

MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN MODELENMESİ VE SİMÜLASYONU

Dr. Mustafa Kemal SEVİNDİR

sevindir@yildiz.edu.tr

17.10.2018

Mekanistik Modeller I: ADD'ler

Diferansiyel Denklemlerin Ayırt Edici Rolü

Mekaniksel modeller, bir sistemin iç mekaniği hakkında bilgi kullanır.

Fenomenolojik modeller ile mekanistik modeller arasındaki temel fark, fenomenolojik modeller sistemi kara kutu olarak ele alırken, mekanistik modelleme prosedüründe kişiler sistemin içerisine bakar ve bu bilgiyi modelde kullanır.

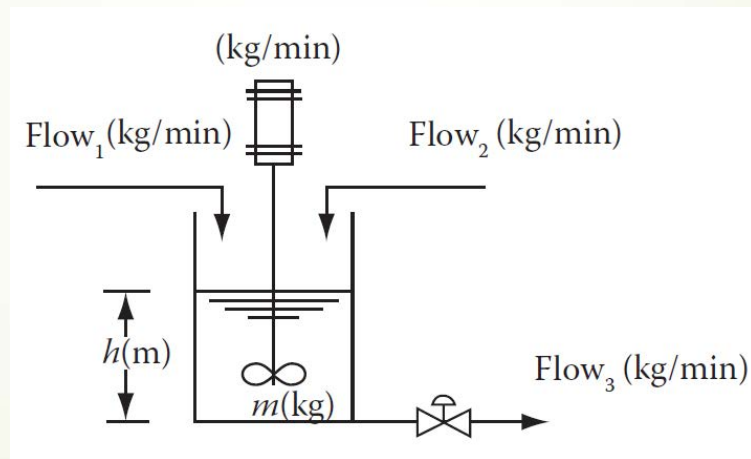
Diferansiyel denklemlerin ayırt edici rolü

1. Mekanistik modeller, bir sistemin içinde çalışan süreçleri dikkate alır.
2. Bilim ve mühendislikte incelenen tipik süreçler, ilgi konusu olan sistemdeki miktar değişiklikleriyle ilgilenirler.
3. Matematiksel olarak, miktar değişiklikleri bilinmeyen fonksiyonların türevlerini içeren denklemlere dönüştürülür, yani diferansiyel denklemler.

Bir Giriş Örneđi

6

İki akışkanın bir tanka girdiği, karıştığı ve bir vanadan bir tek akış olarak çıktığı, şekildeki tankı düşünün.



Karışım Tankı

7

Kararlı Durum şartlarında

$$Akış_1 + Akış_2 = Akış_3$$

ya da

$$Akış_1 + Akış_2 - Akış_3 = 0$$

$$\Sigma \text{Giren akışlar} - \Sigma \text{Çıkan akışlar} = 0$$

$w_1 = Akış_1$; $w_2 = Akış_2$; $w_3 = Akış_3$ olsun. Bu durumda

$$w_1 + w_2 - w_3 = 0 \text{ olur.}$$

$w_1 = 20$ kg/dak ve $w_2 = 10$ kg/dak olduğunu varsayalım.

$$20 + 10 - w_3 = 0$$

$$w_3 = 30 \text{ kg/dak} \quad \text{olur.}$$

Eğer $w_2 = 20$ kg/dak olursa, şimdi $w_3 = 40$ kg/dak olur.

Diğer şeylerin yanı sıra vanadan sıvı çıkışı, şekilde görüldüğü gibi sıvı yüksekliği olarak ifade edilen tanktaki h sıvı yüksekliğine bağlıdır.

Bu bağımlılık ya da ilişki, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$w_3 = C_v \sqrt{h}$$

C_v vana katsayısıdır.

Bu özel örnek için

$C_v = 16,67 \text{ kg} / \text{m}^{1/2} \cdot \text{dak}$ ise denklem

$$w_1 + w_2 - 16,67\sqrt{h} = 0 \quad \text{olur.}$$

Kararlı durum için, çıkış noktasında akışı sağlamak için sıvı yüksekliğine ihtiyacımız var,

$$20 + 10 - 16,67\sqrt{h} = 0$$

$$h = 3,24 \text{ m}$$

Eğer $w_2 = 20$ kg/dak olursa, 40 kg/dak akışı sağlayacak yeni yükseklik,

$$20 + 20 - 16,67\sqrt{h} = 0$$

$$h = 5,76 \text{ m olur.}$$

w_2 değeri 10 kg/dak'dan 20 kg/dak'ya değiştiğinde, tanktaki yükseklik 3,24'ten 5,76 m'ye değişmelidir. Giriş akışındaki değişim anlığa çok yakın olmasına rağmen, yükseklikteki bu değişim anlık değildir.

