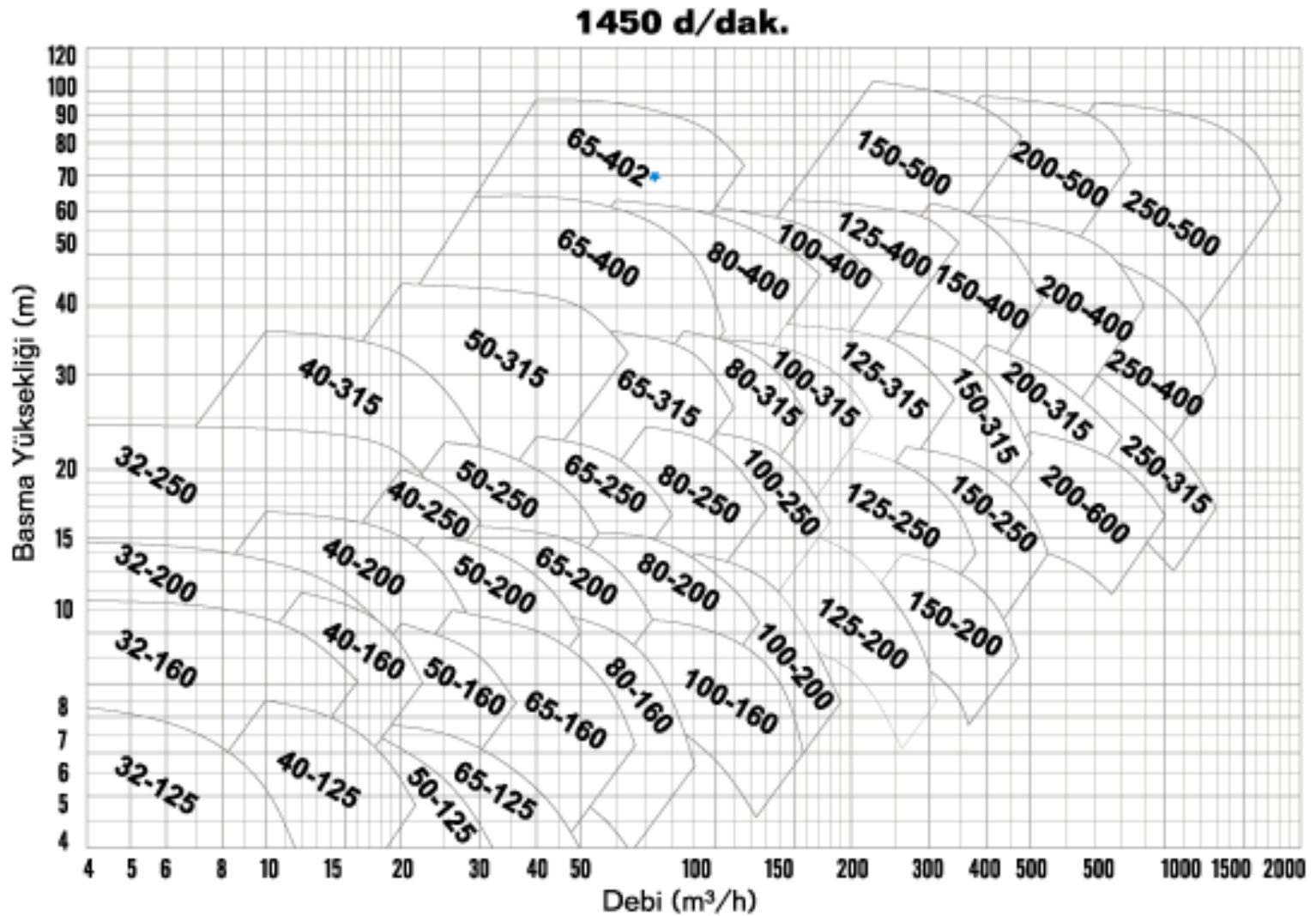


3. Toplam pompa basıncı

$$\Delta P = \Delta P_s + \Delta P_k = 147,1 + 100 = 247,1 \text{ kPa}$$

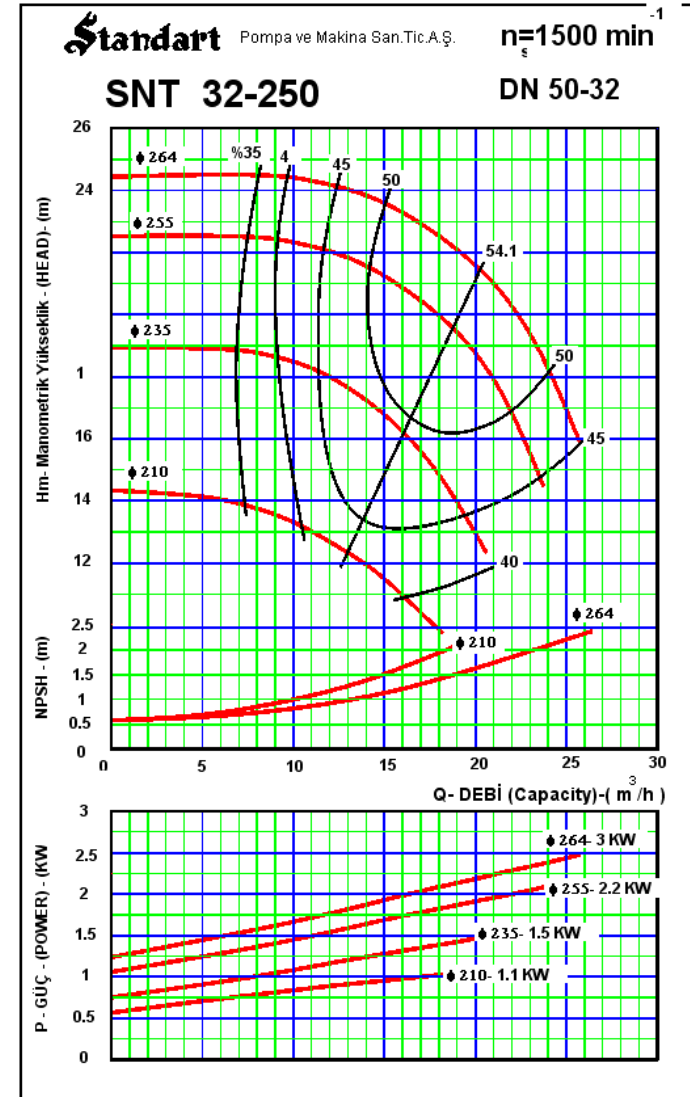
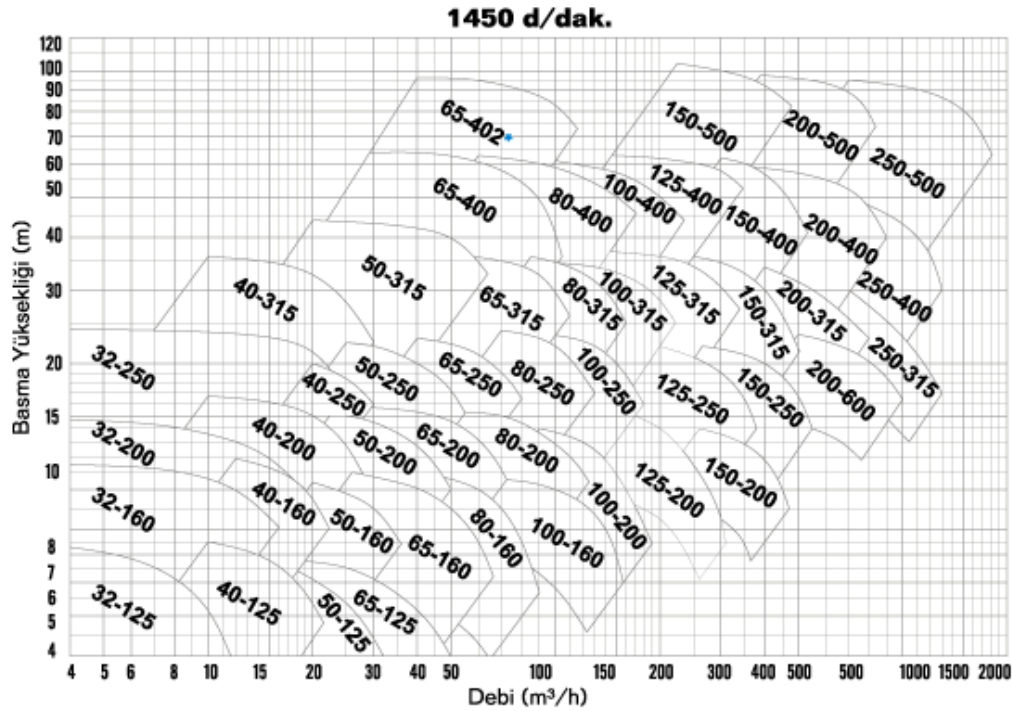
$$H = \frac{\Delta P}{g\rho} = \frac{247105}{1000 * 9,807} = 25,2 \text{ mSS}$$

ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

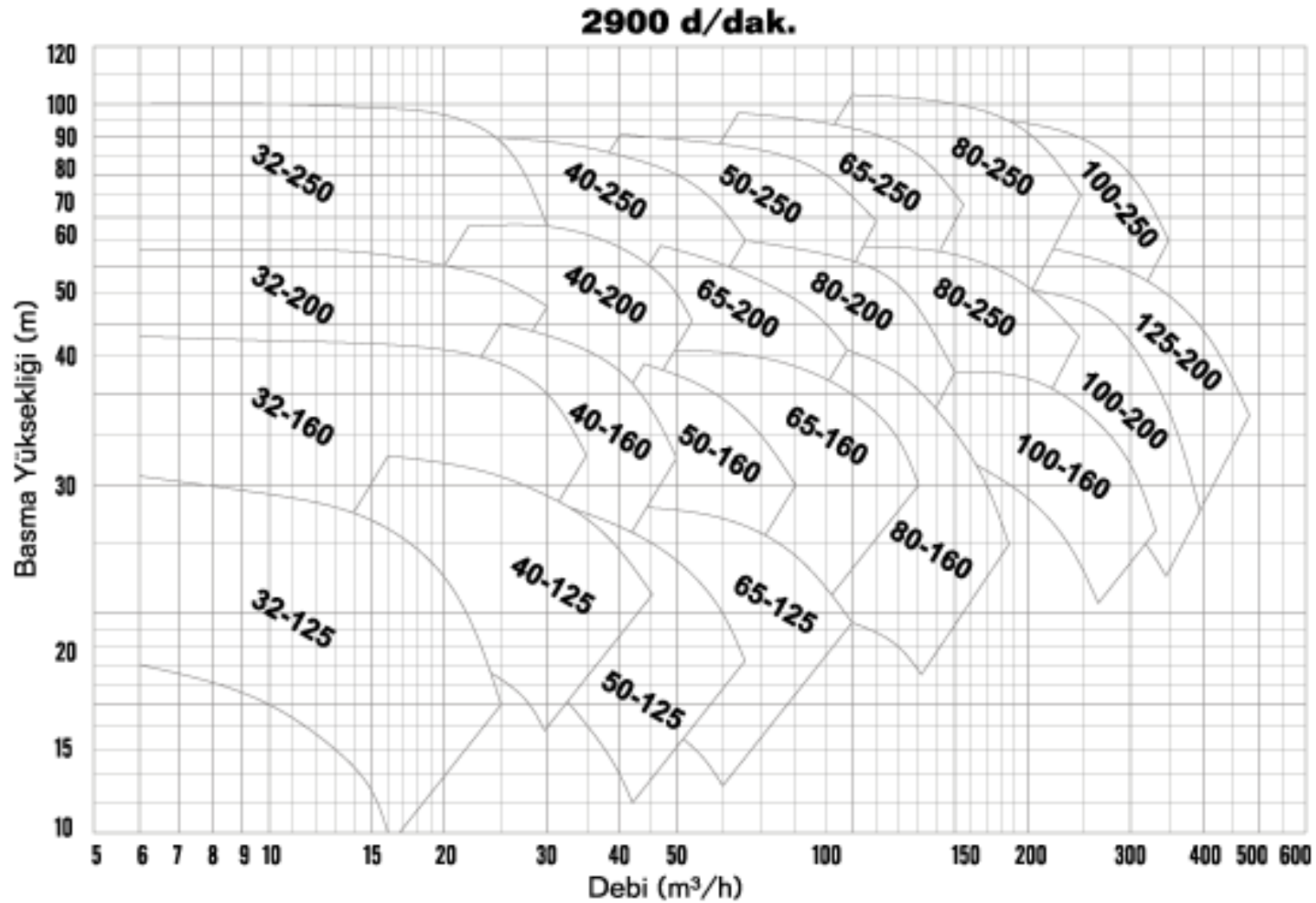




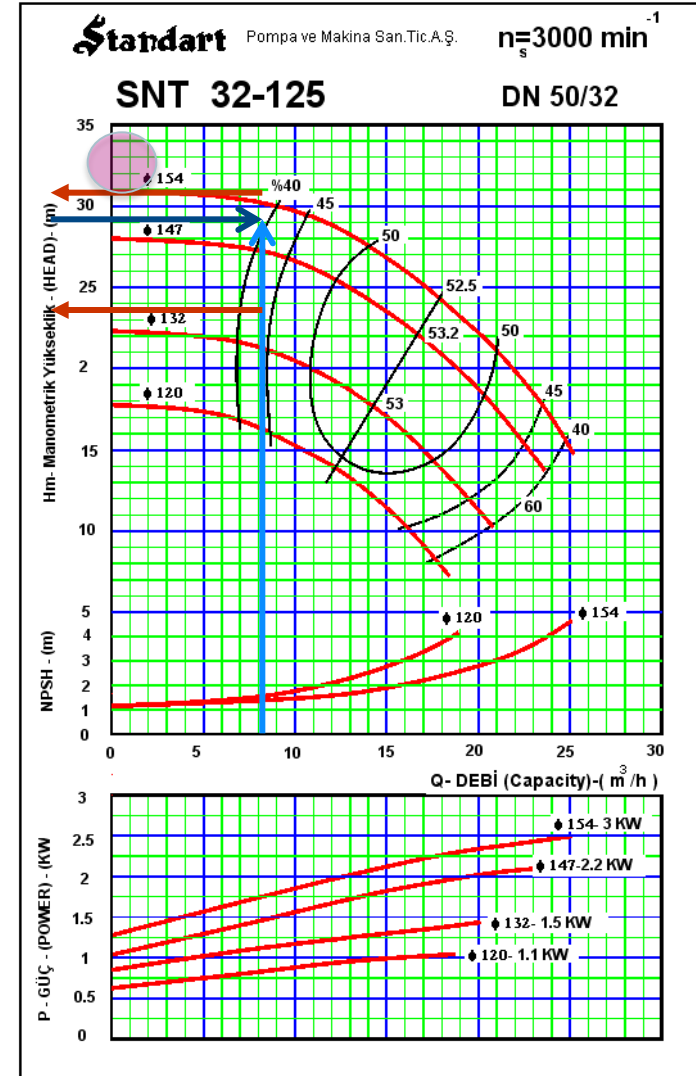
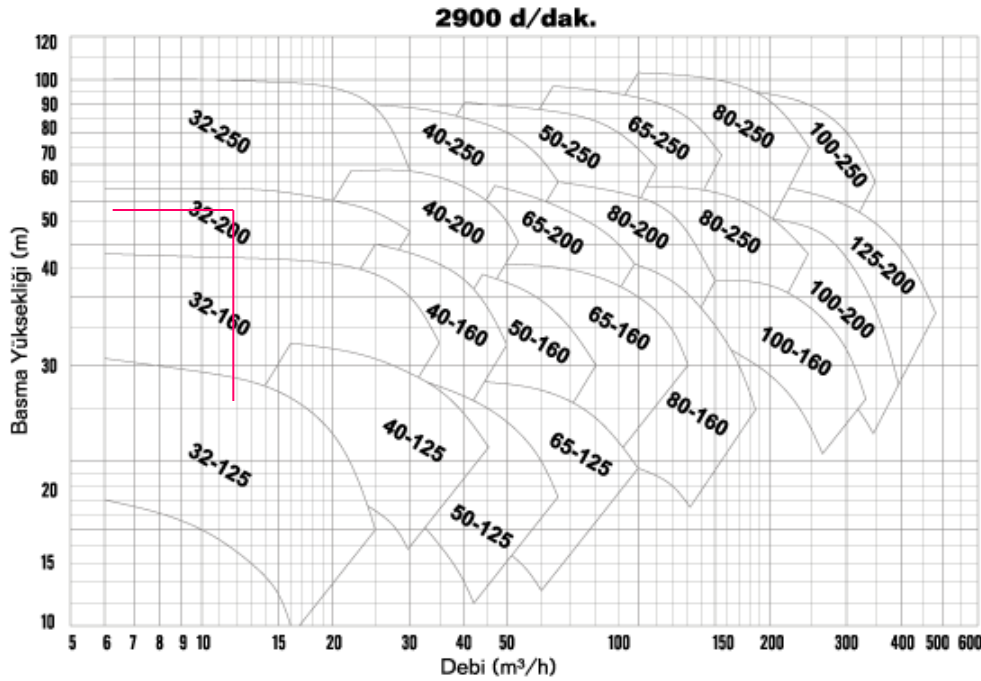
ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

