



MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN OPTİMİZASYONU

Dr. Müh. Mustafa Kemal SEVİNDİR

Yıldız Teknik Üniversitesi Mak. Müh. Böl.

Web: www.yildiz.edu.tr e-mail: sevindir@yildiz.edu.tr



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Doğrusal programlama (DP), kârı maksimuma çıkarma veya maliyeti minimuma indirme gibi arzu edilen bir amaca, sınırlı kaynaklar gibi kısıtlar altında ulaşmak konusıyla ilgilenen bir optimizasyon yaklaşımıdır. *Doğrusal* terimi, hem amaç hem de kısıtları ifade eden matematik fonksiyonların doğrusal olduğu anlamına gelir. *Programlama* terimi bilgisayar programlaması anlamına gelmez, daha çok “planlama” veya “bir program belirleme”yi ifade eder.

Temel doğrusal programlama problemi iki ana kısımdan oluşur:

- Amaç fonksiyonu
- Bir takım kısıtlar

Bir maksimizasyon problemi için amaç fonksiyonu genel olarak

$$\text{Maksimum } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

şeklindedir. c_j = yapılan j aktivitesinin her biriminin katkısı ve x_j = j aktivitesinin büyüklüğüdür. Z amaç fonksiyonunun değeri, aktivitelerin toplam sayısı n 'nin toplam katkısıdır.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Kısıtlar genel olarak,

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

şeklinde ifade edilir. a_{ij} = her birim j aktivitesi için i kaynağından harcanan miktar ve b_i = i kaynağının mevcut miktarıdır. Yani kaynaklar sınırlıdır.

İkinci tip genel kısıt, bütün aktivitelerin pozitif bir değeri olması gerektiğini ifade eder:

$$x_i \geq 0$$



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Problem

Gaz işleyen bir tesisin her hafta sabit miktarlarda gaz aldığını varsayalım. Alınan gaz işlenerek normal ve süper gaz elde ediliyor. Üretilen gaz mutlaka satılıyor, ürünler farklı oranlarda kar bırakıyor. Ancak üretimleri hem zaman hem de depolama bakımından sınırlı. Örneğin aynı anda sadece bir tür gaz üretiliyor ve tesis haftada maksimum 80 saat çalışmaktadır. Şartlar tabloda özetlenmiş:

Kaynak	Ürün		Kaynağın Varlığı
	Normal	Süper	
Ham Gaz	7m ³ /ton	11m ³ /ton	77m ³ /hafta
Üretim Süresi	10saat/ton	8saat/ton	80saat/hafta
Depolama	9 ton	6 ton	
Kar	150/ton	175/ton	

$$\text{Maksimum } Z = 150x_1 + 175x_2$$

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77$$

$$10x_1 + 8x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 9$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

İşletmenin maksimum kar etmesi için, hangi gazdan ne kadar üretilmelidir?



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Çözüm

Her hafta üretilen normal ve süper gaz miktarları sırasıyla x_1 ve x_2 ile gösterilirse, haftalık toplam kâr,

$$\text{Toplam kâr} = 150 x_1 + 175 x_2$$

Bir doğrusal programlama amaç fonksiyonu biçiminde yazalım;

$$\text{Maksimum } Z = 150 x_1 + 175 x_2 \quad (\text{kârı maksimum yap})$$

Kısıtlamalar;

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77$$

(malzeme kısıtı)

$$10x_1 + 8x_2 \leq 80$$

(zaman kısıtı)

$$x_1 \leq 9$$

(“normal” depolama kısıtı)

$$x_2 \leq 6$$

(“süper” depolama kısıtı)

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(pozitiflik kısıtı)



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Grafik Çözüm

İki veya üç boyutla sınırlı olmaları nedeniyle grafik çözümlerin pratik kullanımı sınırlıdır.

Yukarıdaki örnekteki gibi iki boyutlu bir problem için, çözüm uzayı apsisi x_1 ve ordinatı x_2 olan bir düzlemle tanımlanır. Doğrusal olmaları nedeniyle kısıtlar, bu düzlemde doğrular şeklinde çizilebilir.

Eğer DP problemi düzgün tanımlanmışsa (yani çözümü varsa), kısıt doğruları gerçekleştirilebilir (fizibl) çözüm uzayı deneni, bütün kısıtları sağlayan ve dolayısıyla gerçekleştirilebilir bir çözümü temsil eden bir bölgeyi belirler. Amaç fonksiyonu da Z 'nin belirli bir değeri için başka bir doğru şeklinde bu uzayın üzerine çizilebilir. Daha sonra gerçekleştirilebilir uzaya değmek koşuluyla Z 'nin değeri ayarlanarak maksimumu bulunur. Z 'nin bu değeri optimum çözümü gösterir. Z 'nin gerçekleştirilebilir çözüm uzayına değdiği duruma karşı gelen x_1 ve x_2 değerleri ise aktivitelerin optimum değerlerini gösterir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Problem

Maksimum $Z = 150 x_1 + 175 x_2$ (kârı maksimum yap)

Kısıtlamalar;