Başlangıç yüksekliğinden yeni veya son yüksekliğe gitmek biraz zaman alır.

Yeni yüksekliğe ulaşma zamanı önemliyse, başka bir modele ihtiyaç vardır.

Yeni model, giriş akışlarından herhangi biri veya her ikisi de değiştiğinde *tanktaki yüksekliğin ne kadar hızlı değiştiğini* tanımlamalıdır.

$$\sum \text{Sisteme giren k\u00fctle miktar\u0131} - \sum \text{Sistemden \u00e7ıkan k\u00fctle miktar\u0131} = 0$$

Birim zamandaki k\u00fctle, k\u00fctle/zaman birimindeki akışları ifade eder (bu \u00f6rnekte kg/dak).

Denklem sadece sisteme giren ve \u00e7ıkan akışları ifade etmektedir (bu durumda tank); sistem i\u00e7indeki k\u00fctleyi hesaba katmaz.

Denklem, giren ve çıkan akışlar birbirine eşit olmadığında, tanktaki kütle veya sıvı yüksekliğine ne olduğunu tarif etmez. Süreç içindeki bu kütleyi hesaba katmak ve istenilen modeli geliştirmek için denklemi şu şekilde yazmalıyız.

$$\sum \text{Sisteme giren kütle miktarı} - \sum \text{Sistemden çıkan kütle miktarı} = \text{Sistemdeki kütle değişimi}$$

Bu denklemi tanka uygularsak;

$$w_1 + w_2 - w_3 = \frac{dm}{dt}$$

$\frac{dm}{dt}$ terimi, tanktaki (m) kütlesinin zamana (t) göre değişme hızı veya başka bir deyişle, tanktaki kütlenin ne kadar hızlı değiştiği anlamına gelir.

Pozitif bir türev, tanktaki kütlenin arttığını gösterir, çünkü tanka giren kütle çıkan kütleden daha fazladır.

Negatif bir türev, tanktaki kütlenin azaldığını veya tükendiğini gösterir, çünkü depodan çıkan kütle giren kütleden daha fazladır.

Tanktaki sıvı kütlesi, sıvı yüksekliğiyle ilgilidir.

$$m = \rho V = \rho Ah$$

ρ = sıvı yoğunluğu, 1000 kg/m³ sabit kabul edelim

V = tanktaki sıvı hacmi, m³

A = tankın kesit alanı, 0,292 m² sabit kabul edelim

$$\frac{dm}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

$$w_1 + w_2 - C_v \sqrt{h} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

ya da

$$\rho A \frac{dh}{dt} + C_v \sqrt{h} = w_1 + w_2$$

Ya giriş akışının biri ya da her ikisinde de değişiklik olduğunda tanktaki sıvının yüksekliğinin nasıl değiştiğini açıklayan **diferansiyel** bir denklemdir.

Diferansiyel denklem, tanktaki seviyenin nasıl değiştiğini açıklar - genel olarak bunu “süreye bağımlı cevap” veya “dinamik cevap” olarak ifade ederiz - ve bu onun son sabit değeridir.

Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklem, bilinmeyen bir fonksiyonun ve belki de fonksiyonun kendisinin bir veya daha fazla türevini içeren bir denklemdir.

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + x = F(t)$$

x bilinmeyen bir fonksiyondur.

Bilinmeyen fonksiyon **bağımlı değişken** olarak adlandırılır; bu bağımlı değişkenin türevinin alındığı t değişkenine, **bağımsız değişken** denir.

Eşitliğin sağ tarafındaki fonksiyon $F(t)$ **zorlayıcı fonksiyon** olarak adlandırılır, çünkü değiştiğinde bağımlı değişkeni değişmeye zorlar.