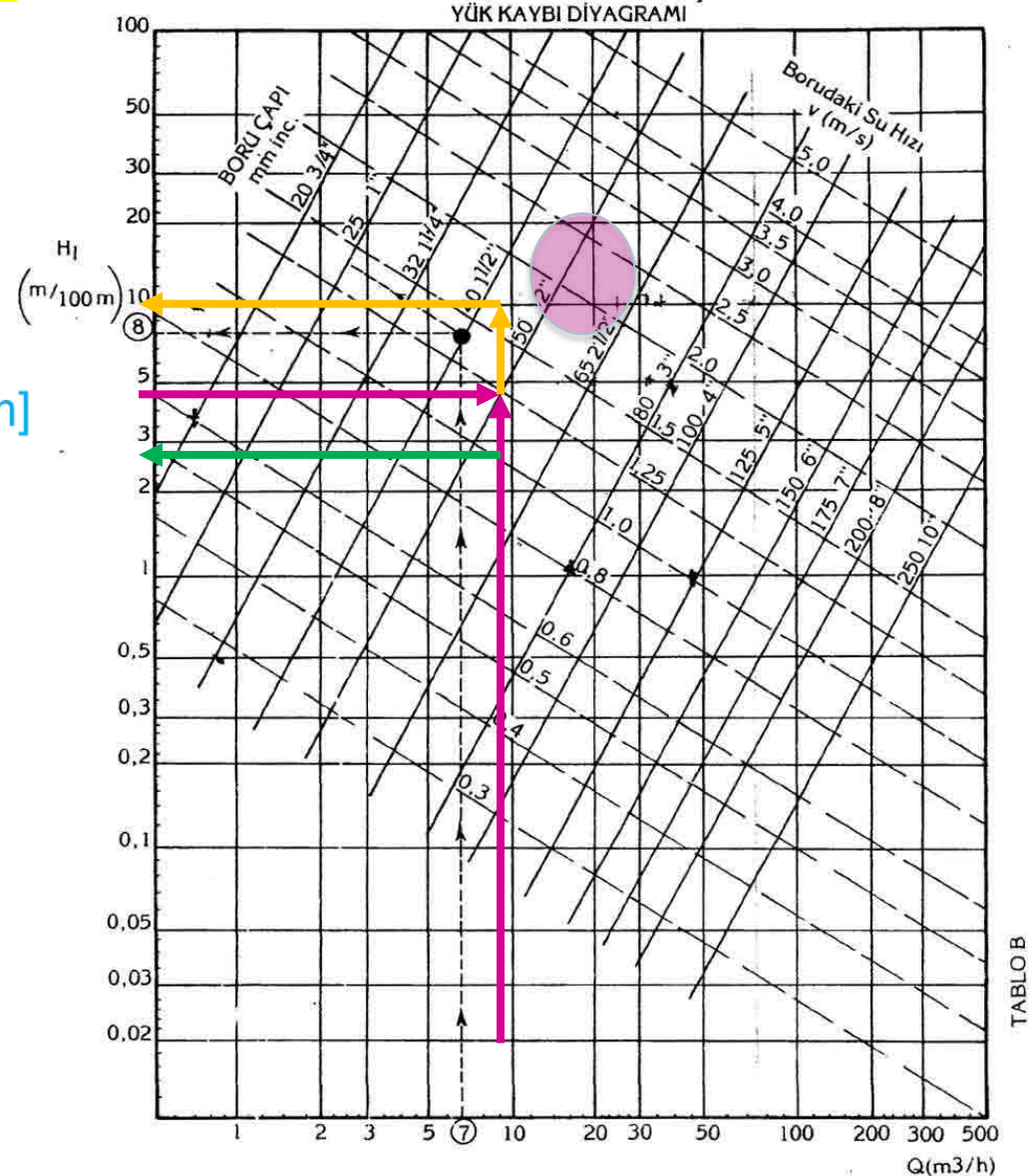




ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

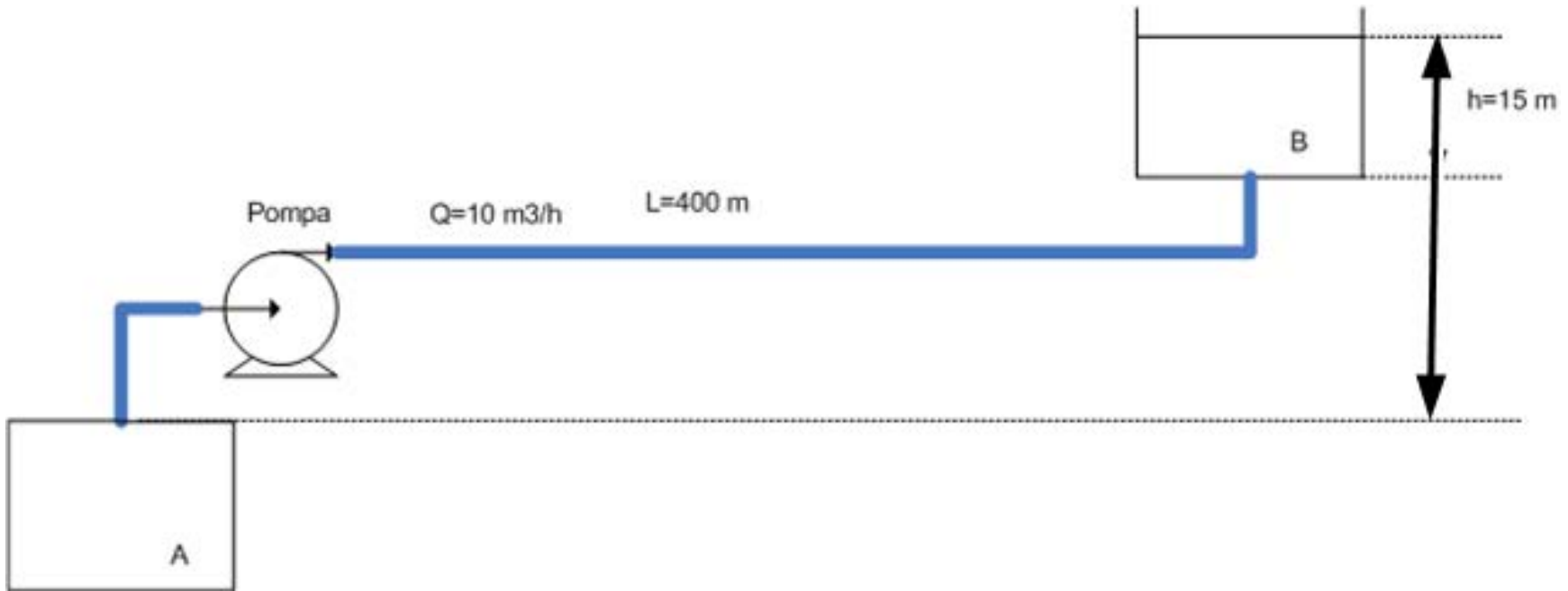
$$Q = 10 \frac{m^3}{h}$$

$$H/L = \frac{100 \text{ kPa} \cdot 1000 \text{ Pa/kPa}}{1000 \cdot 9,81 \cdot 4} = 2,54 \text{ [m/100m]}$$

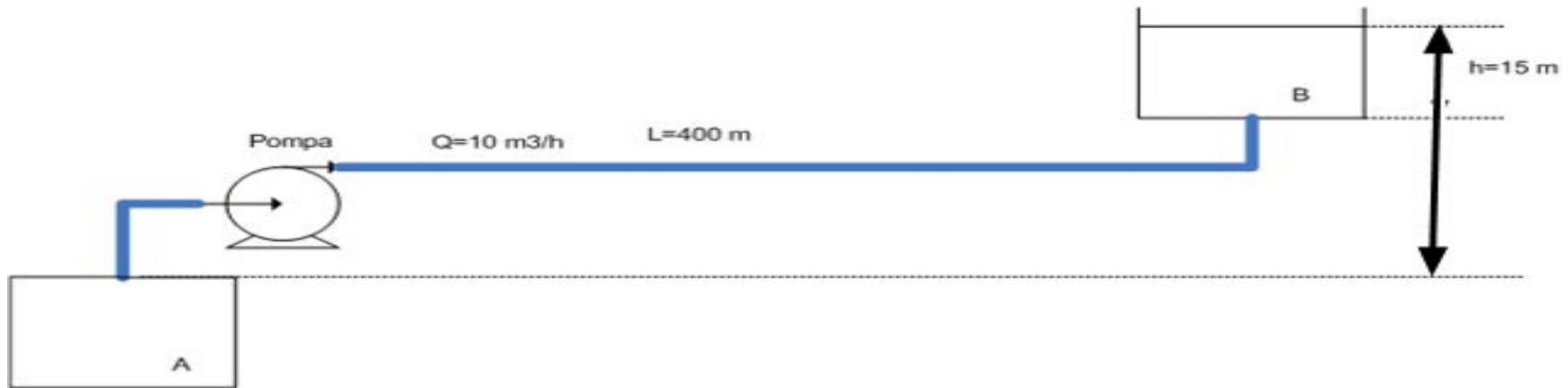


ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

Problem optimizasyon problemi olarak ele alındığında optimizasyon ölçütü ne olacak ?



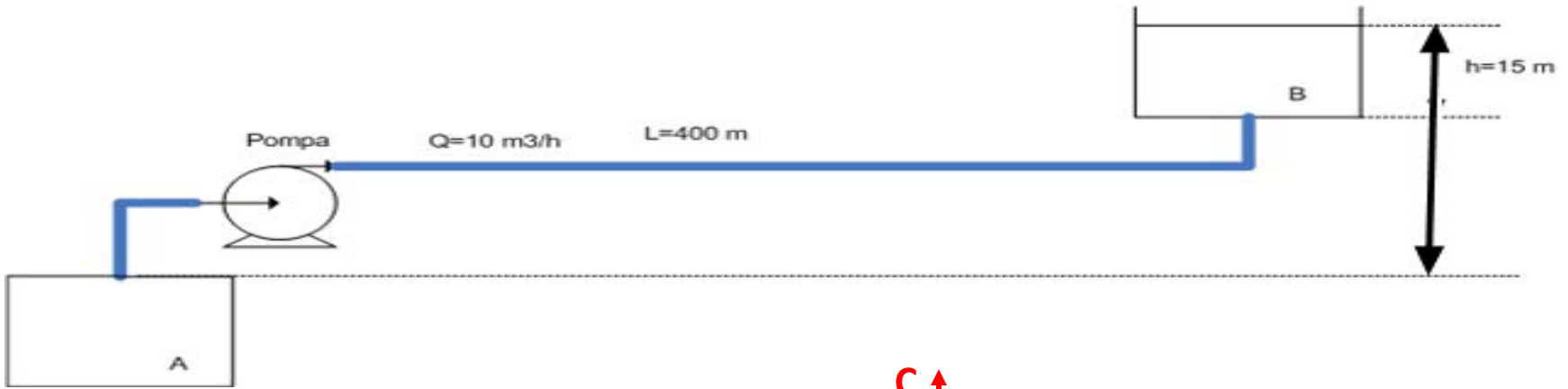
ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN



1. Pompa Maliyeti (C_p) [TL]
2. Boru Maliyeti (C_b) [TL]
3. Elektrik Masrafları (C_e) [TL/yıl]

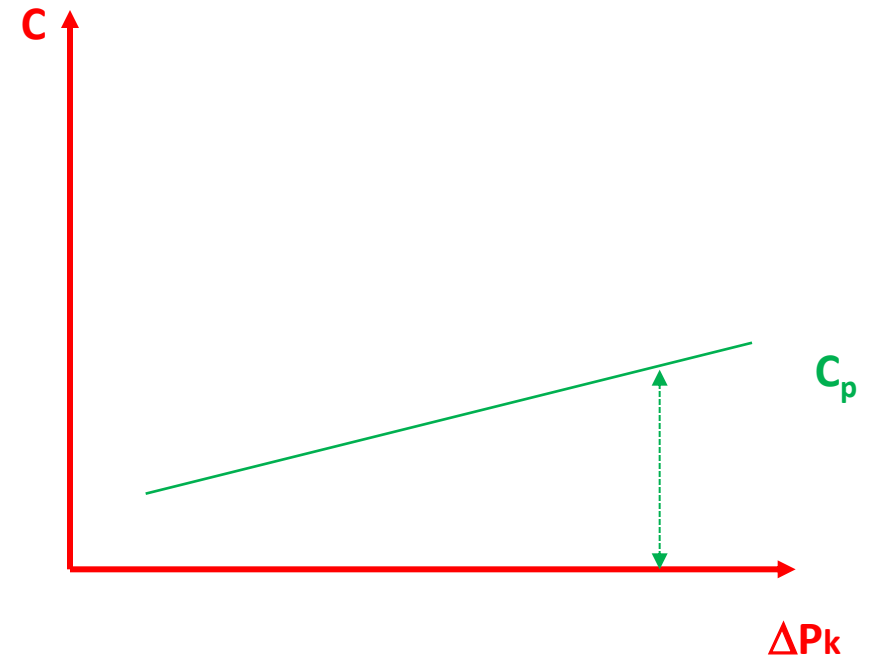
$$C = C_p + C_b + C_e = f(\Delta P_k)$$

ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

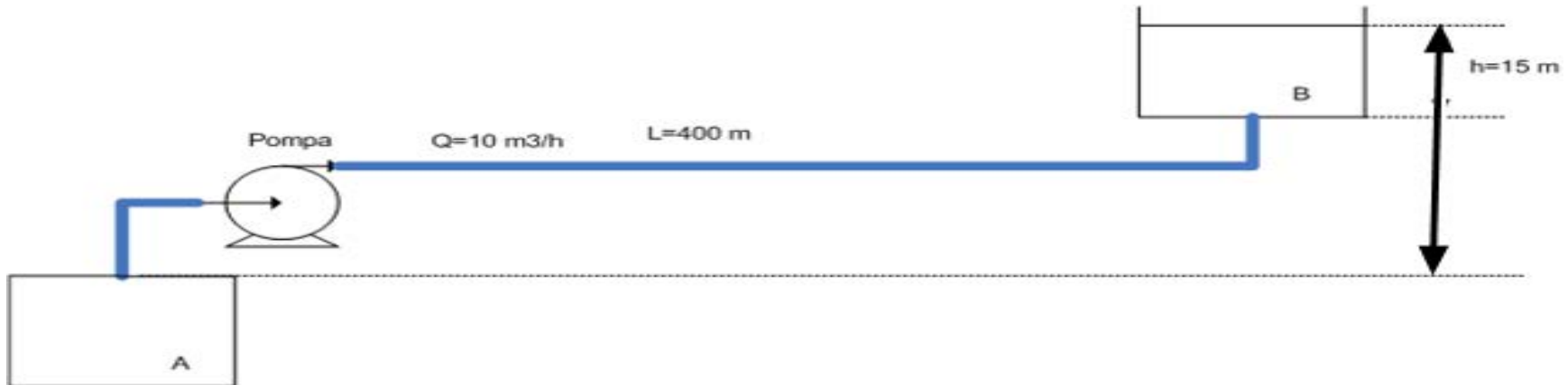


1. Pompa Maliyeti (C_p) [TL]

Pompa maliyeti ΔP artınca artar.