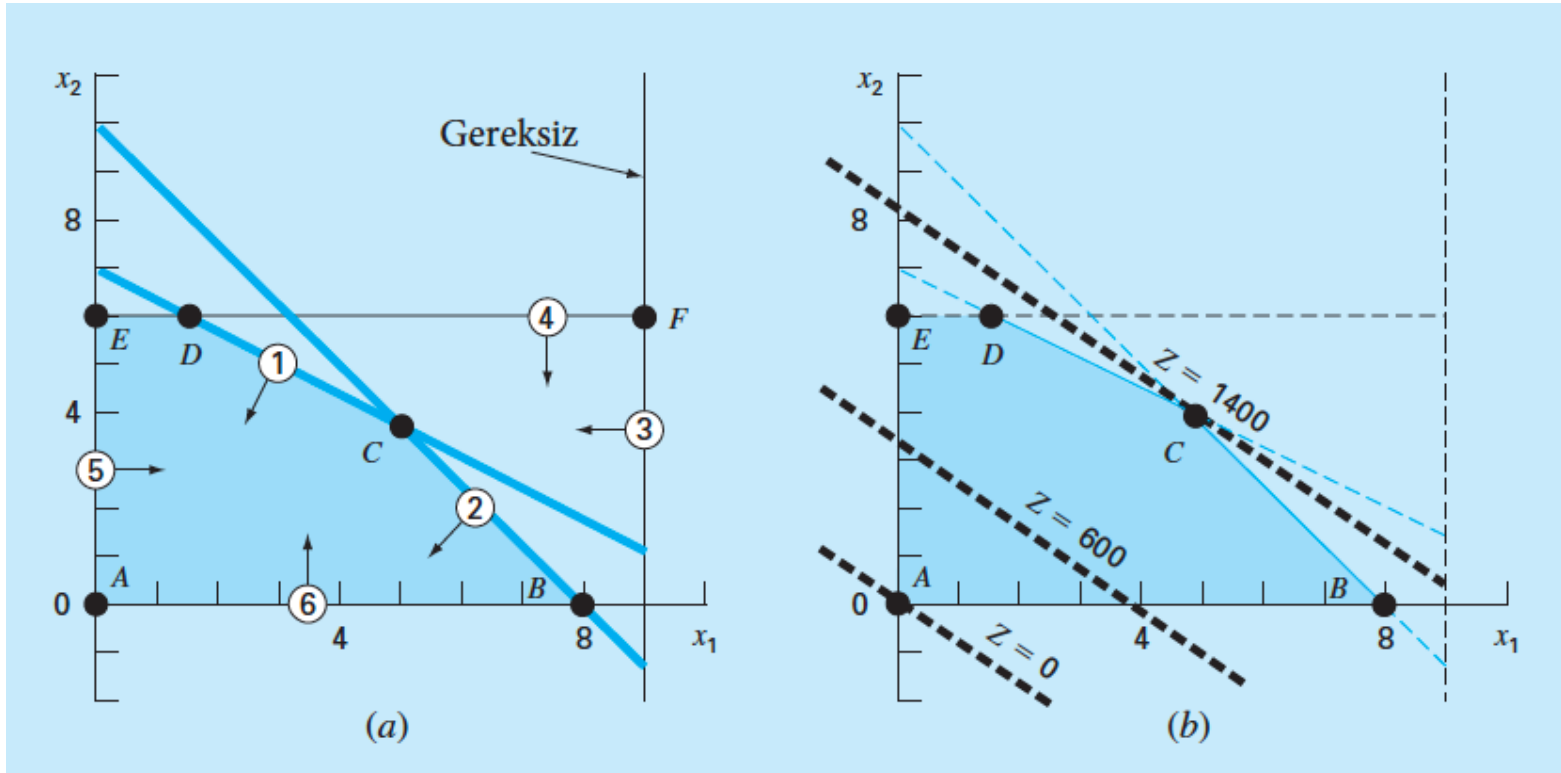
- | | | |
|------------------------|-----|----------------------------|
| $7x_1 + 11x_2 \leq 77$ | (1) | (malzeme kısıtı) |
| $10x_1 + 8x_2 \leq 80$ | (2) | (zaman kısıtı) |
| $x_1 \leq 9$ | (3) | (“normal” depolama kısıtı) |
| $x_2 \leq 6$ | (4) | (“süper” depolama kısıtı) |
| $x_1 \geq 0$ | (5) | (pozitiflik kısıtı) |
| $x_2 \geq 0$ | (6) | (pozitiflik kısıtı) |

KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Çözüm

Kısıtlar önce çözüm uzayı üzerine çizilebilir. Örneğin birinci kısıttaki eşitsizlik bir eşitlikle değiştirilerek yeniden ifade edilebilir ve buradan x_2 için çözülebilir:

$$x_2 = -\frac{7}{11}x_1 + 7$$



Şekil 1.
a) Kısıtlar gerçekleştirilebilir bir çözüm uzayı tanımlarlar.
(b) Amaç fonksiyonu, kısıtları sağlayan en yüksek değerine ulaşıncaya kadar artırılabilir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Çözüm

Şekil 1(a)'daki gibi, bu kısıtı sağlayan olası x_1 ve x_2 değerleri bu doğrunun altında kalır (çizimde küçük okla gösterilen yönde).

Şekil 1(a)'nın üzerine eklendiği gibi diğer kısıtlar da benzer biçimde hesaplanabilir. Hepsinin sağlandığı bir bölge gerçekleştirilebilir (fizibl) çözüm uzayıdır (şekildeki ABCDE alanı).

Gerçekleştirilebilir çözüm uzayını tanımlaması yanında, Şekil 1(a) ek bilgiler de içerir. Özellikle 3. kısıtın (normal gazın depolanması) “gereksiz” olduğunu görürüz. Yani bu kısıt çıkarılsa da gerçekleştirilebilir çözüm uzayı etkilenmeyecektir.