Matematikte, türevi ifade etmek için üs (') veya nokta (·) kullanması yaygındır.

$$\frac{dx}{dt} = x' = \dot{x}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x'' = \ddot{x}; \text{ vb.}$$

$$x''' + 3x'' + 4x' + x = F(t)$$

$$\rho Ah' + C_v \sqrt{h} = w_1 + w_2$$

Diferansiyel denklemin **mertebesi**, denklemdaki en yüksek türevidir.

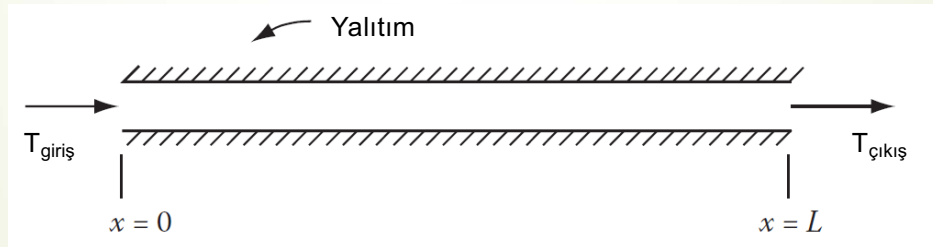
$$x \Big|_{t=0} = x(0)$$

Bu tanımlama **başlangıç koşulu** olarak adlandırılır. Buna **başlangıç değeri problemi** diyoruz.

n inci mertebeden bir diferansiyel denklemde, modeli tamamlamak için n tane başlangıç koşuluna ihtiyaç vardır.

Şu ana kadar tartışılan diferansiyel denklemlerdeki bağımlı değişken, yalnızca bir bağımsız değişkenin fonksiyonudur; örneğin, karışım tankı örneğinde, h yüksekliği sadece t zamanının bir fonksiyonudur. Bu diferansiyel denklemler, **adi diferansiyel denklemler** veya **ODE'ler** olarak adlandırılır.

Bazen bağımlı değişken birden fazla bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olabilir. Bir sıvının aktığı iyi yalıtılmış uzun bir boru düşünün. Başlangıç kararlı durumunda, sıvının sıcaklığı boru boyunca aynıdır; bu sıcaklığı $T_{\text{başlangıç}}$ olarak adlandıralım ve $T_{\text{giriş}} = T_{\text{başlangıç}}$.



Şimdi, $t=0$ olduğunu, giriş sıcaklığının $T_{\text{giriş}}$ 30°C arttığını varsayalım. Borunun içindeki sıvı sıcaklığı, bir dereceye kadar (anlık olarak değil) son değerine kadar artar, fakat tüm boru boyunca aynı anda olmaz. Yani, girişteki sıcaklık, $0,1L$ kadar mesafeden önce değişmeye başlar ve $0,1L$ 'deki sıcaklık da $0,2L$ 'dekinden önce başlar ve bu şekilde devam eder. Boru boyunca T olarak adlandırılan sıcaklık, x mesafesi ve t zamanının bir fonksiyonudur; $T(x,t)$ şeklinde gösterilir.

Bu durumda diferansiyel denklem, $[\partial T(x,t)] / \partial t$ ve $[\partial T(x,t)] / \partial x$ gibi $T(t,x)$ 'in kısmi türevlerini içerecektir; bu denklemler **kısmi diferansiyel denklemler** veya **PDE'ler** olarak adlandırılır. Birinci mertebeden bir PDE için başlangıç koşulu tüm x değerleri için $T(t=0) = T_{\text{başlangıç}}$ ve t zamanı için $T(x=0) = T_{\text{başlangıç}}$ şeklindedir.

Zorlayıcı Fonksiyonlar

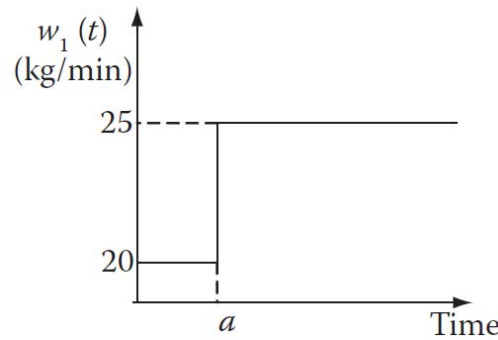
Bir modelin önemli bir kullanımı, bazı değişkenlerin bazı diğer değişkenleri nasıl etkilediğini veya zorlayıcı fonksiyonların bağımlı değişkenleri nasıl etkilediğini incelemektir.