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

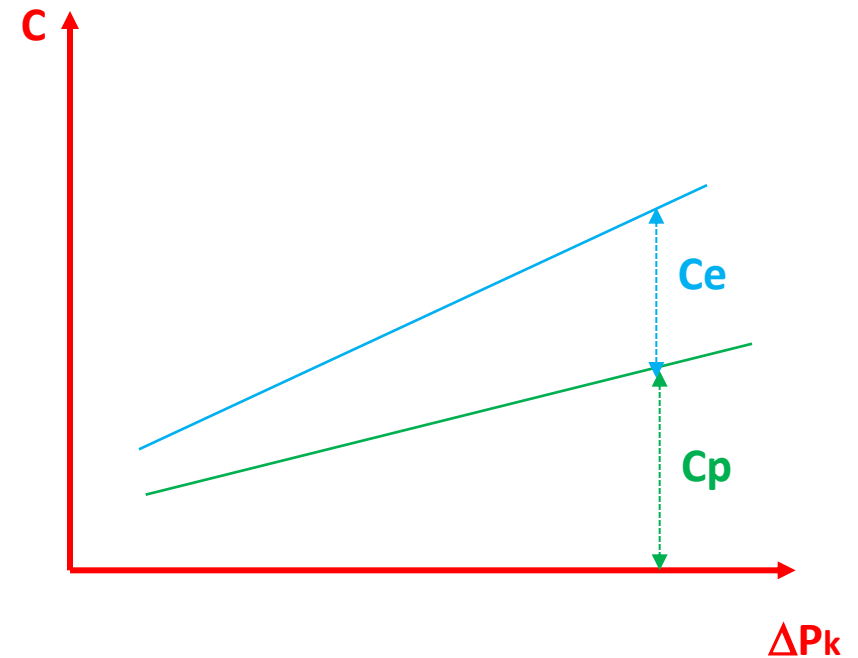


1. Elektrik Masrafları (C_e) [TL/yıl]

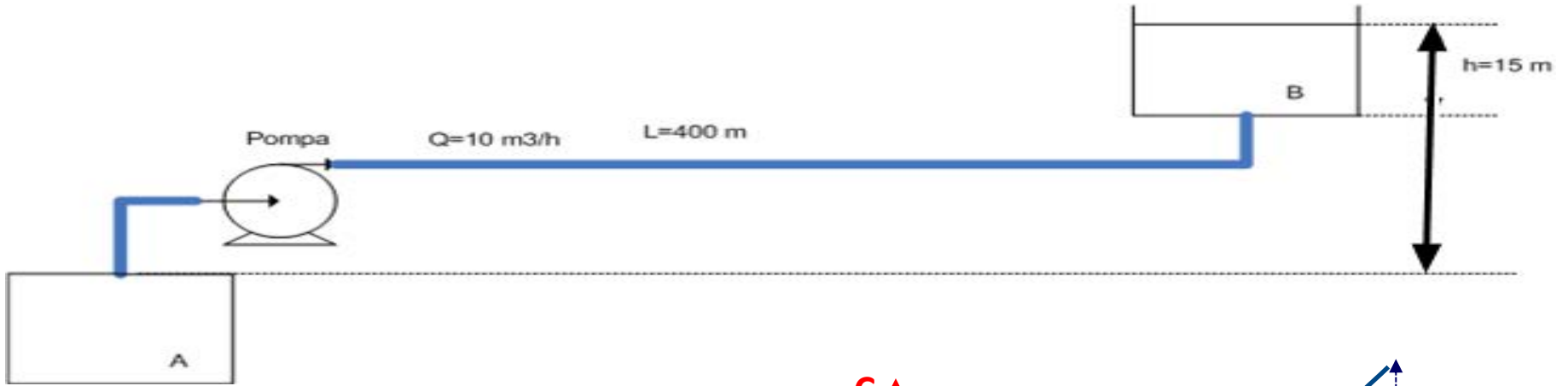
Elektrik Masrafları ΔP artınca artar.

$$N = \frac{g\rho QH}{\text{verim}}$$

$$C_e = N \cdot h \cdot F_e$$

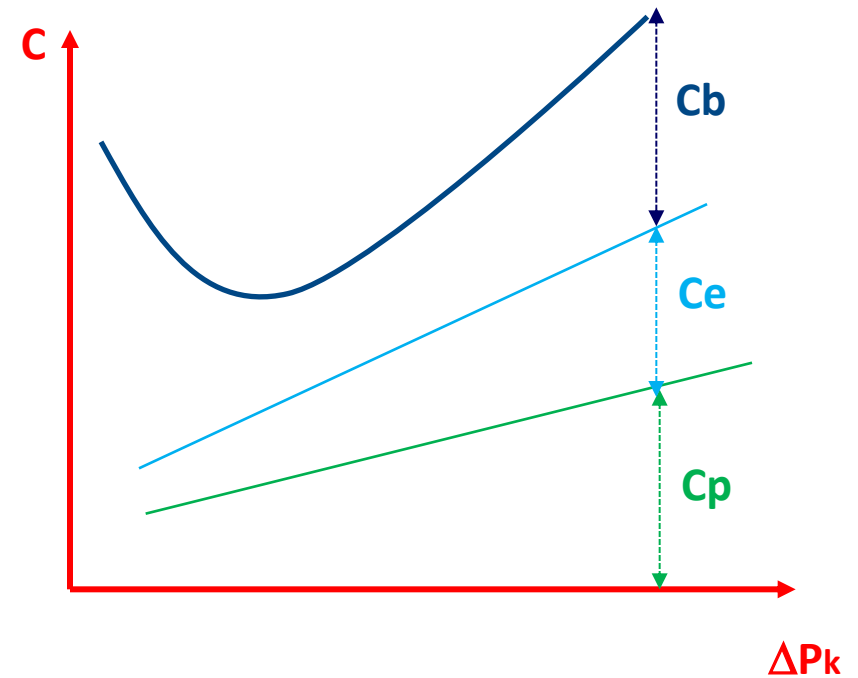


ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

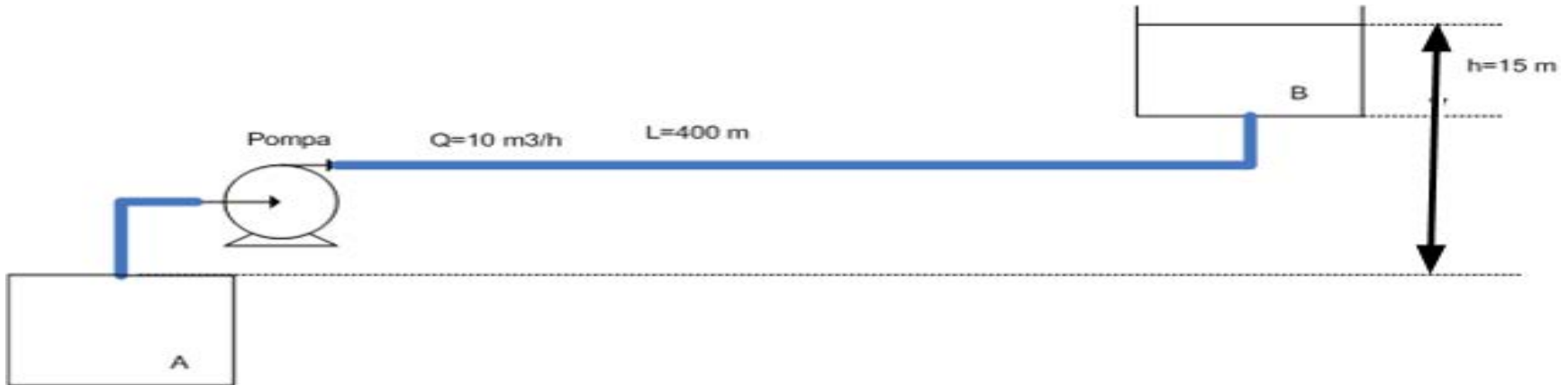


3. Boru Maliyeti (C_b) [TL]

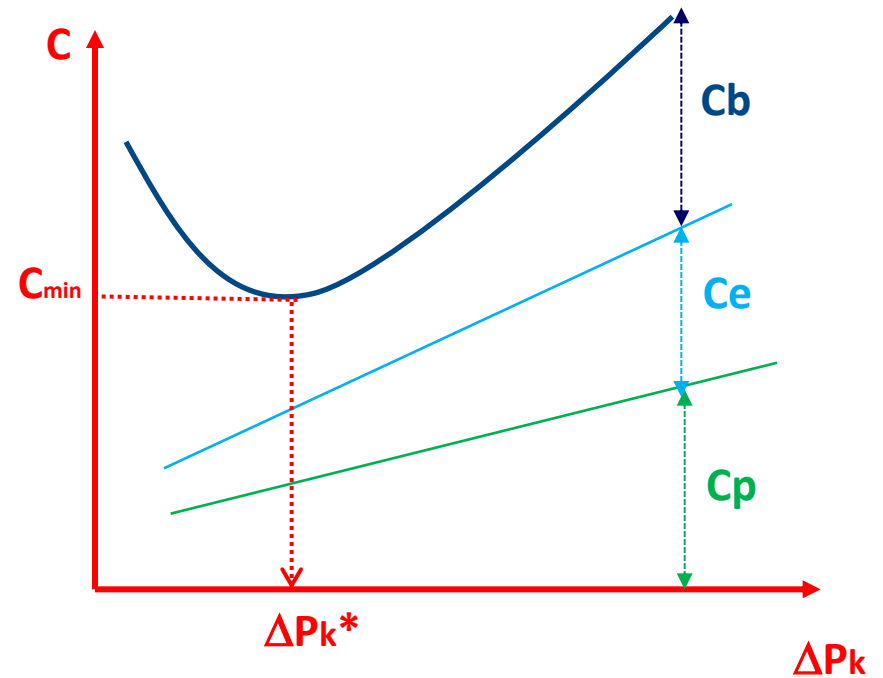
Boru masrafları ΔP artınca önce azalır
Sonra artar.



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN



Optimum Çözüm;





ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

Optimum tasarımda en uygun tasarım parametrelerinin bulunması için sırası ile;

- **Simülasyon**
- **Optimizasyon**

yapılır.

Bu hesaplamaların yapılmasında, sistemde kullanılan elemanların karakteristiklerini gösteren eşitliklere ihtiyaç duyulur.



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

Simülasyonunun amacı, kurulan gerçek sistemi taklit eden matematik model üzerinden gerçek sistemin performans ve işletme değerlerinin belirlenmesidir.

Termal sistemin performans parametreleri güç, verim, performans katsayısı, etkinliği vb. büyüklükler iken, işletme parametreleri debi ve termodinamik büyüklükler (basınç, sıcaklık, entalpi, hacim vb.) olabilir.



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

Sistem simülasyonu için sistem elemanlarının tamamının karakteristik eşitliklerinin ve iş akışkanlarının termodinamik özelliklerinin bilinmesi gerekir.

Matematik model için fiziksel kanunlardan ve eğri uydurmadan yararlanılır.

Sistem simülasyonunun matematik anlamı ise bazıları non-lineer olan denklem sisteminin çözülmesidir.



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

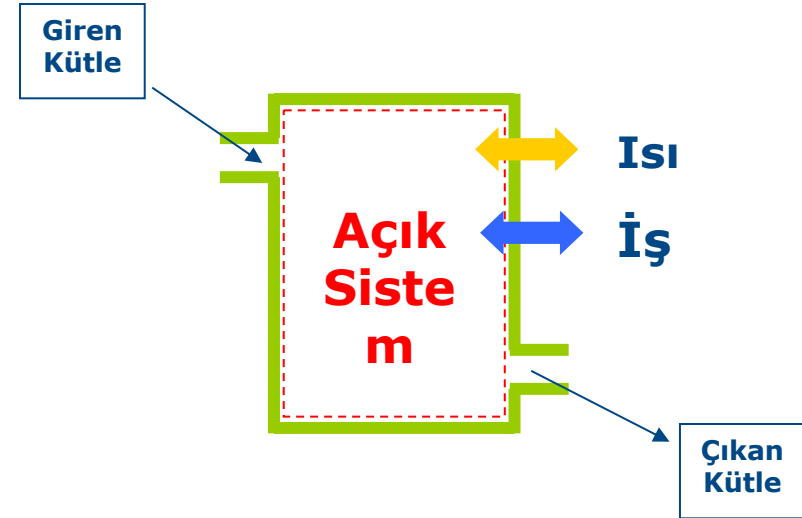
Elemanların performanslarını gösteren karakteristik eğrilerin oluşturulmasında 2 yöntem kullanılır.

- Fiziksel kanunlar
- Eğri uydurma

Bu iki yöntem arasındaki fark; birinci yöntemde fiziksel kanunlardan yararlanılırken, eğri uydurmada sayısal yöntemlerin kullanılmasıdır.

ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

Termodinamik kanunlar, ısı transferi kanunları vb. kanunlardan yararlanılarak gerçek olayları ifade eden matematiksel eşitlikler çıkartılır ve olaylar gerçekleşmeden kavramsal olarak tasarlanabilir.



$$\Sigma m_g - \Sigma m_{\dot{\varsigma}} = \Delta m_{kh}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum \dot{m}_{\dot{\varsigma}} \left(\dot{h}_{\dot{\varsigma}} + \frac{V_{\dot{\varsigma}}^2}{2} + gz_{\dot{\varsigma}} \right) - \sum \dot{m}_g \left(\dot{h}_g + \frac{V_g^2}{2} + gz_g \right)$$



ÇALIŞIR VE OPTİMUM DİZAYN

Sistem tasarımında elemanların modellenmesinde kullanılan diğer bir yol eğri uydurmadır. Eğri uydurmanın kullanılma nedenleri;

1. Matematik modeller çok karmaşık olduğunda, deneylerden yada tecrübelerden elde edilen veriler elemanların modellenmesinde kullanılır.
2. Sistem tasarımında genellikle eleman tasarımı yapılmaz. Elemanların karakteristik eşitlikleri üreticilerin test değerlerinden alınır.



MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM SÜRECİ

- Bilgi ve anlama herhangi bir eşyanın (aracın) verimli kullanılması için ön şartlardır. Alet çantanız ne kadar zengin olursa olsun, eğer bir otomobilin nasıl çalıştığını bilmiyorsanız, onu onaramazsınız.
- Sistemlerin temel çalışma ilkeleri köklü bir şekilde kavranırsa, problemlerin çözülmesinde potansiyel yöntemler geliştirmekte mümkün olabilir.
- Sistemlerin çalışma ilkeleri ise genel olarak gözlem (tecrübe) ve deney yaparak kazanılır. Ancak, tecrübe ile kazanılan bilgiler önemli olmakla beraber, olayın sadece yarısıdır.
- Bilim adamları yıllarca yaptıkları gözlem ve deneylerin sonunda, sonuçların belirli yönlerden hep tekrarlandığını gördüler.
- Bu şekilde tekrarlanan genel davranışlar temel yasalar olarak ifade edilmektedir.
- Mühendislik problemlerinin çözümü, teorik analiz ve deneysellikten oluşan iki aşamalı bir yaklaşım uygulanmasını gerektirir.



MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM SÜRECİ

- Bir mühendislik probleminin çözümü açısından bakıldığında, matematiksel bir model şeklinde ifade edilebilen bir çerçeve çok kullanışlıdır.
- Matematiksel bir model, en genel anlamıyla, fiziksel bir sistemin veya bir sürecin ana özelliklerini matematiksel terimlerle ifade eden bir eşitlik veya formül olarak tanımlanabilir.
- Çok genelleştirilmiş olarak, matematiksel model aşağıdaki biçimde fonksiyonel bir ilişki olarak gösterilebilir:

$$\begin{matrix} \text{bağımlı} \\ \text{değişken} \end{matrix} = f \left(\begin{matrix} \text{bağımsız} \\ \text{değişkenler} \end{matrix}, \begin{matrix} \text{parametreler} \\ \text{fonksiyonlar} \end{matrix}, \begin{matrix} \text{zorlayıcı} \end{matrix} \right)$$

- Bağımlı değişken: Sistemin davranışını yada konumunu belirten özellik
- Bağımsız değişken: Zaman veya konum gibi boyut
- Parametreler: Sistemin özellikleri veya yapısı
- Zorlayıcı fonksiyonlar : Sistemi etkileyen dış etkenler.



ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

- Denklemlerin Kökleri
- Cebirsel, doğrusal denklem sistemleri
- Optimizasyon
- Eğri Uydurma
- Sayısal İntegrasyon
- Adi diferansiyel denklemler
- Kısmi diferansiyel denklemler
- ...



DENKLEMLERİN KÖKLERİ / SAYISAL YAKLAŞIMLAR

Kapalı Yöntemler

- ✓ Grafik Yöntemler
- ✓ İkiye Bölme Yöntemi
- ✓ Yer Değiştirme Yöntemi
- ✓ Adım Adım Artırmalı Arama

Açık Yöntemler

- ✓ Basit Sabit Noktalı İterasyon
- ✓ Newton-Raphson Yöntemi
- ✓ Sekant Yöntemi

Polinomların Kökleri

- ✓ Müller Yöntemi
- ✓ Bairstow Yöntemi
- ✓ Diğer Yöntemler

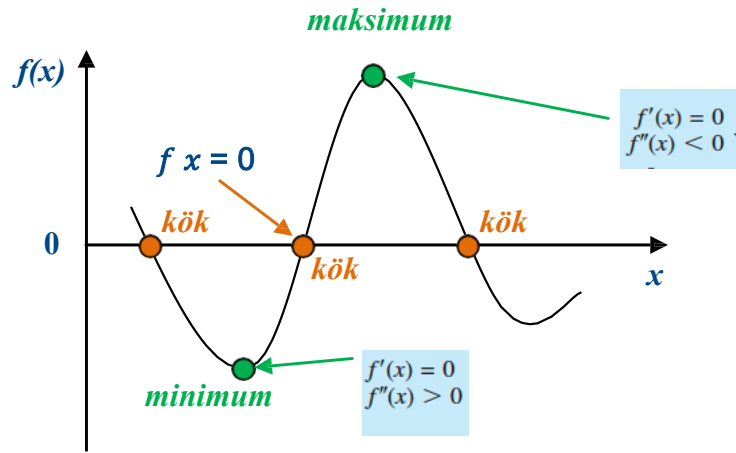


KLASİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

- Her problem için, çeşitli sayısal yöntem seçenekleri ile karşılaşabilirsiniz.
- Hangi problem için hangi yöntemin daha etkili olduğu genellikle kişiseldir ve akıllıca seçim yapmayı gerektirir.
- Klasik mühendislik hesaplamalarının çoğu, analitik çözüme olanak sağlamak için yapılan doğrusallaştırmalara dayanır. Bu tür doğrusallaştırmalar çözüme ulaşmayı kolaylaştırır, ancak sonuçlar belirli oranlarda hata içerir.
- Daha gerçekçi çözümler elde etmek, daha büyük boyutlu (daha zor) problemlerin çözülmesini gerektirir.
- Bir sistemin çalışmasını parametrelerinin bir fonksiyonu olarak saptamak çoğu zaman karmaşık olmayan basit bir iştir.
- Ancak, istenen çalışma şartları belirlendiğinde, parametrelerin olması gereken değerlerini belirlemek genellikle çok daha zordur.!