Daha sonra amaç fonksiyonu da çizime eklenebilir. Bunu yapmak için bir Z değeri seçilmelidir. Örneğin, $Z = 0$ için amaç fonksiyonu,

$$0 = 150x_1 + 175x_2$$

şeklini alır, buradan x_2 'yi çözerek $x_2 = -\frac{150}{175}x_1$ doğrusunu elde ederiz.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Çözüm

Şekil 1(b)'de gösterildiği gibi bu doğru orijinden geçen kesikli çizgilerle temsil edilir. Şimdi, Z'yi maksimum yapmakla ilgilendiğimizden, değerini örneğin 600'e artırırız ve amaç fonksiyonu,

$$x_2 = \frac{600}{175} - \frac{150}{175}x_1$$

Böylece amaç fonksiyonunun değerini artırmak doğruyu orijinden uzaklaştırır. Doğru hâlâ gerçekleştirilebilir çözüm uzayı içinde kaldığından sonuç da hâlâ gerçekleştirilebilirdir. Aynı nedenden dolayı hâlâ iyileştirme olanağı vardır. Dolayısıyla, yeni bir artış amaç fonksiyonunu gerçekleştirilebilir bölgenin dışına çıkarıncaya kadar Z'nin değeri artırılmaya devam edilebilir. Şekil 1(b)'de gösterildiği gibi, Z'nin maksimum değeri yaklaşık 1400'e karşılık gelir. Bu noktada x_1 ve x_2 'nin değerleri sırasıyla 4,9 ve 3,9'a eşittir. O halde grafik çözüm bize, normal ve süper gazı bu miktarlarda üretirsek yaklaşık 1400'e eşit bir kâr elde edeceğimizi söyler.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Çözüm

Optimum değerleri belirlemesinin yanında, grafik yaklaşım problem hakkında ek bilgiler de verir. Yanıtta bulduğumuz değerler kısıt denklemlerinde yerlerine konulduğunda bu husus daha iyi anlaşılır:

$$7 (4,9) + 11 (3,9) \cong 77$$

$$10 (4,9) + 8 (3,9) \cong 80$$

$$4.9 \leq 9$$

$$3.9 \leq 6$$

Dolayısıyla, şekilden de açıkça görüldüğü gibi, her üründen optimum miktarda ürettiğimiz zaman kaynak (1) ve zaman (2) kısıtlarını ucu ucuna sağlarız. Bu tip kısıtlara **bağlayıcı kısıt** denir. Ayrıca grafik olarak yine çok açık olduğu gibi, depolama kısıtlarının [(3) ve (4)] hiçbirisi sınırlayıcı değildir. Bu tip kısıtlara **bağlayıcı olmayan kısıt** denir. Bu da bizi, bu örnekte kârımızı artırmak istiyorsak ya kaynaklarımızı (ham gaz) ya da üretim zamanını artırmalıyız şeklindeki pratik sonuca götürür. Ayrıca depolama kapasitesini artırmak kârı etkilemeyecektir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

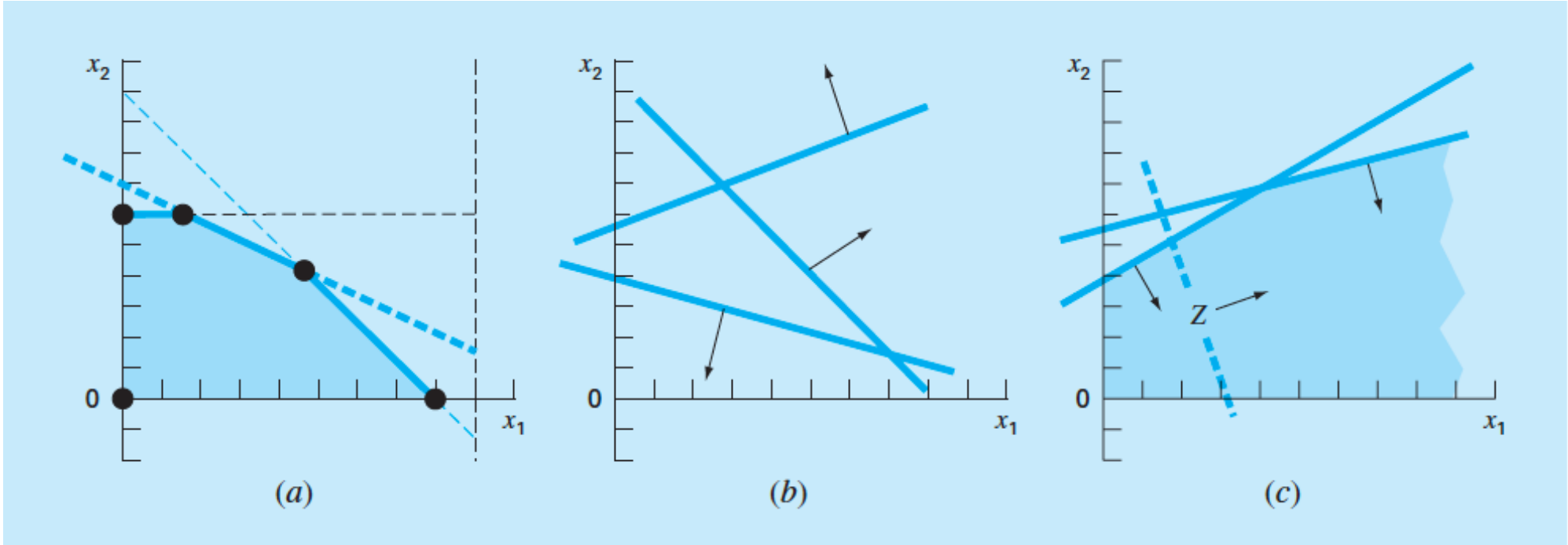
Doğrusal programlama problemlerinde genelde elde edilebilecek olası çıktıların şunlardır:

Tek çözüm. Örnekte olduğu gibi, maksimum amaç fonksiyonu tek bir noktada kesişir.