OPTİMİZASYON

- Kök bulma, fonksiyonun sıfır olduğu noktaların aranmasıdır.
- Optimizasyon ise, minimum veya maksimumun aranmasıdır.



- Bazı basit matematiksel ifadeler için birinci türevi sıfıra eşitleyerek elde edilen denklemi çözmek yeterlidir.
- Ancak, problemlerin türü, türevinin alınıp alınamaması ve kısıtlamalarda dikkate alındığında optimizasyon için geliştirilmiş pek çok yöntem vardır.



OPTİMİZASYON

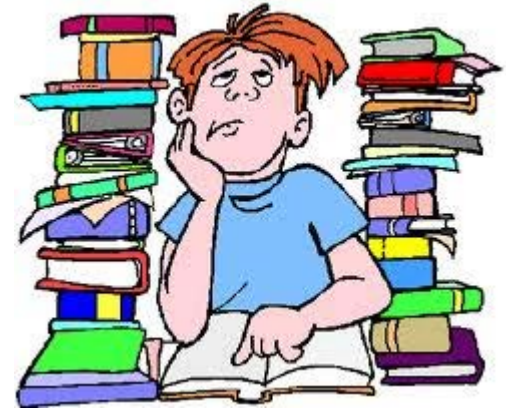
- Optimizasyon bilimin önemli araçlarından biridir.
- Bilimsel olmayan kaba bir yaklaşımla optimizasyon daha iyi yapmaktır (doing better).
- Genellikle verilen bir zaman içerisinde bir problemin mümkün olan en iyi çözümünü bulmaya çalışmak süreci optimizasyon olarak tanımlanır.
- Diğer bir söyleyişle optimizasyon, belirli şartları sağlayacak şekilde bir problemin parametre değerlerinin belirlenmesi işlemi olarak da tanımlanabilir.
- Doğadaki birçok davranış optimizedir.
- Fiziksel sistemler minimum enerjili bir durumda bulunma eğilimindedir.
- Yalıtılmış kimyasal bir sistemde moleküller, elektronlarının toplam potansiyel enerjisi minimum olana kadar birbirleriyle etkileşim halindedir.
- Karıncalar, yuva ve yiyecek kaynağı arasında en kısa yolu takip ederler.
-



OPTİMİZASYON

Öğrenciler ise en az çalışma ile en yüksek notu almayı hedefler.

Bu amaca ulaşmak için ahlaki ve yasal sınırlar içinde gerekli olan en az çaba belirlemeye çalışır.





OPTİMİZASYON

➤ Optimizasyon probleminin temel öğeleri:

- (a) Amaç fonksiyonu,
- (b) Karar değişkenleri,
- (c) Kısıtlar.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Bir Boyutlu Kısıtlamasız Optimizasyon

- ✓ Golden Bölme Araması
- ✓ İkinci Derece İnterpolasyon
- ✓ Newton Yöntemi

Çok Boyutlu Kısıtlamasız Optimizasyon

- ✓ Doğrudan Yöntemler: Rastgele arama, benzer değişim ve model aramaları
- ✓ Gradyen Yöntemler



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Kısıtlamalı Optimizasyon

- ✓ Doğrusal Programlama, grafik çözüm, simpleks yöntemi
- ✓ Doğrusal olmayan kısıtlamalı optimizasyon: zor problemlerdir. Yöntemler sınırlıdır. Genelde, muhtelif indirgemeler ve varsayımlarla kullanılabilen gradyen tabanlı yöntemler kullanılır.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Bir Boyutlu Kısıtlamasız Optimizasyon Golden Bölme Araması

Golden bölme araması, basit, genel amaçlı, tek değişkenli bir arama yöntemidir. Fikir olarak köklerin yerlerini belirleyen ikiye bölme yaklaşımına benzer.

İkiye bölme, tek bir kökü kısıtlayıcı alan bir x_a alt sınır tahmini ve bir $x_{\bar{u}}$ üst sınır tahmini ile belirlenen bir aralık kavramına dayanır. Bu sınırlar arasında bir kökün yer aldığı, $f(x_a)$ ile $f(x_{\bar{u}})$ 'nin farklı işaretli olmasıyla doğrulanabilir. Kök bu aralığın orta noktası olarak tahmin edilir.

$$x_r = \frac{x_a + x_{\bar{u}}}{2}$$

İkiye bölme iterasyonunda son adım daha küçük bir yeni aralık belirlenmesidir. Bu ise fonksiyon, $f(x_r)$ ile aynı işarete hangi sınır x_a veya $x_{\bar{u}}$ değerinde sahip oluyorsa o sınırın değiştirilmesiyle sağlanır. Bu yaklaşımın bir avantajı, eski sınırlardan birinin x_r ile yer değiştirmesidir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

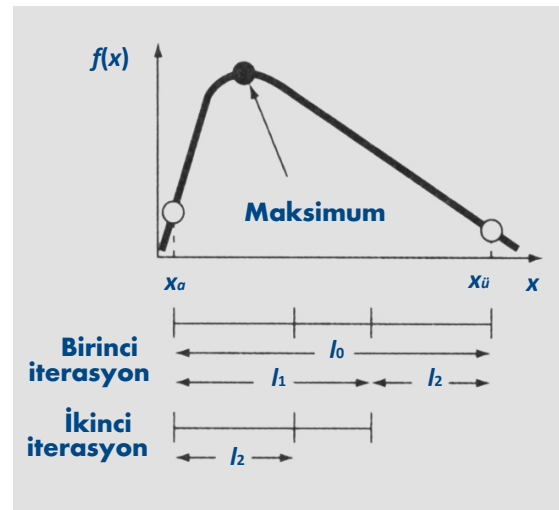
İkiye bölmede olduğu gibi tek bir yanıtı içeren bir aralık tanımlayarak işe başlayalım. Yani aralık tek bir maksimum içermelidir ve bu nedenle bir modlu olarak anılır. İkiye bölmede olduğu gibi aynı terminolojiyi kullanabiliriz. Burada x_a ve x_u böyle bir aralığın sırasıyla alt ve üst sınırlarını tanımlar. Ancak, ikiye bölmenin aksine, aralık içinde bir maksimum belirlemek için başka bir strateji uygulamalıyız. İki fonksiyon değeri (bir işaret değişikliğini ve dolayısıyla bir sıfırı belirlemek için yeterlidir) kullanmak yerine, bir maksimum olup olmadığını anlamak için üç fonksiyon değeri kullanmamız gerekir.

Dolayısıyla aralıkta üçüncü bir nokta seçilmelidir. Sonra da bir dördüncü nokta almalıyız. Şimdi maksimumun ilk üç nokta arasında mı yoksa son üç nokta arasında mı yer aldığını anlamak için oynayabiliriz.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Bu yaklaşımı verimli kılabilmenin yolu ara noktaların akıllıca seçilmesidir. İkiye bölmede olduğu gibi amaç, fonksiyon hesaplamalarının, eski değerlerin yenileriyle değiştirilerek minimuma indirilmesidir.

Bu amaca aşağıdaki iki koşulun gerçekleşmesi istenerek erişilebilir.



$$l_0 = l_1 + l_2$$

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{l_2}{l_1}$$



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Birinci koşul iki ara uzunluğu, ℓ_1 ve ℓ_2 'nin toplamının ilk aralık uzunluğuna eşit olması gerektiğini ifade eder.

İkinci şart ise uzunlukların oranlarının eşit olması gerektiğini söyler.

$$\frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

İfadenin tersi alınır ve $R = \ell_2 / \ell_1$ tanımlanırsa, $1 + R = \frac{1}{R}$
veya

$$R^2 + R - 1 = 0$$

elde edilir ve pozitif kök için çözülebilir.

$$R = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.61803....$$

Antik çağlardan beri bilinen bu değere *golden oranı* denir. Bu oran, optimumun etkili bir şekilde bulunmasını sağladığı için kavramsal olarak geliştirmeye çalıştığımız golden bölme yönteminin anahtar ögesini oluşturur.

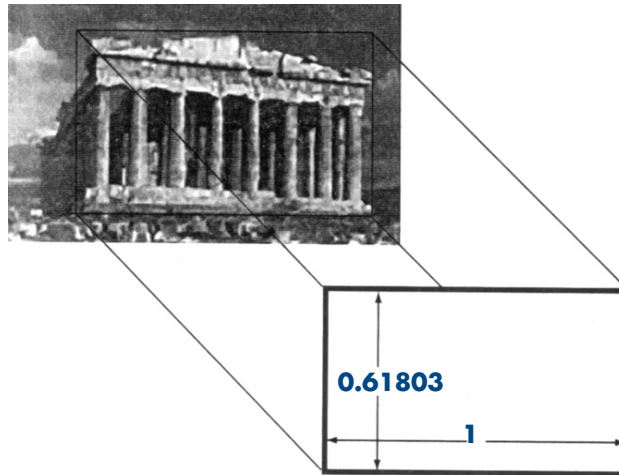


GOLDEN ORANI VE FİBONACCİ SAYILARI

Birçok kültürde belirli sayılara belirli anlamlar verilmiştir. Örneğin batı kültüründe “Uğurlu 7” ve “13’üncü Cuma”yı hepimiz biliriz. Antik Yunanlılar da aşağıdaki sayıya “golden oranı” adını vermişlerdir.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803....$$

Bu oran şekildeki dikdörtgenin geliştirilmesi dahil birtakım amaçlarla kullanılmıştır. Bu oranlar Yunanlılar tarafından estetik olarak mutluluk verici kabul edilmiştir. Başka hususlar yanında tapınaklarının çoğu bu şekli izlemiştir.





GOLDEN ORANI VE FIBONACCI SAYILARI

Golden oranı önemli bir matematik seri olan Fibonacci sayılarıyla ilgilidir:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Burada ilk iki sayıdan sonraki her sayı önceki iki sayının toplamıdır.

Bu sıralama bilim ve mühendisliğin değişik alanlarında karşımıza çıkar.

Fibonacci serisinin ilginç bir özelliği, Fibonacci serisindeki ardışık iki terimin oranıyla ilgilidir, yani

$0/1 = 0$, $1/1 = 1$, $1/2 = 0.5$, $2/3 = 0.667$, $3/5 = 0.6$, $5/8 = 0.625$, $8/13 = 0.615$

ve bu şekilde devam eder.

Sonunda ardışık sayıların oranı golden oranına ulaşır!



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Yöntem, $f(x)$ 'in yerel bir maksimum noktasını kısıkaca alan iki ilk tahmin x_a ve $x_{\ddot{u}}$ ile başlar. Daha sonra iki iç nokta x_1 ve x_2 golden oranına göre seçilir:

$$d = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (x_{\ddot{u}} - x_a)$$

$$x_1 = x_a + d$$

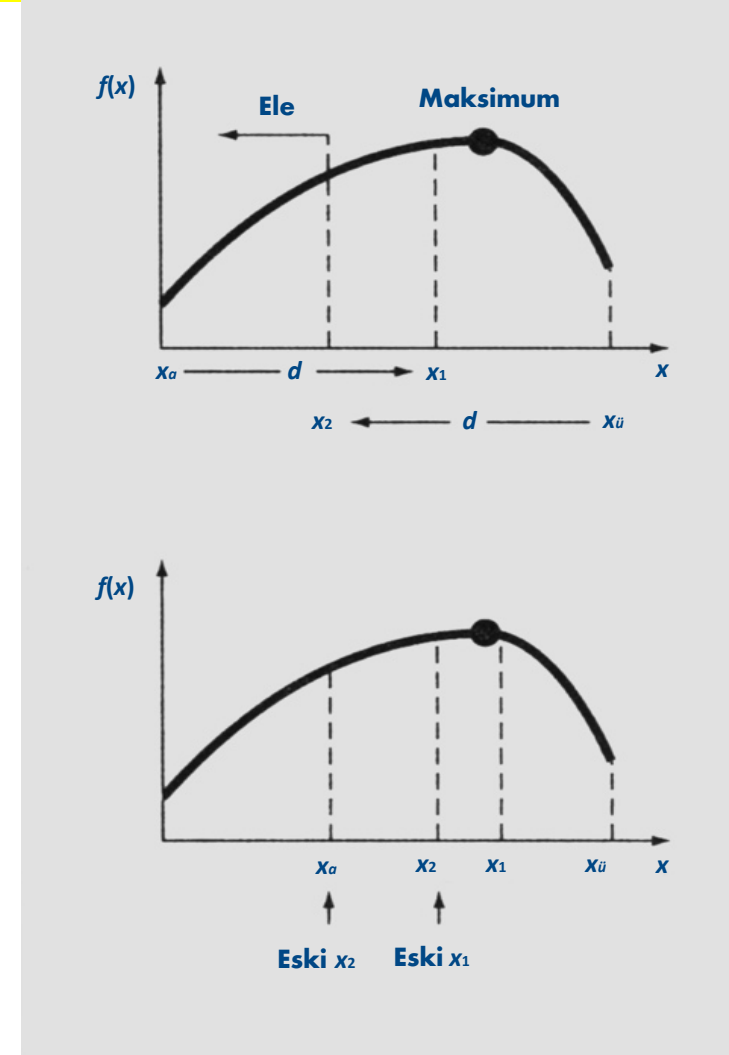
$$x_2 = x_{\ddot{u}} - d$$

Fonksiyon bu iki iç noktada hesaplanır. İki sonuç çıkabilir:

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

- Eğer $f(x_1) > f(x_2)$ ise, x_2 'nin solunda x_a ile x_2 arasında kalan x bölgesi atılabilir, çünkü bu bölge maksimumu içermez. Bu durumda bir sonraki adım için x_2 yeni x_a olur.
- Eğer $f(x_2) > f(x_1)$ ise, x_1 'in sağında x_1 ile $x_{\bar{u}}$ arasında kalan x bölgesi atılabilir. Bu durumda bir sonraki adım için x_1 yeni $x_{\bar{u}}$ olur.

Golden oranını kullanmanın asıl faydası şudur. Orijinal x_1 ve x_2 golden oranı kullanılarak seçildiğinden bir sonraki iterasyondaki bütün fonksiyon değerlerini yeniden hesaplamamız gerekmez.





KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Problem. Golden bölme araması kullanarak,

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

fonksiyonunun $x_a = 0$ ile $x_{\bar{u}} = 4$ aralığında maksimumunu bulun.

Çözüm. Önce iki iç noktayı bulmak için golden oranı kullanılır:

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (x_{\bar{u}} - x_a) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (4 - 0) = 2.472$$

$$x_1 = 0 + 2.472 = 2.472$$

$$x_2 = 4 - 2.472 = 1.528$$

Fonksiyon iç noktalarda hesaplanır:

$$f(x_2) = f(1.528) = 2 \sin(1.528) - \frac{1.528^2}{10} = 1.765$$

$$f(x_1) = f(2.472) = 2 \sin(2.472) - \frac{2.472^2}{10} = 0.63$$



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

$f(x_2) > f(x_1)$ olduğundan, maksimum x_a , x_2 ve x_1 tarafından belirlenen aralıktadır. Dolayısıyla yeni aralık için, alt sınır $x_a = 0$ olarak kalır ve x_1 üst sınır olur, yani $x_{\bar{u}} = 2.472$ 'dir. Ayrıca eski x_2 değeri yeni x_1 olmaktadır, yani $x_1 = 1.528$ 'dir. Dahası $f(x_1)$ 'i yeniden hesaplamamız gerekmez, çünkü bir önceki iterasyonda $f(1.528) = 1.765$ olarak zaten hesaplanmıştı.