Alternatif çözümler. Örnekteki amaç fonksiyonunun katsayılarının, doğru kısıtlardan birine paralel olacak şekilde verilmiş olduğunu varsayalım. Örnekteki problemimizde, bu durum her bir ürün için kâr oranları 140 \$/ton ve 220 \$/ton değerlerine değiştirildiğinde söz konusu olur. Bu durumda, tek bir nokta yerine, problemin bir doğru parçasına karşı gelen sonsuz sayıda optimumu olacaktır (Şekil 2(a)).

Gerçekleştirilebilen çözümü olmama. Şekil 2(b)'de olduğu gibi, problem, gerçekleştirilebilir çözümü olmayacak şekilde düzenlenmiş olabilir. Bu durum, çözümü olmayan bir problem halinde veya problemin kurgusunda hata yapıldığında karşımıza çıkar. Son durum, problem, hiçbir çözümün bütün kısıtları sağlayamayacağı şekilde aşırı sınırlandırıldığında ortaya çıkabilir.

KISITLAMALI OPTİMİZASYON



Şekil 2. (a) alternatif optimum, (b) gerçekleştirilebilen çözümü olmama, (c) bağlayıcı olmayan sonuç.

Bağlayıcı olmayan problemler. Şekil 2(c)'de görüldüğü gibi bu durum, genelde problem yeterince sınırlandırılmadığı ve dolayısıyla bir tarafından açık kaldığında ortaya çıkar. Gerçekleştirilebilir çözüm olmaması halinde olduğu gibi, bu durum da problemin tanımlanmasında yapılan hatalardan kaynaklanabilir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

Şimdi problemimizin tek bir çözümü olduğunu varsayalım. Grafik yaklaşım bize, maksimumun yakalanabilmesi için bir dizi strateji önerebilir. Şekil 1'den açıkça görüldüğü gibi optimum daima iki kısıtın kesiştiği köşelerden birinde olacaktır. Bu tip noktalara uç (ekstremum) noktası denilir. Böylece, karar uzayında yer alan sonsuz sayıda olası nokta içerisinde uç noktalara odaklanmak olası seçenekleri açıkça azaltır.

Ayrıca her uç noktasının da gerçekleştirilebilir olmadığını, yani bütün kısıtları sağlamadığını görmeliyiz. Örneğin Şekil 1(a)'da F noktası bir uç noktası olmasına karşın gerçekleştirilebilir değildir. İlginizi gerçekleştirebilen uç noktalara odaklamamız seçeneklerimizi daha da azaltır.

Son olarak, bir kere bütün uç noktaları belirlendikten sonra, amaç fonksiyonunun en iyi değerini veren nokta optimum çözümdür. Optimum çözümün bulunması işlemi, amaç fonksiyonunu bütün gerçekleştirilebilir uç noktalarında hesaplayarak geniş kapsamlı olarak (verimsiz olarak) yapılabilir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

SIMPLEX yöntemi optimum çözümün bir ekstremum noktası olacağı varsayımına dayanır.

Problemi çözerken herhangi bir ekstremum noktası olup olmadığının anlaşılması gerekir.

Bunu yapmak için kısıt denklemleri ara değişkenler kullanılarak eşitlik halinde yeniden düzenlenerek yazılır.

Ara Değişkenler. Ara değişken kısıtlı bir kaynağın ne kadarının kullanılabilir olduğunun, yani kaynağın miktar olarak ne kadar “toleransı” olduğunun ölçüsüdür.

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77$$

Belirli bir üretim (x_1, x_2) seviyesinde kullanılmayan ham gaz miktarını S_1 ara değişkeni olarak tanımlayabiliriz. Eğer bu büyüklük kısıtın sol tarafına eklenirse bağıntıyı tam hale getirir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

$$7 x_1 + 11 x_2 + S_1 = 77$$

Ara değişkenin bize ne bilgi verir.

Eğer ara değişken pozitifse bu kısıt için biraz “payımız” var demektir. Yani tamamı kullanılmayan fazla kaynağımız var demektir. Eğer negatifse, kısıtı aştığımız anlamına gelir. Son olarak da eğer sıfırsa, kısıtı tam olarak sağlıyoruz demektir. Yani, izin verilen bütün kaynağı kullanmışızdır. Bu koşul kısıt doğrularının kesiştikleri yerdeki şart olduğundan, ara değişkenler ekstremum noktalarının belirlenmesi için bir olanak sunarlar.

Tam genişletilmiş hali elde etmek için, her kısıt denkleminde ayrı bir ara değişken tanımlanır:

$$\text{Maksimum } Z = 150 x_1 + 175 x_2$$



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Kısıtlar:

$$7x_1 + 11x_2 + S_1 = 77$$

$$10x_1 + 8x_2 + S_2 = 80$$

$$x_1 + S_3 = 9$$

$$x_2 + S_4 = 6$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Cebirsel Çözüm.

Örnek sistemimizde bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazladır.

n adet orijinal bilinmeyen, m adet ek veya ara değişken (her kısıt için bir adet) ve $n + m$ adet toplam değişken vardır.