Kalan yapılacak işlem, yeni golden oranını ve x_2 'yi hesaplamaktır:

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (x_{\bar{u}} - x_a) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (2.472 - 0) = 1.528$$

$$x_2 = 2.4721 - 1.528 = 0.944$$

Fonksiyonun x_2 'deki değeri $f(0.994) = 1.531$ 'dir. Bu değer fonksiyonun x_1 'deki değerinden küçük olduğundan, maksimum, x_2 , x_1 ve $x_{\bar{u}}$ tarafından belirlenen aralıktadır.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Bu süreç tekrarlanarak aşağıdaki tablodaki değerler bulunabilir:

i	x_l	$f(x_l)$	x_2	$f(x_2)$	x_1	$f(x_1)$	x_u	$f(x_u)$	d
1	0	0	1.5279	1.7647	2.4721	0.6300	4.0000	-3.1136	2.4721
2	0	0	0.9443	1.5310	1.5279	1.7647	2.4721	0.6300	1.5279
3	0.9443	1.5310	1.5279	1.7647	1.8885	1.5432	2.4721	0.6300	0.9443
4	0.9443	1.5310	1.3050	1.7595	1.5279	1.7647	1.8885	1.5432	0.5836
5	1.3050	1.7595	1.5279	1.7647	1.6656	1.7136	1.8885	1.5432	0.3607
6	1.3050	1.7595	1.4427	1.7755	1.5279	1.7647	1.6656	1.7136	0.2229
7	1.3050	1.7595	1.3901	1.7742	1.4427	1.7755	1.5279	1.7647	0.1378
8	1.3901	1.7742	1.4427	1.7755	1.4752	1.7732	1.5279	1.7647	0.0851

Dikkat ederseniz, tabloda her iterasyon için geçerli maksimum boyanmıştır. Sekizinci iterasyondan sonra maksimum, $x = 1.4427$ 'de, fonksiyonun değerinin 1.7755 olduğu noktadadır. Böylece sonuç doğru değer olan $x = 1.4276$ 'da 1.7757 değerine yakınsamaktadır.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Bir iterasyon tamamlandığı zaman, optimum iki aralıktan birinde olacaktır. Eğer x_2 optimum fonksiyon değeriye, alt aralık olan (x_a, x_2, x_1) 'de yer alacaktır. Eğer x_1 optimum fonksiyon değeriye, üst aralık olan $(x_2, x_1$ ve $x_{\bar{u}})$ 'de yer alacaktır. İç noktalar simetrik olduklarından hatayı tanımlamak için herhangi birisi kullanılabilir.

Üst aralığa bakarsak, eğer gerçek değer en solda olsaydı, tahminden en büyük uzaklık

$$\begin{aligned}x_a &= x_1 - x_2 \\&= x_a + R(x_{\bar{u}} - x_a) - x_{\bar{u}} + R(x_{\bar{u}} - x_a) \\&= (x_a - x_{\bar{u}}) + 2R(x_{\bar{u}} - x_a) \\&= (2R - 1)(x_{\bar{u}} - x_a)\end{aligned}$$

veya $0.236 (x_{\bar{u}} - x_a)$ olurdu.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Eğer gerçek değer en sağda olsaydı, tahminden en büyük uzaklık,

$$\begin{aligned}x_b &= x_{\ddot{u}} - x_1 \\&= x_{\ddot{u}} - x_a - R(x_{\ddot{u}} - x_a) \\&= (1 - R)(x_{\ddot{u}} - x_a)\end{aligned}$$

veya $0.3822(x_{\ddot{u}} - x_a)$ olacaktı.

Demek ki bu durum maksimum hatayı verecektir. Bu sonuç o iterasyon için bulunan optimum değer x_{opt} ile normalize edilebilir ve

$$\varepsilon_a = (1 - R) \left| \frac{x_{\ddot{u}} - x_a}{x_{\text{opt}}} \right| \%100$$

bulunur. Bu tahmin iterasyonları durdurmak için bir dayanak oluşturur.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

İkinci Derece İnterpolasyon

İkinci derece interpolasyon, ikinci derece bir polinomun optimum yakınlarında $f(x)$ 'in şekline genellikle iyi bir yaklaştırma oluşturduğu gerçeğinden yararlanır.

İki noktayı birleştiren sadece tek bir doğru vardır, tıpkı bunun gibi, üç noktayı da birleştiren sadece tek bir ikinci-derece polinom veya parabol vardır.

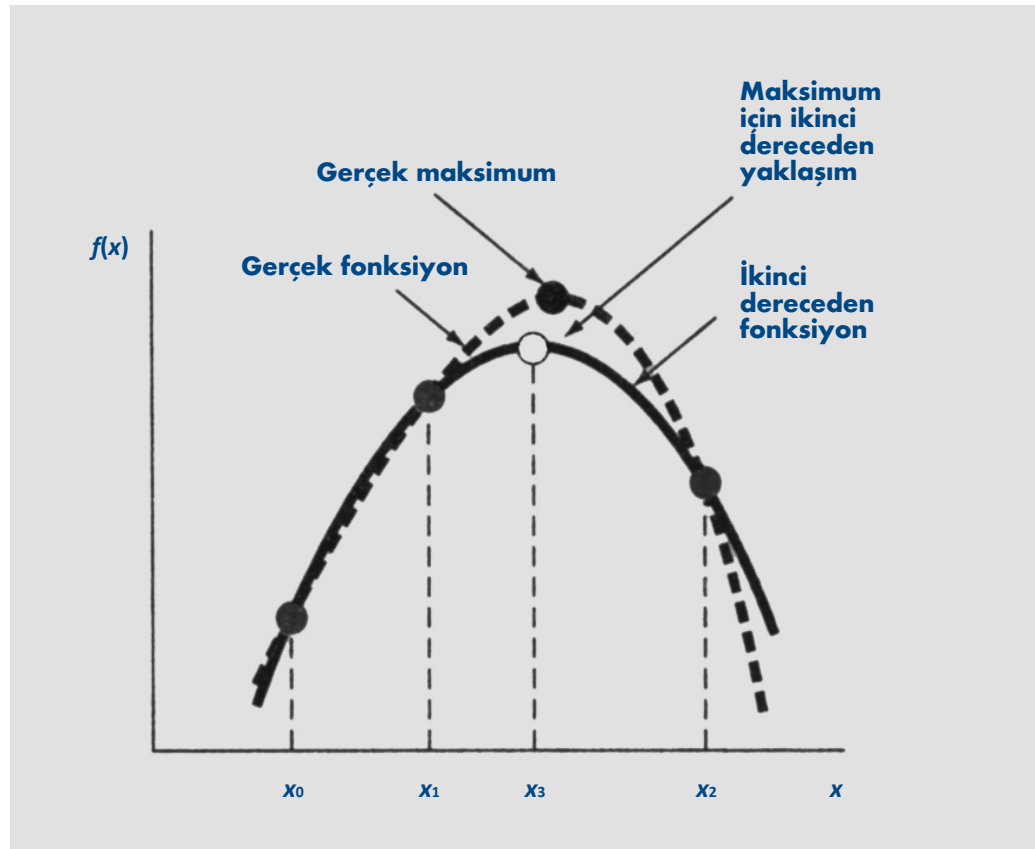
Dolayısıyla, eğer bir optimumu birlikte kısıkaca alan üç nokta varsa, bu üç noktaya bir parabol uydurabiliriz. Daha sonra türevini alıp sıfıra eşitler ve çözerek optimum x 'in bir tahminini elde edebiliriz.

Bazı cebirsel işlemlerden sonra sonuç,

$$x_3 = \frac{f(x_0)(x_1^2 - x_2^2) + f(x_1)(x_2^2 - x_0^2) + f(x_2)(x_0^2 - x_1^2)}{2f(x_0)(x_1 - x_2) + 2f(x_1)(x_2 - x_0) + 2f(x_2)(x_0 - x_1)}$$

burada x_0, x_1, x_2 ilk tahminlerdir ve x_3 , tahminlere uydurulan ikinci derece eğrinin maksimum değerine karşı gelen x değeridir.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ





KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Problem. İkinci derece interpolasyonla $x_0=0$, $x_1=1$ ve $x_2=4$ ilk tahminlerini kullanarak

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

fonksiyonunun maksimumunu yaklaşık olarak bulun.

Çözüm. Her üç tahmindeki fonksiyon değerleri hesaplanabilir:

$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = 1$	$f(x_1) = 1.5829$
$x_2 = 4$	$f(x_2) = -3.1136$

$$x_3 = \frac{0(1^2 - 4^2) + 1.5829(4^2 - 0^2) + (-3.1136)(0^2 - 1^2)}{2(0)(1-4) + 2(1.5829)(4-0) + 2(-3.1136)(0-1)} = 1.5055$$

Bu noktadaki fonksiyon değeri $f(1.5055) = 1.7691$ 'dir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Daha sonra golden bölme aramasındakine benzer bir strateji uygulanarak hangi noktanın elenmesi gerektiği belirlenebilir. Yeni noktadaki fonksiyon değeri ara noktadaki (x_1) değerinden daha büyük olduğundan ve yeni nokta ara noktanın sağında olduğundan, alt tahmin x_0 elenir. O halde bir sonraki iterasyon için,

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & f(x_0) = 1.5829 \\ x_1 = 1.5055 & f(x_1) = 1.7691 \\ x_2 = 4 & f(x_2) = -3.1136 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1.5829(1.5055^2 - 4^2) + 1.7691(4^2 - 1^2) + (-3.1136)(1^2 - 1.5055^2)}{2(1.5829)(1.5055 - 4) + 2(1.7691)(4 - 1) + 2(-3.1136)(1 - 1.5055)} \\ &= 1.4903 \end{aligned}$$

Bu noktadaki fonksiyon değeri $f(1.4903) = 1.7714$ 'tür.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Bu süreç tekrarlanarak tablodaki değerler bulunabilir:

i	x_0	$f(x_0)$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_3	$f(x_3)$
1	0.0000	0.0000	1.0000	1.5829	4.0000	-3.1136	1.5055	1.7691
2	1.0000	1.5829	1.5055	1.7691	4.0000	-3.1136	1.4903	1.7714
3	1.0000	1.5829	1.4903	1.7714	1.5055	1.7691	1.4256	1.7757
4	1.0000	1.5829	1.4256	1.7757	1.4903	1.7714	1.4266	1.7757
5	1.4256	1.7757	1.4266	1.7757	1.4903	1.7714	1.4275	1.7757

Böylece beş iterasyon sonra sonuç hızlı bir şekilde gerçek değer olan $x = 1.4276$ 'da 1.7757 değerine yakınsar.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Newton Yöntemi

Newton-Raphson yöntemi, $f(x) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyonun kökünü bulan açık bir yöntemdir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$g(x) = f'(x)$ şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayarak $f(x)$ 'in optimumunu bulmak için benzer bir açık yaklaşım kullanılabilir. Böylece, aynı optimum değer x^* , her iki fonksiyonu da sağlayacaktır:

$$f'(x^*) = g(x^*) = 0$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

$f(x)$ 'in maksimum veya minimumunu bulmak için bir teknik olarak kullanılabilir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Newton yöntemi, Newton-Raphson'a benzeyen açık bir yöntemdir, çünkü optimumu kısıkaca alan ilk tahminler gerektirmez. Ayrıca diğer yöntemde olduğu gibi ıraksayabilme sakıncasını da taşır. Son olarak, tekniğin istenen sonuca yakınsadığını doğrulamak için ikinci türevin işaretinin doğru olduğunu kontrol etmek genellikle iyi bir fikirdir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Problem. Newton yöntemini ve $x_0 = 2.5$ ilk tahminini kullanarak,

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

fonksiyonunun maksimumunu bulun.

Çözüm. Fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri

$$f'(x) = 2 \cos x - \frac{x}{5}$$

$$f''(x) = -2 \sin x - \frac{1}{5}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2 \cos x_i - x_i/5}{-2 \sin x_i - 1/5}$$



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

İlk tahmin yerine konulursa

$$x_1 = 2.5 - \frac{2 \cos 2.5 - 2.5/5}{-2 \sin 2.5 - 1/5} = 0.99508$$

bulunur, bu noktada fonksiyonun değeri 1.57859'dur. İkinci iterasyon sonunda,

$$x_1 = 0.995 - \frac{2 \cos 0.995 - 0.995/5}{-2 \sin 0.995 - 1/5} = 1.46901$$

elde edilir, bu noktada fonksiyonun değeri 1.77385'tir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Bu süreç tekrarlanarak aşağıdaki tablodaki değerler bulunabilir:

i	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2.5	0.57194	-2.10229	-1.39694
1	0.99508	1.57859	0.88985	-1.87761
2	1.46901	1.77385	-0.09058	-2.18965
3	1.42764	1.77573	-0.00020	-2.17954
4	1.42755	1.77573	0.00000	-2.17952

Böylece dört iterasyon sonra sonuç hızlı bir şekilde gerçek değere yakınsar. Newton yöntemi bazı uygulamalarda çok iyi sonuçlar verse de, türevlerin kolayca hesaplanamadığı durumlarda pratik değildir. Bu gibi durumlarda kullanılabilecek, türev hesaplaması içermeyen başka yaklaşımlar vardır. Örneğin, türev hesaplarında sonlu fark yaklaşımı kullanılarak, Newton yönteminin sekant yöntemine benzeyen bir versiyonu geliştirilebilir.

Birleşik (hibrit) teknikler, optimumdan uzakta *kapalı yaklaşımları*, optimuma yakinken *açık yöntemleri* kullanarak her ikisinin güçlü yanlarından yararlanmaya çalışırlar.



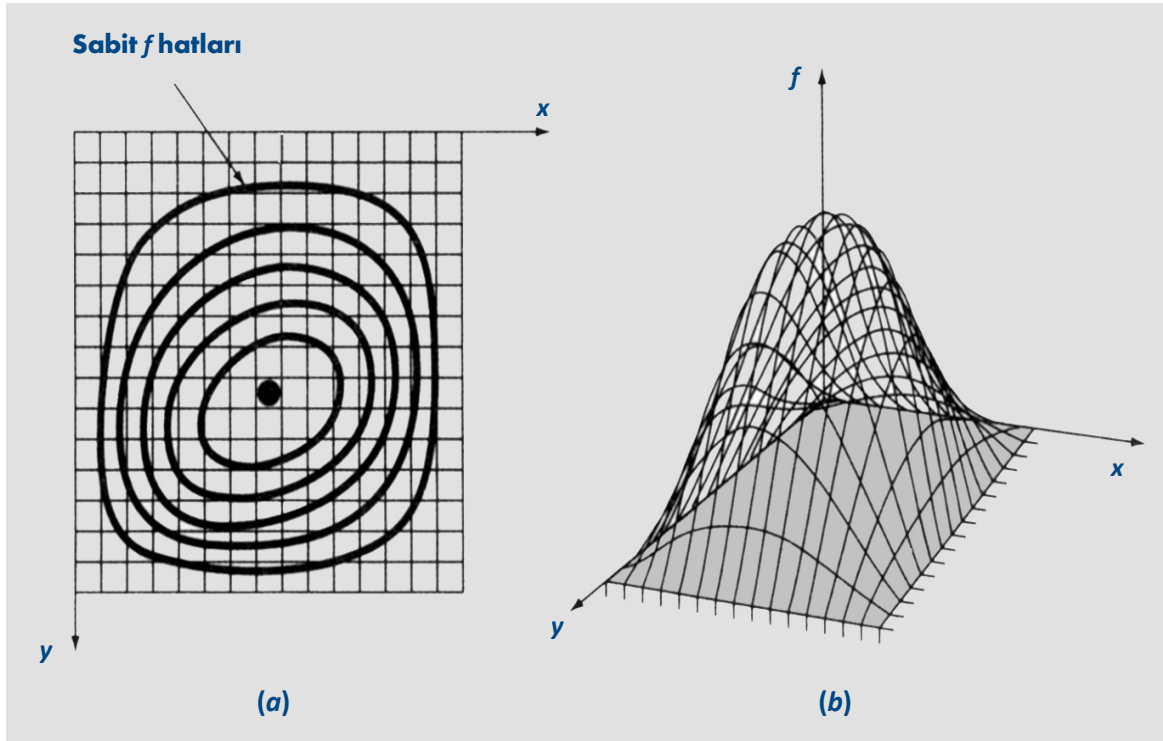
KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Çok Boyutlu Kısıtlamasız Optimizasyon

Doğrudan Yöntemler - Seçkisiz (Random) Arama

- Türev hesabı gerektirmeyen yaklaşımlara *gradyensiz* veya *doğrudan yöntemler* adı verilir.
- Basit kaba kuvvet yaklaşımlarından başlayıp fonksiyonun doğasından yararlanan daha incelikli tekniklere kadar değişen bir yelpaze oluşturur.
- Kaba kuvvet yaklaşımlarına basit bir örnek seçkisiz arama yöntemidir.
- Adından da anlaşılacağı gibi yöntem, bağımsız değişkenin seçkisiz olarak seçilen değerlerinde fonksiyonu tekrar tekrar hesaplar. Eğer yeteri kadar örnekleme yapılmışsa, sonunda optimumun yeri belirlenir.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ



İki boyutlu aramaları görsel olarak ifade etmenin en somut yolu, bunu bir dağa tırmanma (maksimizasyon) veya bir vadiye inme (minimizasyon) gibi düşünmektir.

(a)'da gösterilen 2 boyutlu topografik harita

(b)'deki 3 boyutlu dağa karşı gelmektedir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK

Problem. Bir seçkisiz sayı üretici kullanarak,

$$f(x,y) = y - x - 2x^2 - 2xy - y^2$$

fonksiyonunun maksimumunu, $x = -2$ 'den 2 'ye ve $y = 1$ 'den 3 'e değerleriyle sınırlı bölgede bulun.

Çözüm. Seçkisiz sayı üreticileri tipik olarak 0 ile 1 arasında değerler üretir. Böyle bir sayıyı r ile gösterirsek, x_a ile $x_{\bar{u}}$ aralığında seçkisiz olarak x sayıları üretmek için aşağıdaki formül kullanılabilir:

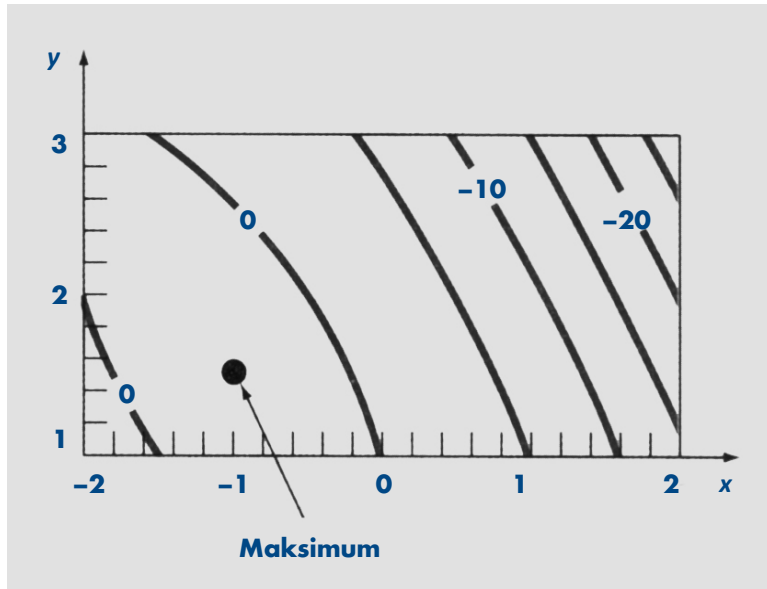
$$x = x_a + (x_{\bar{u}} - x_a) r$$

$$x = -2 + (2 - (-2)) r = -2 + 4r$$

$$y = y_a + (y_{\bar{u}} - y_a) r = 1 + (3 - 1) r = 1 + 2r$$



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ-ÖRNEK



Maksimumu $x = -1$ ve $y = 1.5$ 'te

İterasyonlar	x	y	f(x, y)
1000	-0.9886	1.4282	1.2462
2000	-1.0040	1.4724	1.2490
3000	-1.0040	1.4724	1.2490
4000	-1.0040	1.4724	1.2490
5000	-1.0040	1.4724	1.2490
6000	-0.9837	1.4936	1.2496
7000	-0.9960	1.5079	1.2498
8000	-0.9960	1.5079	1.2498
9000	-0.9960	1.5079	1.2498
10000	-0.9978	1.5039	1.2500

```
For j = 1 To n
  x = - 2 + 4 * Rnd
  y = 1 + 2 * Rnd
  fn = y - x - 2 * x ^ 2 - 2 * x * y - y ^ 2
  If fn > maxf Then
    maxf = fn
    maxx = x
    maxy = y
  End If
Next j
```



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

- Türevi alınamayan ve süreksiz fonksiyonlar için bile çalışır.
- Her zaman yerel optimum değil de global optimumu bulur.
- En önemli eksikliği, bağımsız değişken sayısı arttıkça uygulamak için gereken çabanın çok sıkıntı verici olmaya başlamasıdır. Ayrıca verimli de değildir, çünkü incelenen fonksiyonun davranışını dikkate almaz.



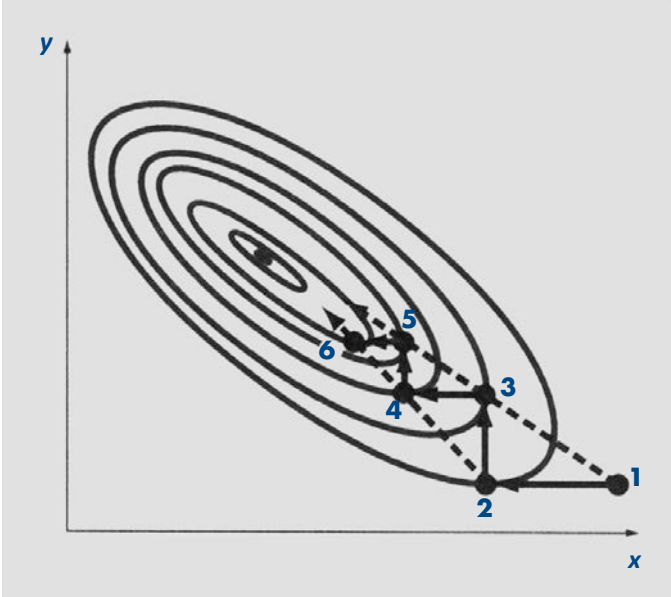
KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Çok Boyutlu Kısıtlamasız Optimizasyon

Doğrudan Yöntemler - Benzer Değişim ve Model Aramaları

- *Benzer değişim arama* yönteminin temel stratejisi, yaklaşımı iyileştirirken her defasında değişkenlerden sadece birini değiştirmek, diğerlerini sabit tutmaktır.
- Sadece bir değişken değiştirildiğinden, problem, çeşitli yöntemlerle çözülebilen, bir dizi, bir boyutlu aramaya indirgenir.
- 1 noktasından başlayalım ve y 'yi sabit tutarak 2 noktasındaki maksimuma ulaşınca kadar x eksenini boyunca hareket edelim.
- 2 noktasının bir maksimum olduğunu, izlediğimiz yörüngenin bu noktada çizgilerden birisine dokunmasından anlarız.
- Daha sonra x 'i sabit tutarak y eksenini boyunca 3 noktaya doğru ilerleriz. Bu süreci tekrarlayarak 4, 5, 6, vd. noktalarını elde ederiz.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ



Benzer
aramasının
yapıldığının
gösterimi.

değişim
nasıl
grafik

- Maksimuma doğru yavaş yavaş ilerliyorsak da, maksimuma yaklaştıkça daralan yamaçta ilerlerken aramanın etkililiği azalır.
- Dikkat ederseniz 1-3, 3-5 veya 2-4, 4-6 noktalarını alternatif olarak birleştiren doğrular maksimuma doğru genel yönü gösterirler. Bu yörüngeler bize yamaç üzerinden doğrudan maksimuma ulaşma olanağını verir. Bu yörüngelere *model yönleri* denir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

- Optimumu etkili bir şekilde bulmak için model yönler fikrinden yararlanan biçimsel algoritmalar vardır. Bu algoritmaların en tanınmış *Powell* yöntemidir.
- Yöntem, eğer 1 ve 2 noktaları bir boyutlu bir aramayla aynı doğrultuda ancak farklı başlangıç noktalarından başlayarak elde edilmişse, 1'den 2'ye doğru olan yönün maksimumu göstereceği gözlemine dayanır. Bu doğrulara *eşlenik yönler* adı verilir.
- 2 noktasının bir maksimum olduğunu, izlediğimiz yörüngenin bu noktada çizgilerden birisine dokunmasından anlarız.
- Daha sonra x 'i sabit tutarak y eksenini boyunca 3 noktaya doğru ilerleriz. Bu süreci tekrarlayarak 4, 5, 6, vd. noktalarını elde ederiz.
- Eğer $f(x,y)$ ikinci derece bir fonksiyonsa, eşlenik yönler boyunca yapılacak bir dizi arama, sonlu sayıda adımda, başlangıç noktasından bağımsız olarak tam yakınsayacaktır.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

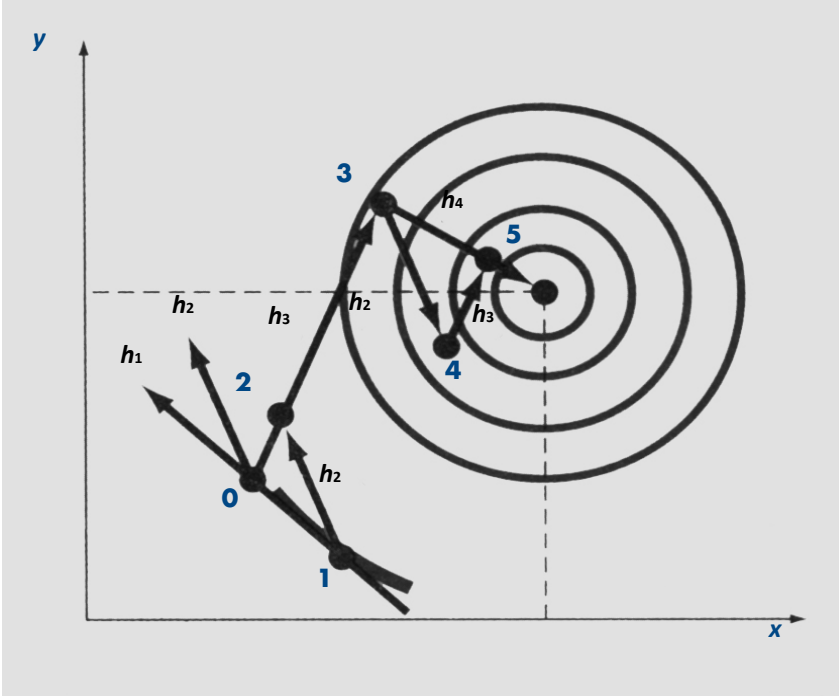
➤ Genelde doğrusal olmayan bir fonksiyon, kabul edilebilir ölçülerde ikinci derece bir fonksiyonla yaklaşık olarak ifade edilebildiğinden, eşlenik yönler dayalı yöntemler çoğunlukla etkindirler ve optimuma yaklaşırken gerçekte ikinci derece yakınsaktır.

➤ Powell yönteminin basitleştirilmiş bir şekli;

$$f(x,y) = c - (x - a)^2 - (y - b)^2$$

fonksiyonuna grafik olarak uygulayarak maksimumunu bulmaya çalışalım, burada a, b ve c pozitif sabitlerdir.

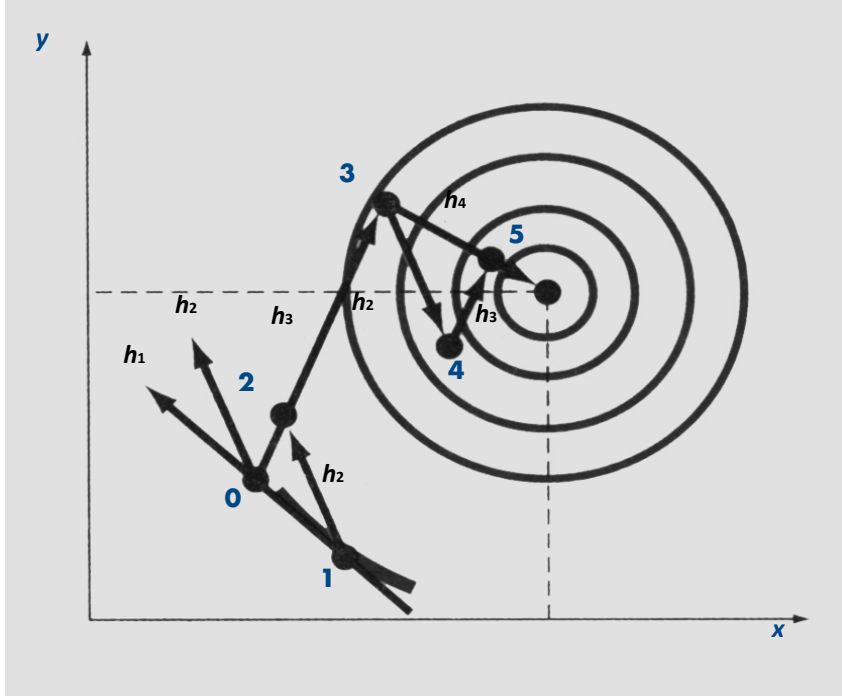
KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ



Powell yöntemi

Aramaya 0 noktasından h_1 ve h_2 yönlerini kullanarak başlayalım. h_1 ve h_2 'nin eşlenik yönler olması gerekmemektedir. Sıfırdan itibaren h_1 yönünde 1 noktasında bir maksimum belirleninceye kadar ilerleyin. Daha sonra 1 noktasından h_2 yönünde aramaya başlayarak 2 noktasını bulun. Şimdi de 0 ve 2 noktalarını birleştirerek yeni bir h_3 yönü oluşturun. Bu yönde 3 noktasındaki maksimum belirleninceye kadar aramaya devam edin. Daha sonra 3 noktasından h_2 yönünde arayarak 4 noktasındaki maksimumu bulun. 4 noktasından başlayarak yine h_3 yönünde arayarak 5 noktasına ulaşın.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ



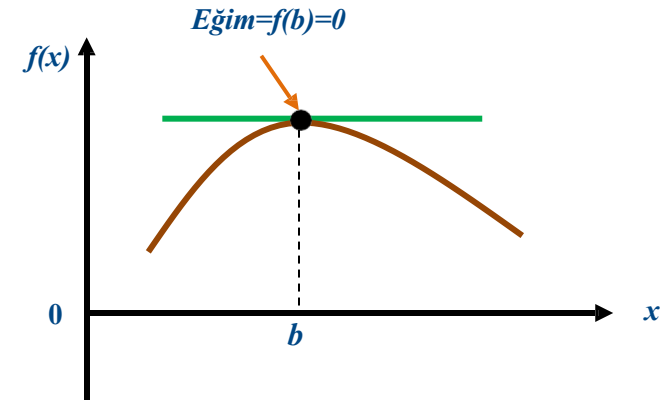
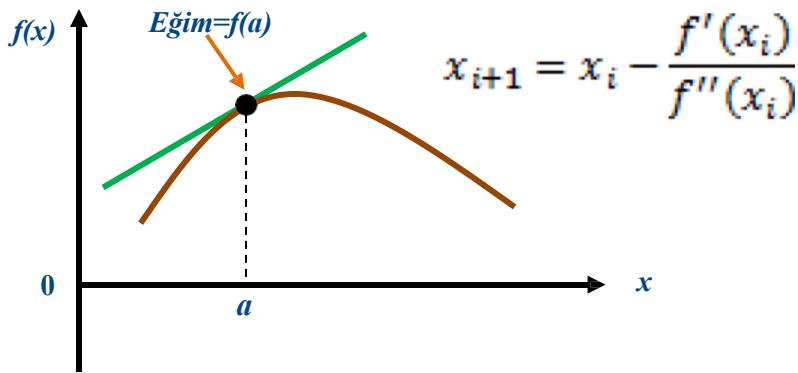
Powell yöntemi

Şimdi, 5 ve 3 noktaları farklı noktalardan başlanarak h_3 yönünde arama yapılarak elde edilmişlerdir. Powell, h_4 (3 ve 5 noktaları kullanılarak oluşturulmuştur) ve h_3 yönlerinin eşlenik yönler olduğunu göstermiştir. Böylece, 5 noktasından başlayarak h_4 yönünde arama yapılırsa doğrudan maksimum noktaya geliriz.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Çok Boyutlu Kısıtlamasız Optimizasyon Gradyen Yöntemler

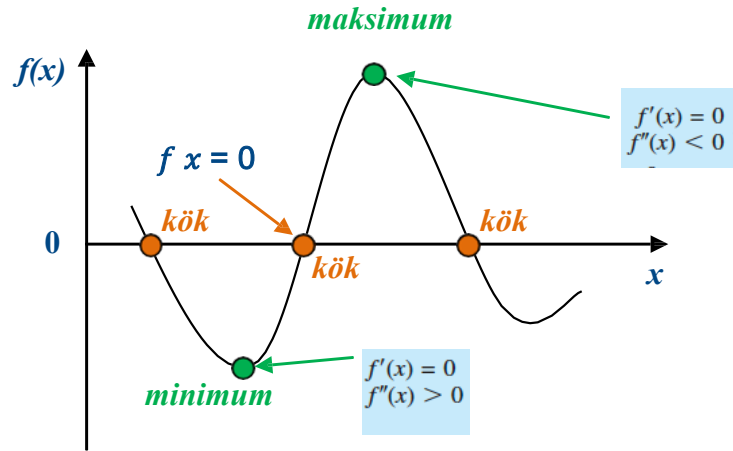
- Gradyen yöntemler optimumu bulmak için türev bilgisini kullanır.
- Bir boyutlu bir fonksiyonun birinci türevi, diferansiyeli alınan fonksiyonun eğimini ifade eder. Bu bilgi optimizasyon için anlamlıdır. Eğimin pozitif olması, bağımsız değişkeni artırmanın fonksiyonun değerini artıracacağı anlamına gelir



- Birinci türev, optimum noktasına ne zaman erişileceğini de söyler. Çünkü burası türevin sıfıra gittiği noktadır.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

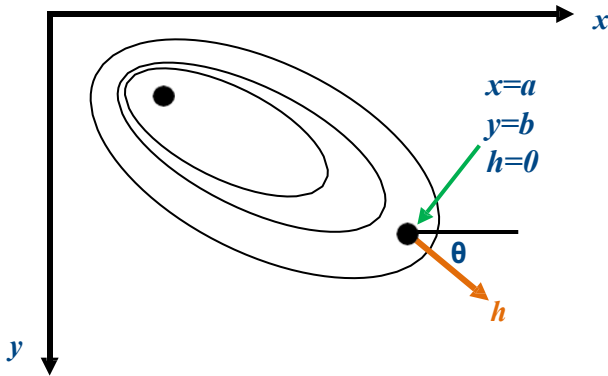
- Ayrıca, ikinci türevin işareti ilerleyişin minimuma mı yoksa maksimuma mı ulaşıldığını ifade eder.