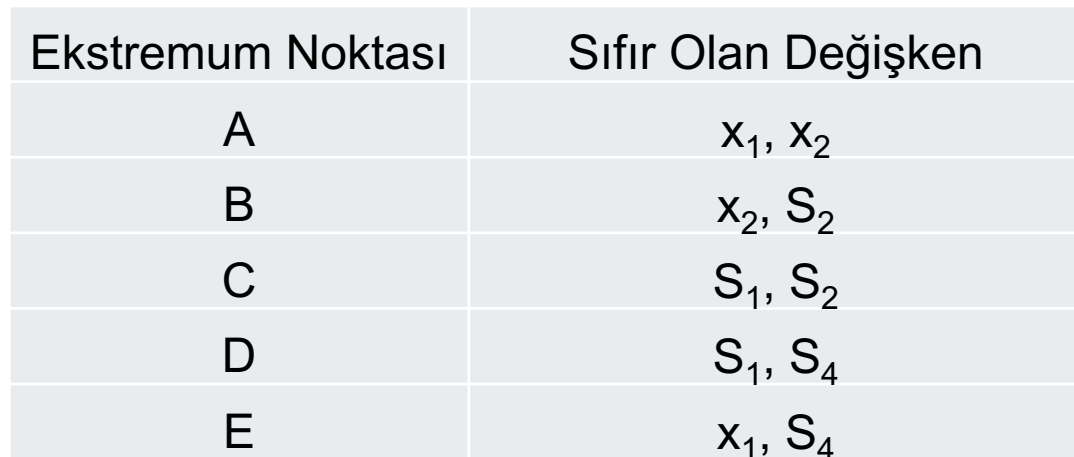
Gaz üretme problemi için 2 orijinal değişkenimiz, 4 ara değişkenimiz ve toplam 6 değişkenimiz vardır. Böylece problemimiz 4 denklemle 6 bilinmeyeni çözmeyi içerir.

Bilinmeyenler ve denklemler arasındaki fark (problemimizde 2'ye eşittir) doğrudan doğruya, gerçekleştirilebilir ekstremum noktalarını nasıl ayırt edebileceğimizle ilgilidir.

Her gerçekleştirilebilir noktada 6 değişkenden 2'si sıfırdır.



Örneğin ABCDE alanının beş köşesinde aşağıdaki tabloda verilen değişkenler sıfırdır:





KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Genelleştirmek için, m adet doğrusal denklem ve n adet bilinmeyen için temel bir çözüm, $n - m$ değişkeni sıfıra eşitleyerek ve m adet denklemi geriye kalan m adet bilinmeyen cinsinden çözerek geliştirilebilir. Sıfır olan değişkenler teknik olarak **temel olmayan değişkenler**, geriye kalan m adet değişken ise **temel değişkenler** diye anılır. Eğer temel değişkenlerin hiçbiri negatif değilse, sonuca **temel gerçekleştirilebilir çözüm** denir. Optimum, bu tip çözümlerden birisi olacaktır.

Bu durumda optimum çözümü belirlemek için kullanılabilecek doğrudan bir yaklaşım, bütün temel çözümleri hesaplamak, hangilerinin gerçekleştirilebilir olduğunu ve bunların içerisinde hangisinde Z 'nin değerinin maksimum olduğunu belirlemek şeklinde olabilir. Bunun akılcı bir çözüm olmamasının iki nedeni vardır.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Birincisi, kabul edilebilir büyüklükte problemler için bile yaklaşım çok fazla sayıda denklem çözümünü içerebilir. m adet denklem ve n adet bilinmeyen için,

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

adet eşzamanlı denklemin çözülmesi gerekir.

Örneğin eğer 10 adet denklem ($m = 10$) ve 16 adet bilinmeyen ($n = 16$) varsa, 8008 [= 16!/(10!6!)] adet 10×10 denklem sistemi çözmek gerekir!

İkincisi, bunların önemli bir kısmı gerçekleştirilebilir olmayacaktır. Örneğin bu problemde, $C_6^4 = 15$ aşıttan sadece 5'i gerçekleştirilebilir. Açıkça, bu gereksiz sistemlerin çözümünden kurtulursak daha verimli bir algoritma geliştirilmiş olacaktır.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

SIMPLEX Yönteminin Uygulanması.

SIMPLEX yöntemi verimsizlikleri önlemek için temel gerçekleştirilebilir bir çözümle işe başlar. Daha sonra amaç fonksiyonun değerini adım adım iyileştiren bir dizi temel gerçekleştirilebilir çözüm arasında ilerler. Sonunda optimum değere ulaşılır ve yöntem durdurulur.

İlk adım, temel gerçekleştirilebilir bir çözümle (yani gerçekleştirilebilir uzayın ekstremum köşe noktalarından birisinde) başlamaktır. Örneğimizde çok açık bir başlangıç noktası A olacaktır; yani $x_1 = x_2 = 0$.

Orijinal 6 denklem ve 4 bilinmeyen

$$\begin{array}{rcl} S_1 & & = 77 \\ & S_2 & = 80 \\ & & S_3 = 9 \\ & & S_4 = 6 \end{array}$$

olur.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

SIMPLEX Yönteminin Uygulanması.

SIMPLEX yöntemi verimsizlikleri önlemek için temel gerçekleştirilebilir bir çözümle işe başlar. Daha sonra amaç fonksiyonun değerini adım adım iyileştiren bir dizi temel gerçekleştirilebilir çözüm arasında ilerler. Sonunda optimum değere ulaşılır ve yöntem durdurulur.

İlk adım, temel gerçekleştirilebilir bir çözümle (yani gerçekleştirilebilir uzayın ekstremum köşe noktalarından birisinde) başlamaktır. Örneğimizde çok açık bir başlangıç noktası A olacaktır; yani $x_1 = x_2 = 0$.

Orijinal 6 denklem ve 4 bilinmeyen

$$\begin{array}{rcl} S_1 & & = 77 \\ & S_2 & = 80 \\ & & S_3 = 9 \\ & & S_4 = 6 \end{array}$$

olur.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Böylece temel değişkenlerin başlangıç değerleri otomatik olarak kısıtların sağ taraflarına eşit olur.