- Bu bilgiler bir boyutlu aramalarda doğrudan işe yarar.
- Ancak, çok boyutlu aramaları tam olarak anlayabilmek için önce birinci ve ikinci türevlerin çok boyutlu bağlamda nasıl ifade edildiğine bakılmalıdır.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

- İki boyutlu $f(x,y)$ fonksiyonu bir dağın üzerindeki konumunuza göre deniz seviyesinden yüksekliğinizi ifade etsin. Dağın üzerinde (a,b) konumunda olduğunuzu ve herhangi bir doğrultudaki eğimi bulmak istediğimizi varsayalım.
- Yönü belirlemenin bir yolu, tanımı, x eksenini ile θ açısı yapan yeni bir h eksenini boyunca yapmaktır. Bu yeni eksen boyunca yükseklik yeni bir $g(h)$ fonksiyonu olarak düşünülebilir.



Konumunuzu bu eksenin başlangıcı olarak tanımlarsanız ($h=0$), bu yöndeki eğim $g'(0)$ olacaktır. **Yöne bağlı türev** olarak verilen bu eğim x ve y eksenleri boyunca alınan kısmi türevlerle hesaplanabilir.

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

Kısmi türevler $x=a$ ve $y=b$ noktasında hesaplanmıştır.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

- Amacımız bir sonraki adımda en fazla yükseltiyi bulmak olduğunu varsayarsak, **En dik çıkış hangi yöndedir?** Bu sorunun yanıtı gradyendir! Bu aynı zamanda $f(x,y)$ fonksiyonunun $x=a$ ve $y=b$ noktasındaki yöne bağlı türevini verir.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j$$
$$\nabla f = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{array} \right\}$$

- Gradyeni nasıl kullanırız? Gradyen bize, en hızlı şekilde yükseklik kazanmak istiyorsak, hangi yöne ilerlememiz gerektiğini ve bu yönde gidersek ne kadar yükselti kazanacağımızı söyler.
- Ancak bu strateji bizi her zaman tepeye ulaştıramaz!



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Problem. Gradyeni kullanarak,

$$f(x,y) = xy^2$$

fonksiyonu için (2,2) noktasında en hızlı artış yönünü hesaplayın.

Çözüm. İlk önce bulunduğumuz yükseklik

$$f(2,2) = 2 (2)^2 = 8$$

Kısmi türevler,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 = 2^2 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 2(2)(2) = 8$$

Ardından bunlar kullanılarak gradyen belirlenebilir:

$$\nabla f = 4i + 8j$$

Bu vektör fonksiyonun topografik haritası üzerine çizilebilir.



KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

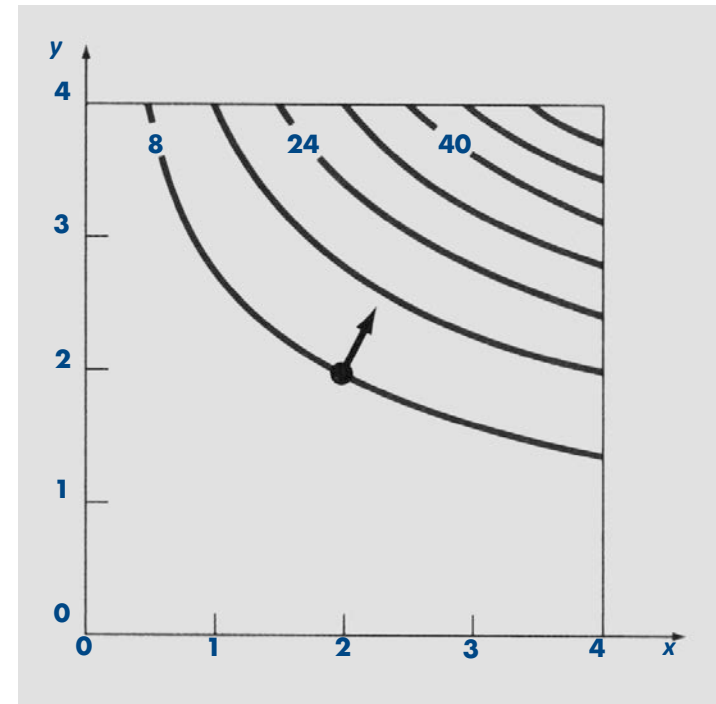
Harita bize hemen seçmemiz gereken yönün x eksenine göre,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{8}{4} \right) = 1.107 \text{ radyan } (= 63.4^\circ)$$

olması gerektiğini söyler. ∇f 'nin büyüklüğü olan bu yöndeki eğim,

$$\sqrt{4^2 + 8^2} = 8.944$$

şeklinde hesaplanabilir.
Böylece, ilk adımımızda,
bu en dik yolda ilerlediğimiz
her birim uzunluk için başlangıçta 8.944 birim
yükseklik kazanacağız.





KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

$$g'(0) = 4 \cos(1.107) + 8 \sin(1.107) = 8.944$$

Aynı sonucu elde ederiz.

Herhangi bir başka yönde, örneğin

$$\theta = 1.107/2 = 0.5235 \text{ için,}$$

$$g'(0) = 4 \cos(0.5235) + 8 \sin(0.5235) = 7.608$$

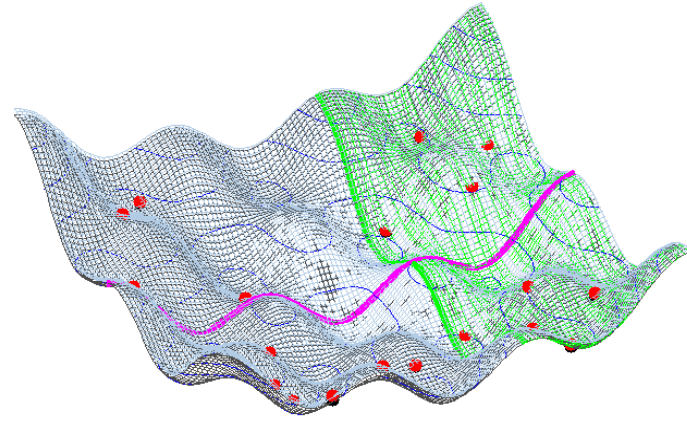
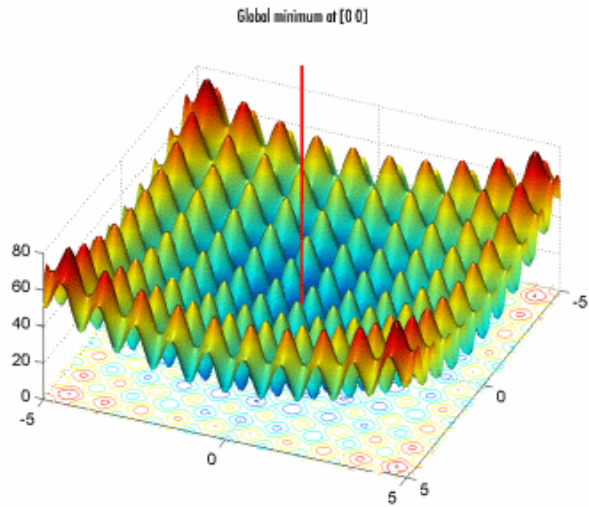
gibi daha küçük bir eğim bulunur.

Öne doğru ilerledikçe, en dik yolun hem yönü hem de büyüklüğü değişecektir. Bu değişiklikler her adımda gradyen kullanılarak nicelleştirilebilir ve tırmanma yönünüz ona göre değiştirilebilir.

Gösterildiği gibi en hızlı artış yönü (2, 2) koordinatında eşyükselti çizgisine dik veya ortogonaldır. Bu, gradyenin genel bir özelliğidir.

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

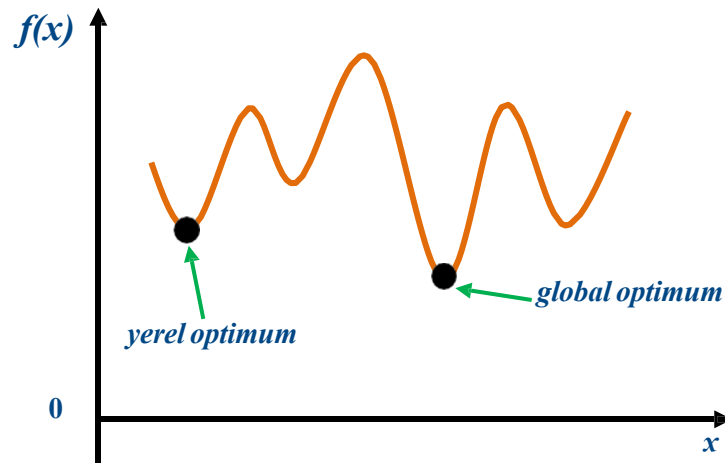
- Çok şanslı değilseniz ve doğrudan tepeyi gösteren bir yamaçtan başlamadıysanız, hareket eder etmez yolunuz en hızlı artış yönünden sapacaktır. Nasıl üstesinden gelinebilir?



- Sabit bir doğrultuda artış duruncaya kadar ilerlenip (yol düzleşene kadar), yeni bir yön ve gradyen hesaplanarak devam edilebilir (*en hızlı artış yöntemi*).

KLASİK OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

- Genellikle gradyen veya Newton gibi yöntemler bulunulan bölgenin optimumuna (yerel optimum) hızla yakınsamasına rağmen, genellikle ıraksama sorunu yaşarlar.





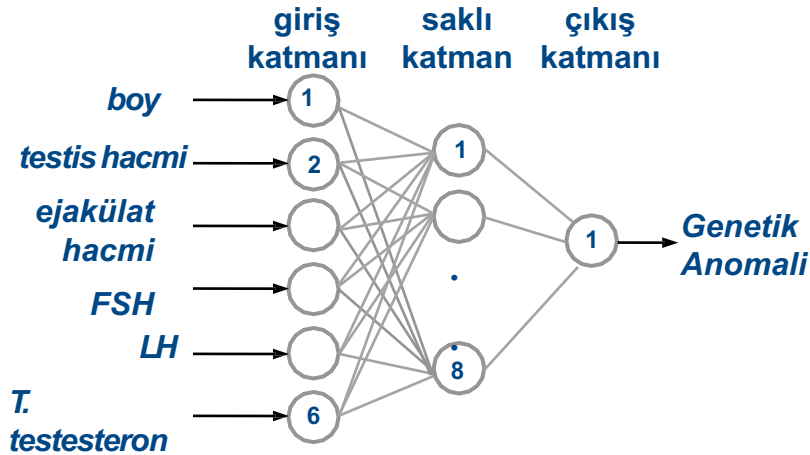
OPTİMİZASYON METOTLARININ SINIFLANDIRILMASI

- Optimizasyon metotları iki düzeyde tanımlanır; problem düzeyinde ve problem üstü düzeyde (meta level).
- Problem düzeyinde optimizasyon işleminde, bir problem kümesi içerisindeki her problem tek tek diğerlerinden bağımsız olarak çözülür.
- Problem üstü düzeyde çeşitli problemlerden oluşan bir küme bir bütün olarak göz önüne alınarak optimum çözüm aranır.
- Problem üstü düzeyde, optimizasyon metotları, problem düzeyindeki optimizasyon metotlarını yönlendirmek amacıyla da kullanılır.
- Örneğin, Problem düzeyinde optimizasyonda yapay sinir ağının mimarisi (nöron sayısı, her bir nöronun aktivasyon fonksiyonu ve bağlantı yapısı v.b.) probleme göre tasarımcı tarafından seçilir ve sabittir. Optimizasyon işlemi ile sadece bağlantıların katsayıları değiştirilebilir.



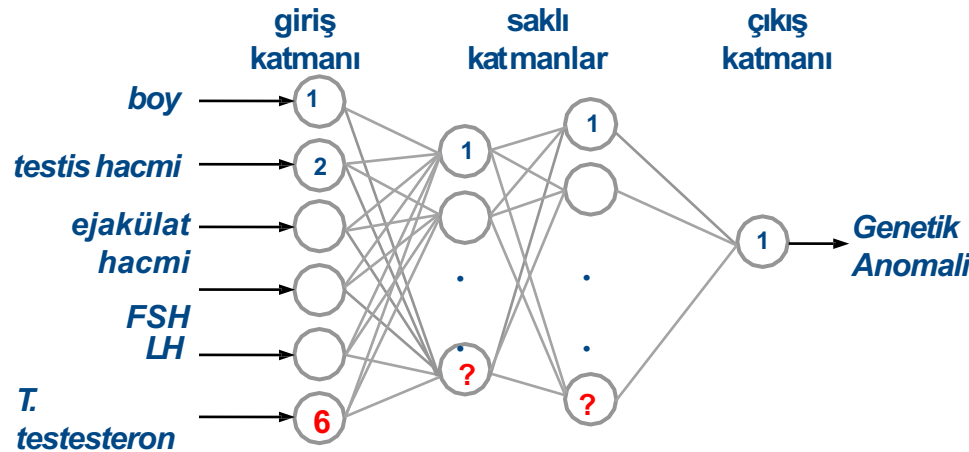
OPTİMİZASYON METOTLARININ SINIFLANDIRILMASI

➤ Bu durumda nöronlar arası bağlantı ağırlıkları birer parametre, yapay sinir ağının çıkışı ve olması istenen çıkış arasındaki fark ise minimum yapılması gereken bir amaç fonksiyonu olarak düşünülebilir.



OPTİMİZASYON METOTLARININ SINIFLANDIRILMASI

- Problem üstü düzeyde optimizasyonda ise, yapay sinir ağının mimarisi sabit değildir.
- Örneğin yapay sinir ağı ileri beslemeli veya geri beslemeli olabilir. Aktivasyon fonksiyonu her bir nöron için farklı olabilir.
- Probleme göre ağın yapısı optimizasyon işleminin bir parçası olarak algoritma tarafından tayin edilir ve değiştirilir.





METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

- Optimizasyon algoritmalarında kullanılan bir çok arama stratejisi vardır:
 - Yorucu (exhaustive),
 - Rasgele (random),
 - Açgözlü (greedy),
 - Tepe tırmanma (hill climbing),
 - Sezgisel (heuristic),
 - Belirleyici (deterministic)
 - İhtimalci (stochastic)



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

- **Yorucu arama**, giriş veri kümesinin tüm kombinasyonları test edilerek araştırma uzayında en iyi çözüm aranır. Pratikte uygulanması zor bir metottur.
- **Rasgele arama**, giriş veri kümesinin rasgele üretilen kombinasyonları makul bir çözüm bulununcaya kadar denenir. Küresel çözüme yakınsama özelliği yoktur. Rasgele arama metodu genellikle kısa zamanda iyi çözümler bulamaz.
- **Açgözlü arama**, rasgele aramaya benzemektedir. Giriş veri kümesinin rasgele üretilen kombinasyonlarını dener ve iyi bir çözüm bulduğunda bunu saklar. Daha sonra bu iyi çözüm etrafında araştırmaya devam eder. Bu metotta açgözlü kelimesi bölgesel ölçekte daha iyi çözümü kabul etmek yönünde tercihin yüksek oluşunu ifade eder. Bölgesel ölçekte aramayı kötüye götüren çözümler kabul edilmez. Oysa küresel optimum kimi zaman yeni araştırma yönü olarak bölgesel ölçekte kötü olan çözümleri kabul etmekle bulanabilmektedir. Açgözlü arama hızlı sonuç vermesine karşın küresel optimumu bulma bakımından yetersizdir.



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

➤ **Tepe tırmanma metodu**, bölgesel optimumu aşabilmek için araştırma yönü olarak bölgesel optimum etrafında daha kötü çözümlerin kabul edilmesi gerektiğini temel alır. Bu metotta arama, hata veya maliyet değerini daha yükseğe çıkaran tarafa yönlendirildiği için arama işlemi tepe tırmanmayı çağırır. Arama esnasında elde edilen çözümler iyiye giderken bir noktadan sonra kötüye giderse, o noktanın bir sırt noktası olduğu veya tersi yönde gelişim durumunda gelişimin yön değiştirdiği noktanın bir dip noktası olduğu anlaşılır. Bu metot türev alma işleminin verdiği neticeyi bir başka biçimde arayıp deneyerek bulur ve genellikle doğrusal olmayan problemlerde kullanılır.



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

➤ **Sezgisel stratejiler**, genellikle problem üstü düzeyde kullanılır. Literatürde *heuristic* olarak tanımlanır.

- Yunanca kökenli olan (heurika), Türkçe'de *bulmak* fiilinin karşılığıdır.
- Sezgisel terimi; akıllı tahminlere dayalı buluş yöntemi veya yeni çözümlerin keşfine götüren bulgulara dayalı arama yöntemi olarak tanımlanır.
- Sezgisel terimi ile tanımlanan algoritmaların ortak özelliği; araştırma uzayı çok büyük olan problemlerde çözümün aranmasını sınırlayan bir kural, strateji, hile, sadeleştirme ve benzeri etmenler kullanmalarıdır. Bu etmenlerden genellikle araştırmayı yönlendiren bir bulgu kastedilir.
- Örneğin ACO için kullanılan etmen *feromon* bulgusu, TS için kullanılan etmen seçilen hareket hakkında *yakınlık* veya *sıklık* bulgusudur.
- Bulgucu algoritmalarda mevcut çözümlerden, sonraki aşamada elde edilecek olan yeni çözümleri daha önceden belirlemek mümkün değildir.
- **Bulgucu stratejiler arama zamanını kısaltır, optimum çözüme yakın çözümler sunar fakat optimum çözümü garanti edemez.**



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

➤ **Belirleyici (deterministik) stratejide**, mevcut çözümlere göre bir sonraki aşamada elde edilecek çözümler belirlidir, sabittir. Belirleyici stratejiler genellikle problem düzeyinde uygulanır.