Başlangıç bilgileri uygun bir tablo biçiminde özetlenebilir.

Temel	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Çözüm	Kesme Noktası
Z	1	-150	-175	0	0	0	0	0	
S_1	0	7	11	1	0	0	0	77	11
S_2	0	10	8	0	1	0	0	80	8
S_3	0	1	0	0	0	1	0	9	9
S_4	0	0	1	0	0	0	1	6	∞

tablo yardımıyla amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z - 150x_1 - 175x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 = 0$$



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Bir sonraki adım, amaç fonksiyonunda bir iyileştirmeye yol açabilecek yeni bir temel gerçekleştirilebilir çözüme ilerlemektir. Bu ise, o anda mevcut temel olmayan değişkenlerden biri (bu noktada x_1 veya x_2), Z 'yi de artıracak şekilde, sıfırın üzerinde bir değere artırılarak sağlanır.

İncelemekte olduğumuz örnek için ekstremum noktalarında 2 adet sıfır değeri gerekir. O halde mevcut temel değişkenlerden biri de (S_1 , S_2 , S_3 veya S_4) sıfıra eşitlenmelidir.

Mevcut durumda temel olmayan değişkenlerden biri temel değişken yapılmalıdır (sıfırdan farklı). Bu değişkene ***giriş değişkeni*** denir. Süreç içerisinde mevcut temel değişkenlerden biri temel olmayan değişken yapılmıştır (sıfıra eşitlenmiştir). Bu değişkene ***çıkış değişkeni*** adı verilir.

Giriş ve çıkış değişkenlerini belirlemek için matematiksel bir yaklaşım geliştirelim.

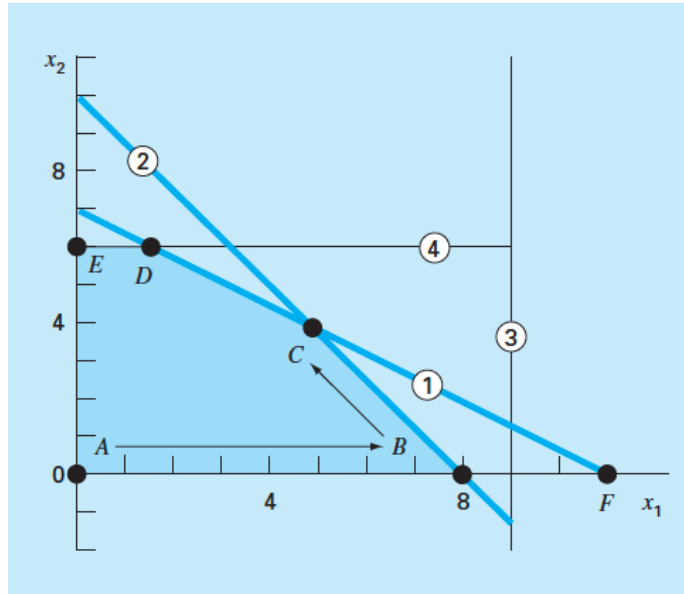
KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Amaç fonksiyonun yazılış şekli nedeniyle giriş değişkeni, amaç fonksiyonu içerisinde yer alan ve katsayısı negatif olan (çünkü Z 'yi büyütecektir) herhangi bir değişken olabilir.

Geleneksel olarak en büyük negatif değer seçilir, çünkü böylece Z 'de en büyük artış elde edilir. Bizim örneğimizde x_2 giriş değişkeni olacaktır, çünkü katsayısı -175, x_1 'in katsayısı -150'den daha negatiftir.

Bu noktada bilgi edinmek için grafik çözüme başvurabiliriz.



SIMPLEX yönteminin, optimuma etkili bir biçimde ulaşmak için gerçekleştirilebilir temel çözümler arasında sırayla nasıl ilerlediğinin grafik gösterimi.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Şekilde görüldüğü gibi A noktasından başlarız. Katsayısı nedeniyle x_2 giriş değişkeni seçilmelidir. Ancak örneğin kısa olabilmesi için x_1 'i seçeceğiz, çünkü bu seçimin bizi maksimuma daha hızlı götüreceği grafikten görülmektedir.

Daha sonra çıkış değişkenini mevcut temel değişkenler arasından seçmeliyiz: S_1 , S_2 , S_3 veya S_4 . Grafik olarak baktığımızda iki olasılık görürüz. B noktasına ilerlersek S_2 sıfır, F noktasına gidersek S_1 sıfır olacaktır. Ancak grafik bize F'nin mümkün olmadığını açıkça gösterir, çünkü F gerçekleştirilebilir çözüm uzayının dışında kalmaktadır. Dolayısıyla A'dan B'ye doğru ilerlemeye karar veririz.

Aynı sonuç matematiksel olarak nasıl algılanacaktır?

Bir yol, kısıtların eksenini veya çıkış değişkenine karşı gelen doğruyu kestiği noktalardaki değerlerin hesaplanmasıdır (bizim örneğimizde x_1 eksenini). Bu değeri, kısıtın sağ tarafının (tablo'nun "çözüm" sütunu) x_1 'e karşı gelen katsayısına oranı olarak hesaplayabiliriz. Örneğin birinci kısıtın ara değişkeni S_1 için bu işlemi yaparsak sonuç,



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

$$\text{Kesme Noktası} = \frac{77}{7} = 11$$

olur.

Diğer kesme noktaları da hesaplanarak tablo'nun son sütununa yazılabilir. 8 en küçük pozitif tamsayı olduğundan, x_1 artırıldığı zaman ilk önce ikinci kısıt doğrusuna ulaşılacak demektir. O halde, S_2 giriş değişkeni olmalıdır.

Artık B noktasına ($x_2 = S_2 = 0$) gelmiş bulunuyoruz ve yeni temel çözüm,

$$\begin{array}{rcl} 7x_1 + S_1 & & = 77 \\ 10x_1 & & = 80 \\ x_1 & + S_3 & = 9 \\ & & + S_4 = 6 \end{array}$$

şeklini alır. Bu sistemin çözümü B noktasındaki temel değişkenlerin değerlerini iyi bir şekilde ifade eder: $x_1 = 8$, $S_1 = 21$, $S_3 = 1$ ve $S_4 = 6$.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Aynı hesaplamaları Gauss-Jordan yöntemiyle yapmak için tablo kullanılabilir. Gauss-Jordan yönteminin arkasındaki temel strateji, pivot elemanını 1'e çevirmek ve aynı sütundaki pivot elemanının altında ve üstünde kalan katsayıları elemektir.

Bu örnekte pivot satır S_2 (giriş değişkeni) ve pivot elemanı 10'dur (çıkış değişkeni x_1 'in katsayısı). Satırı 10'a bölerek ve S_2 yerine x_1 konularak ilk tablo elde edilir. Daha sonra diğer satırlardaki x_1 katsayıları elenebilir.

Temel	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Çözüm	Kesme Noktası
Z	1	-150	-175	0	0	0	0	0	
S_1	0	7	11	1	0	0	0	77	
x_1	0	1	0.8	0	0.1	0	0	8	
S_3	0	1	0	0	0	1	0	9	
S_4	0	0	1	0	0	0	1	6	



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Örneğin amaç fonksiyonu satırında, pivot satır -150 ile çarpılır ve sonuç ilk satırdan çıkarılarak aşağıdaki ikinci tablo bulunur.

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Çözüm
1	-150	-175	0	0	0	0	0
-0	$-(-150)$	$-(-120)$	-0	$-(-15)$	0	0	$-(-1200)$
1	0	-55	0	15	0	0	1200



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Benzer işlemler kalan satırlar için de yapılarak aşağıdaki yeni tablo elde edilir:

Temel	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Çözüm	Kesme Noktası
Z	1	0	-55	0	15	0	0	1200	
S_1	0	0	5.4	1	-0.7	0	0	21	3.889
x_1	0	1	0.8	0	0.1	0	0	8	10
S_3	0	0	-0.8	0	-0.1	1	0	1	-1.25
S_4	0	0	1	0	0	0	1	6	6



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Böylece yeni tablo, B noktası için bütün bilgileri özetlemektedir. Bilgilere, yapmış olduğumuz hareket sonucu amaç fonksiyonun $Z = 1200$ 'e yükselmiş olması da dahildir.

Bu tablo şimdi de, bir sonraki ve son adımı tablolarlamak için kullanılabilir. Amaç fonksiyonunda sadece bir tek değişkenin daha (x_2) değeri negatiftir ve bu nedenle çıkış değişkeni olarak seçilmiştir. Kesme noktası değerlerine göre (şimdi çözüm sütunu bölü x_2 sütunundaki katsayılar olarak hesaplanmıştır), birinci kısıt en küçük pozitif değere sahiptir ve dolayısıyla S_1 giriş değişkeni olarak seçilmiştir. Böylece Simplex yöntemi bizi, B noktasından C'ye götürür. Son olarak da, eşzamanlı denklemleri çözmek için Gauss-Jordan elemesi uygulanabilir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Sonuç, son tablo'dur:

Temel	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Çözüm
Z	1	0	0	10.1852	7.8704	0	0	1413.889
x_2	0	0	1	0.1852	-0.1296	0	0	3.889
x_1	0	1	0	-0.1481	0.2037	0	0	4.889
S_3	0	0	0	0.1481	-0.2037	1	0	4.111
S_4	0	0	0	-0.1852	0.1296	0	1	2.111



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

SIMPLEX YÖNTEMİ

Bulduğumuz sonucun son sonuç olduğunu biliyoruz, çünkü amaç fonksiyonu satırında negatif katsayı kalmamıştır. Son çözüm de, $Z = 1413.889$ maksimum amaç fonksiyon değerini veren $x_1 = 4.889$ ve $x_2 = 3.889$ noktalarıdır. Ayrıca S_3 ve S_4 hâlâ temel değişken olarak kaldıklarından problemin birinci ve ikinci kısıtlar tarafından sınırlandırıldığını anlarız.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

Lagrange Çarpanları yöntemi kısıtlamalı optimizasyon yöntemlerinden bir tanesidir. Çok değişkenli fonksiyonların minimum ve maksimumunu bulmada kullanılır.

Genel çözüm yöntemi;

1. Aşağıdaki denklem sistemi çözülür.

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= c\end{aligned}$$

$f(x, y, z)$ Amaç fonksiyon

$g(x, y, z)$ Kısıt

2. Tüm çözümler, (x, y, z) , ilk adımdan itibaren $f(x, y, z)$ 'ye konur ve mevcut olmaları koşuluyla minimum ve maksimum değerler belirlenir.

λ sabiti Lagrange Çarpanı olarak adlandırılır.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

$$\langle f_x, f_y, f_z \rangle = \lambda \langle g_x, g_y, g_z \rangle = \langle \lambda g_x, \lambda g_y, \lambda g_z \rangle$$

Bu iki vektörün eşit olması için her bir bileşenin de eşit olması gerekir.