➤ Örneğin Newton-Raphson yönteminde, $f(x)$ 'in çözümünü bulmak için, başlangıçta x_i değeri seçilir ve bunun için amaç fonksiyonu değeri hesaplanır. Bir sonraki adımda, x parametresinin değeri aşağıdaki eşitlikle belirlenir:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

➤ Deterministik yöntemde, belirli parametreler bir probleme her uygulandığında aynı sonucu verir.

➤ Deterministik yaklaşımların uygulanması, zaman gibi sınırlı kaynaklar nedeniyle, her problem için mümkün olmayabilir.

➤ Örneğin bir satranç oyunu yazarken, bir taşın bir hamlesinin oyunun sonucuna etkisini denetlemek gerekir. Bu amaç için oluşturulan oyun ağacında (game tree) en iyi hamleyi seçmek için ortalama olarak hamle başına $(35^{50})^2$ olasılığı denemek gerekir.



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

- **İhtimalci (stokastik)** stratejide ise, eski çözümlerin kalitesi nispetinde değerler alan bir olasılık dağılım fonksiyonuyla bir rasgele sayı üreticinden faydalanarak yeni çözümler belirlenir. Karar mekanizması olasılık tabanlı seçimlere dayanır. Dolayısıyla, araştırmanın sonraki adımları önceden kestirilemez.
- Deterministik olmayan yaklaşımlar, aynı durum için farklı çalışmalarında aynı sonucu garanti etmeyen yöntem veya algoritmalarıdır. Bunlara stokastik veya olasılık tabanlı yöntemler de denir.
- Bir satranç oyununda aynı pozisyon için program ilk çalışmasında A7 karesine oynamayı çözüm olarak verdiği halde, sonraki denemede A3 ü uygun çözüm olarak verebilir.
- Genetik Algoritma ve Karınca Koloni Algoritması gibi Sezgisel (heuristic) yöntemler deterministik olmayan yöntemlerdir. Bu yöntemler, en iyi çözümü garanti edemezler ama, daha az deneme ile "iyi" bir çözüm bulabilmeyi garanti ederler.



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

- **Örnek:** Ankara'dan t_0 anında hareket ettiği bilinen bir yolcu otobüsü Kayseri'de karşılanmak istensin.
- **Amaç,** otobüsün Kayseri'ye geliş vaktini olabildiğince yakın tahmin etmek.
- **Belirleyici Kişi:** Otobüsün ortalama hızını (V_{ort}) ve Kayseri-Ankara mesafesini (X) tespit eder. Otobüsün Ankara'dan hareket saati t_0 'ı dikkate alır ve Kayseri'ye geliş vaktini, $t = X/V_{ort} + t_0$ formülü ile hesaplar. Belirleyici, parametreler değişmedikçe soruya her defasında aynı kararlar verecektir.
- **İhtimalci Kişi:** İhtimalci geçmiş günlerin veya geçmiş yılların istatistiklerine ihtiyaç duyar. Otobüsün hangi olasılıkla hangi vakitte geleceğini gösteren bir olasılık dağılım fonksiyonu oluşturur. Kararını bu olasılık dağılım fonksiyonuna göre verir. Hangi vaktin karar olarak verileceği o vaktin olasılık değeri ile orantılıdır. İhtimalci'nin kararı, olasılık tabanlı bir sistem kullanıldığı için doğal olarak her defasında farklı olabilir



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

- **Bulgucu Kişi:** Seyahat süresini etkileyen faktörleri ve ne oranda etkili olduklarını araştırır.
 - Havanın yağmurlu veya yerlerin buzlu olması durumunu ve seyahat süresi üzerindeki etkisini dikkate alır. Dolayısıyla, hava durumu kararı etkileyen bir bulgudur. Ayrıca, otobüsün ne kadar sıklıkla (frekans) hangi vakitlerde gelmekte olduğunu dikkate alır.
 - Frekans bulgusu bu problem dışında farklı türlerde bir çok problemde kullanılabileceğinden problem üstü bir bulgudur (meta-heuristic).
 - Bulgucu her defasında farklı cevap verebilir.
 - Çözüm kalitesini başlangıç bilgisi önemli derecede etkiler.
 - Cevabını önceden kestirmek veya hesaplamak mümkün değildir.
 - Her defasında bulgular ve bulguların karar üzerindeki etkinlikleri değişebilir.



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

- Özetle, belirleyici yaklaşım probleme özeldir ve statik bir yapı kullanılır.
- Bulgucu ve ihtimalci yaklaşım farklı türde problemlere uygulanabilir ve dinamik bir yapıya sahiptir.
- Her karar sürecinde verilecek kararlar bulgucu ve ihtimalci yaklaşımda değişebilir, bu özellik onlara adaptif çözüm üretebilme esnekliğini (yeteneği) kazandırır.
- **Akılcı (Intelligent) Yaklaşım:** Gerçek hayatta insanlar hem ihtimalleri hem bulguları hem de hesaplanabilen durumları dikkate alarak karar verirler.
- Bu nedenle yukarıdaki örnekte bahsedilen otobüsün gelişini sadece ortalama hıza bağlı olarak tahmin etmek doğru değildir.
- Bunun yanında otobüsün genellikle hangi vakitlerde geldiği, hava durumunun seyri etkileyip etkilemeyeceği veya olması muhtemel aksaklıklar (yol çalışması, arıza v.b.) göz önüne alınarak tahmin yapılmalıdır.
- Bulguları, ihtimalleri ve hesaplanabilen belirli durumları dengeli oranda karar mekanizmasında kullanmak, akıllıca bir yaklaşımdır.



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

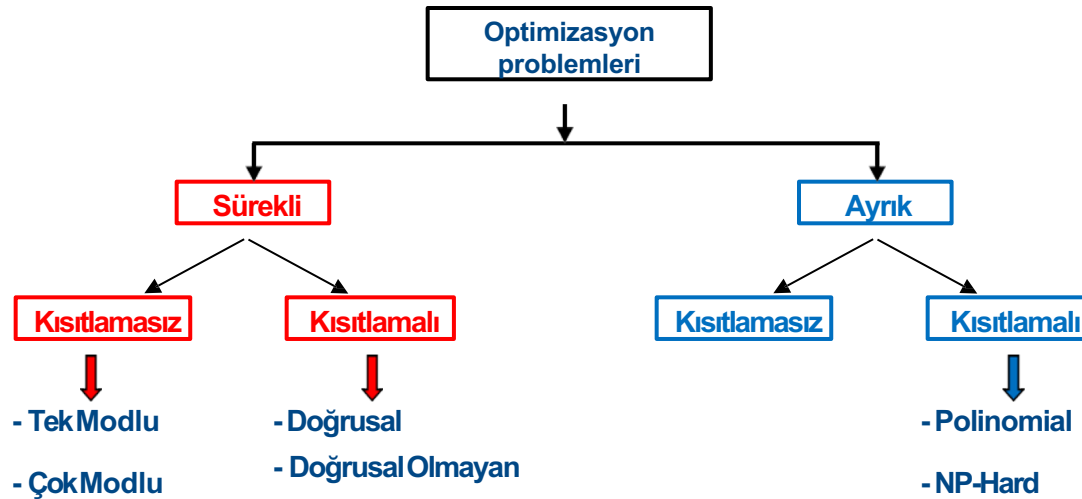
Modern optimizasyon algoritmaları,

- Genel olarak önce belirleyici bir yöntemle hesaplanabilen en iyi çözümü başlangıç çözümü olarak tespit eder,
- Sonra bu çözümü ihtimalci ve bulgucu stratejiler kullanılarak geliştirmeye çalışır.



METOTLARIN KULLANDIĞI ARAMA YÖNTEMLERİ

Optimizasyon problemleri kullanılan değişken tipine, kısıtlama varlığına ve hesaplama karmaşıklığına göre sınıflandırılabilir.

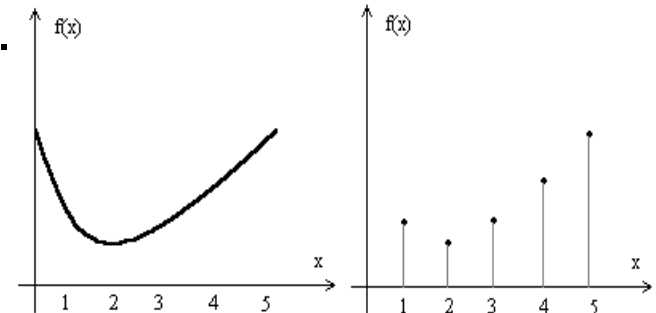


Optimizasyon problemleri değişken tipine göre sürekli ve ayrık problemler olmak üzere ikiye ayrılır. Problem değişkenleri üzerinde sınırlama varlığına göre sınırlamalı ve sınırlamasız olarak bölünür. İşlem karmaşıklığına (complexity) göre tek modlu, çok modlu, polinomal (P) ve belirleyici olmayan polinomal (NP) problemler olarak gruplandırılırlar.



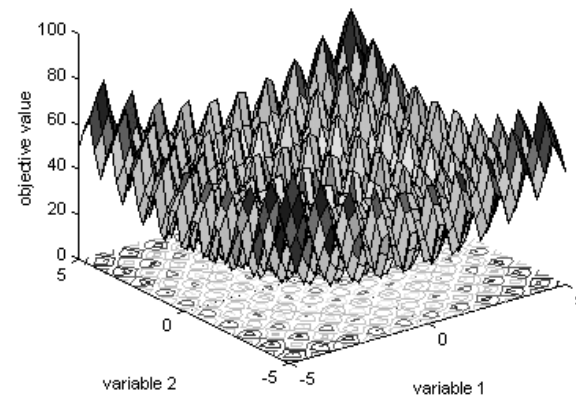
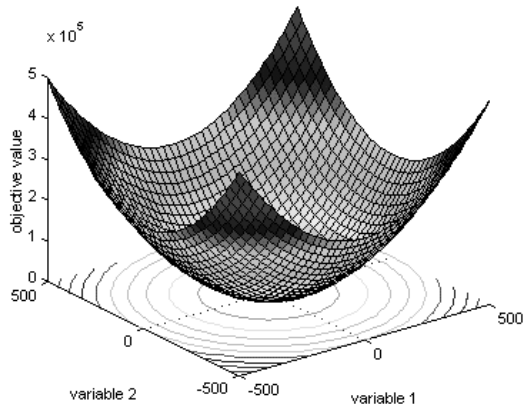
SÜREKLİ VE AYRIK PROBLEMLER

- Bir optimizasyon problemindeki bilinmeyenler uygulanabilir bölgede tüm değerleri alabiliyorsa, bir başka deyişle problem sonsuz sayıda giriş ve çıkış değerleri alabiliyorsa bu optimizasyon problemi sürekli problem olarak adlandırılır.
- Eğer değişkenler sonlu sayıda belirli değerleri alabiliyorsa optimizasyon problemi ayrık problem veya kombinasyonel problem olarak adlandırılır.
- Diğer bir deyişle ayrık problem, nesnelerin bir amacı gerçekleştirecek biçimde gruplandırılması, seçilmesi veya sıraya konması problemi olarak tanımlanır.
- Birinci grafikte dikkate alınan amaç fonksiyonunun parametresi x , $0 < x \leq 5$ aralığında istenilen ondalık hassasiyette sonsuz sayıda değer alabilir. İkinci grafikte ise $0 < x \leq 5$ aralığında x parametresinin alabileceği değerler $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi ile sınırlıdır ve bu değerler sonlu sayıdadır.



TEK MODLU VE ÇOK MODLU PROBLEMLER

- Bazı optimizasyon problemlerinin yalnızca bir adet bölgesel minimumu vardır ve bu değer aynı zamanda problemin küresel minimum değeridir. Çözümü kolay bulunan bu tür problemlere tek modlu problemler denir.
- Gerçek hayat karmaşıktır ve genellikle çözüm aranan problemler doğrusal olmayan yapıya sahiptir. Bu yapıdaki problemlerde genellikle çok sayıda bölgesel minimum bulunur. Çözümü zor olan bu tür problemlere de çok modlu problemler denir





DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN PROBLEMLER

- Grafiği doğrulardan oluşan başka bir deyişle; $y = Ax + B$ şeklinde birinci dereceden denklem eşitliği veya eşitsizliği ile tanımlanan fonksiyonlara doğrusal fonksiyon denir. (Linear)
- Grafiği eğrilerden oluşan ve $y = e^{(x)}$, $\log(x)$ ve x^n şeklinde tanımlanan fonksiyonlara da doğrusal olmayan fonksiyon denir. (Nonlinear)
- Sınırlamalı sürekli problemler, sınırlama fonksiyonlarına bağlı olarak eğrisel veya doğrusal olurlar.
- Optimizasyon probleminde kısıtlamaları oluşturan fonksiyonlar doğrusal ise problem sınırlamalı doğrusal optimizasyon problemi (constraint linear optimization problem) olarak adlandırılır.
- Sınırlama fonksiyonlarından en az birisi eğrisel olan problem sınırlamalı doğrusal olmayan optimizasyon problemi (constraint nonlinear optimization problem) olarak adlandırılır.



DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN PROBLEMLER

Bir Doğrusal Programlama Problemi

- Gaz işleyen bir tesisin her hafta sabit miktarlarda gaz aldığını varsayalım. Alınan gaz işlenerek normal ve süper gaz elde ediliyor. Üretilen gaz mutlaka satılıyor, ürünler farklı oranlarda kar bırakıyor. Ancak üretimleri hem zaman hem de depolama bakımından sınırlı. Örneğin aynı anda sadece bir tür gaz üretiliyor ve tesis haftada maksimum 80 saat çalışmaktadır. Şartlar tabloda özetlenmiş:

Kaynak	Ürün		Kaynağın Varlığı
	Normal	Süper	
Ham Gaz	7m ³ /ton	11m ³ /ton	77m ³ /hafta
Üretim Süresi	10saat/ton	8saat/ton	80saat/hafta
Depolama	9 ton	6 ton	
Kar	150/ton	175/ton	

$$\text{Maksimum } Z = 150x_1 + 175x_2$$

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77$$

$$10x_1 + 8x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 9$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

İşletmenin maksimum kar etmesi için, hangi gazdan ne kadar üretilmelidir?



KARMAŞIKLIK TEORİSİ

- Algoritmaların ne kadar karmaşık olduğunu, hızını, işlem süresini ve problemlerin ne kadar zor olduğunu araştıran matematik dalı karmaşıklık teorisi ile açıklanır.
- Karmaşıklık algoritmaların gerektirdiği işlem zamanını ve karmaşıklık derecesini ölçer.
- İşlem karmaşıklığı aynı zamanda algoritmaların yeterliliğinin bir ölçüsüdür. Çünkü bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler birim işlem zamanı ve kullanılan hafıza miktarı gibi gereksinimleri önemsiz kılmaktadır.
- Bu nedenle algoritmanın işlem karmaşıklığı onun verimliliğini ölçmede standart bir yaklaşımdır.
- Boyutu n olan bir problemi çözen bir algoritmanın yaptığı hesap miktarının $7n^8+2n+5$ olduğunu varsayalım. İşlem karmaşıklığında önemli olan problem boyutu n arttıkça yapılan hesap miktarının ne oranda arttığıdır.



KARMAŞIKLIK TEORİSİ

- Hesap miktarının artış oranı, $7n^8$ terimi dikkate alındığında adeta bir patlama gibidir, $2n$ teriminde ise sabittir. Bu nedenle işlem karmaşıklığının ölçümünde hesap miktarını gösteren fonksiyondaki düşük dereceden terimler göz ardı edilir sadece en yüksek dereceli terim esas alınır.
- Yukarıdaki örnek için sadece $7n^8$ terimi esas alınmıştır. Buradaki sabit katsayı 7 artış oranını etkilemez, çünkü artış oranı türevelere dayalı bir büyüklüktür. Sonuç olarak söz konusu örnek için işlem karmaşıklığı n^8 olarak belirlenir ve $O(n^8)$ olarak gösterilir.
- Bu gösterimle aynı zamanda algoritmanın n^8 birim işlem zamanı tükettiği ifade edilir.
- Bir problemin boyutu (giriş veri miktarı) n ile ölçülür ve n boyutlu bir problemin bir işlemde gerektirdiği hesap miktarı N ile gösterilir.
- N ile n arasında fonksiyonel bir ilişki kurulabilir. Çünkü problem boyutu n büyüdükçe bir işlem için gerekli hesap miktarı N de büyür.
- Fakat bu büyüme oranı problem türlerine göre farklılık gösterir. Bu farklılık problemlerin zorluk derecesi ile ilişkilidir ve problem türlerinin sınıflandırılmasında da kullanılır.