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z$$

Kısıtlama ($g(x, y, z) = c$) ile birlikte bu üç denklem, dört bilinmeyenli (x, y, z ve λ) ile dört denklem olur.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

Örnek: Yüzey alanı 64cm^2 olan prizmatik bir kutunun maksimum hacme sahip olması için kenar uzunlukları ne olmalıdır?

Çözüm: Öncelikle kısıtla birlikte optimize edeceğimiz fonksiyonu tanımlamamız gerekiyor. Kutunun uzunluğunu x , kutunun genişliğini y ve kutunun yüksekliğini z olarak alalım. Ayrıca, bir kutunun boyutlarıyla uğraştığımız için x, y ve z 'nin pozitif olması gerektiğine dikkat edelim.

En büyük hacmi bulmak istiyoruz ve optimize etmek istediğimiz fonksiyon,

$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

Daha sonra kutunun yüzey alanının sabit 64cm^2 olması gerektiğini biliyoruz. Yani bu bir kısıtlama. Bir kutunun yüzey alanı, her bir kenarın alanlarının toplamıdır, dolayısıyla kısıtlama,

$$2xy + 2xz + 2yz = 64 \Rightarrow xy + xz + yz = 32$$



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

Denklemi biraz basitleştirmek için kısıtlamayı 2'ye böldük. Kısıtlama fonksiyonumuz $g(x,y,z)$;

$$g(x,y,z) = xy + xz + yz$$

şeklinde bulunmuştur.

Burada çözmemiz gereken dört denklem vardır.

$$yz = \lambda(y + z) \quad (f_x = \lambda g_x) \quad (1)$$

$$xz = \lambda(x + z) \quad (f_y = \lambda g_y) \quad (2)$$

$$xy = \lambda(x + y) \quad (f_z = \lambda g_z) \quad (3)$$

$$xy + xz + yz = 32 \quad (g(x,y,z) = 32) \quad (4)$$

Bu denklem sistemini çözmek için birçok yol vardır. Denklemi (1)'i x , denklemi (2)'yi y ve denklemi (3)'ü z ile çarpalım.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

$$xyz = \lambda x(y + z) \quad (5)$$

$$xyz = \lambda y(x + z) \quad (6)$$

$$xyz = \lambda z(x + y) \quad (7)$$

Denklem (5) ile (6) yı eşitlesek,

$$\lambda x(y + z) = \lambda y(x + z)$$

$$\lambda(xy + xz) - \lambda(xy + yz) = 0$$

$$\lambda(xz - yz) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ yada } xz = yz$$

Son eşitlik bize iki olasılık verdi. Birincisi $\lambda = 0$ fakat bu mümkün değildir. Çünkü bu değeri (1) no'lu denklemde yerine koyarsak,

$$yz = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ yada } z = 0$$

Bir kutunun boyutları hakkında konuştuğumuzdan, bunlardan hiçbiri mümkün değildir, dolayısıyla $\lambda = 0$ 'ı eleyebiliriz. İkinci olasılık kalır ve $z \neq 0$ olduğundan,

$$xz = yz \Rightarrow x = y \quad (8)$$



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

Benzer işlemler denklem (6) ve (7) 'yi eşitleyerek yapılırsa

$$yx = zx \Rightarrow z = y \quad (9)$$

Denklem (8) ve (9)'u denklem (4)'te yerine koyarsak;

$$y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2 = 32 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{32}{3}} = \pm 3,266$$

Bununla birlikte, bir kutunun boyutları hakkında konuştuğumuz için pozitif olması gerektiğini biliyoruz. Bu nedenle burada fiziksel anlamda mantıklı olan tek çözüm

$$x = y = z = 3,266$$

Yani, burada bir küpümüz varmış gibi görünüyor.

Burada biraz dikkatli olmalıyız. Sadece tek bir çözümümüz olduğundan, bunların en büyük hacmi verecek boyutlar olduğunu varsaymamız cazip gelebilir.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

Lagrange Çarpanları yöntemi, aminimum veya maksimumlar olması koşuluyla, kısıtlamaya tabi belirli bir fonksiyonu en üst düzeye çıkaracak veya en aza indirecek bir dizi nokta verecektir.

Fonksiyonun kendisi, $f(x,y,z) = xyz$ değişkenlere bazı kısıtlamalar koymadıkça açıkça minimumlara veya maksimumlara sahip olmayacaktır. Elimizdeki tek gerçek kısıtlama, tüm değişkenlerin pozitif olması gerektiğidir. Bu, elbette, fonksiyonun en az sıfıra sahip olduğu anlamına gelir.

Tüm değişkenlerin sınırlama olmaksızın artmasına izin verilirse, fonksiyon maksimum değere sahip olmayacaktır.



KISITLAMALI OPTİMİZASYON

LAGRANGE ÇARPANLARI

Ancak $xy + xz + yz = 32$ kısıtı nedeniyle artmasına izin verilmez.

Burada üç pozitif sayının toplamı var (çünkü x , y ve z pozitiftir) ve toplamın 32'ye eşit olması gerekir. Eğer değişkenlerden biri örneğin x çok büyükse, o zaman her bir çarpımın 32'den küçük olması gerektiğinden, ilk iki terimin 32'den küçük olmasını sağlamak için y ve z çok küçük olmalıdır. Yani, tüm değişkenlerin sınırlama olmaksızın artmasının bir yolu yoktur ve bu nedenle, $f(x,y,z) = xyz$, fonksiyonunun maksimumu olacaktır.

Bu, fonksiyonun maksimum olacağının kesin bir kanıtı değildir, ancak aslında en yüksek değere sahip olması gerektiğini görselleştirmeye yardımcı olmalıdır. Boyutlar: $x = y = z = 3,266$ ise, maksimum hacim alabileceğimizi söyleyebiliriz.