Örneğin, karışım tankı, tanktaki sıvı seviyesinin farklı zorlayıcı fonksiyonlara ($w_1(t)$ ve/veya $w_2(t)$ deki değişim) nasıl tepki verdiğini incelemek için kullanılabilir.

Bu değişiklikler, bir **rampa**, bir **sinüs dalgası**, bir **atım(puls)**, bir **adım değişimi** veya daha başka bir şekilde olabilir.

Adım değışikliği çok yaygın bir zorlayıcı fonksiyondur ve bu nedenle özel dikkat gerektirir.

Anlamını açıklamak için, $t=a$ anında, $w_1(t)$ 'nin anlık olarak 20 kg/dak'dan 25 kg/dak'ya değıştiğini düşünün;



Akış 1'in adım değışimi.

Şekilde görüldüğü gibi, değişim bir adım şeklindedir. Matematiksel modelleme bu değişimi matematiksel olarak tanımlamayı gerektirir. $u(t-a)$ terimi, (a) zamanında birim adım değişimini tanımlamak için kullanılır; yani, terimin kısa bir gösterimi

dir.

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

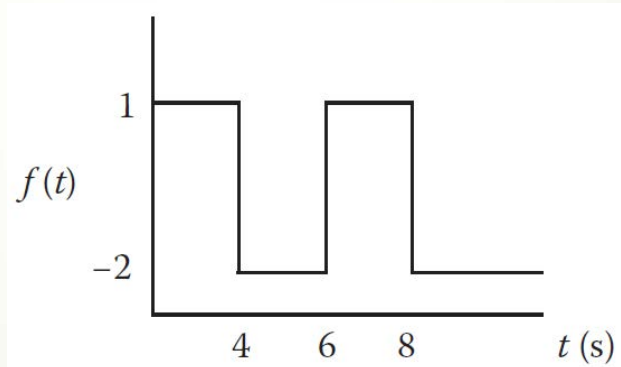
Esas olarak, $(t - a)$ argümanı sıfırdan küçük olduğu sürece, fonksiyon $u = 0$ dir.

$(t - a)$ argümanı sıfıra eşit veya büyük olduğunda, fonksiyon $u = 1$ dir.

Daha sonra, şekilde gösterilen örnek için (w_1 'deki adım değişimi), $w_1(t) = 20 + 5u(t - a)$ matematiksel ifadesi $t=a$ anında $w_1(t)$ 'nin 20 kg/dak'dan 25 kg/dak'ya değişimini ifade eder.

Örnek 1

Şekilde gösterilen $f(t)$ zorlayıcı fonksiyonunu düşünün. $f(t)$ için matematiksel bir ifade oluşturun.



Örnek 1 için zorlayıcı fonksiyon

Şekilde görüldüğü gibi, 4, 6 ve 8 zamanlarında üç adım değişimi vardır ve her değişim 3 büyüklüğüne sahiptir. İfade

$$f(t) = 1 - 3u(t - 4) + 3u(t - 6) - 3u(t - 8)$$

$t < 4$ olduğunda, tüm u değerleri sıfırdır ve $f(t) = 1$ 'dir.

$t \geq 4$ veya $t < 6$ olduğunda, $u(t - 4) = 1$, $u(t - 6) = u(t - 8) = 0$, ve $f(t) = -2$ 'dir.

$t \geq 6$ veya $t < 8$ olduğunda, $u(t - 4) = u(t - 6) = 1$, $u(t - 8) = 0$ ve $f(t) = 1$ 'dir.

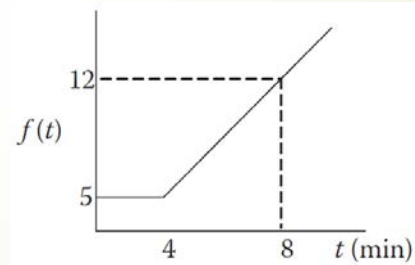
Bu sunuma dayanarak okuyucu, $t \geq 8$ 'den sonra neden $f(t) = -2$ olduğunu anlayabilir.

Örnek 2

Şekilde gösterilen $f(t)$ zorlayıcı fonksiyonunu düşünün. $f(t)$ için matematiksel bir ifade oluşturun.

Bu, 4.üncü dakikadan başlayan bir rampa değişimidir. İfade

$$f(t) = 5 + 7/4 (t - 4) u(t - 4)$$

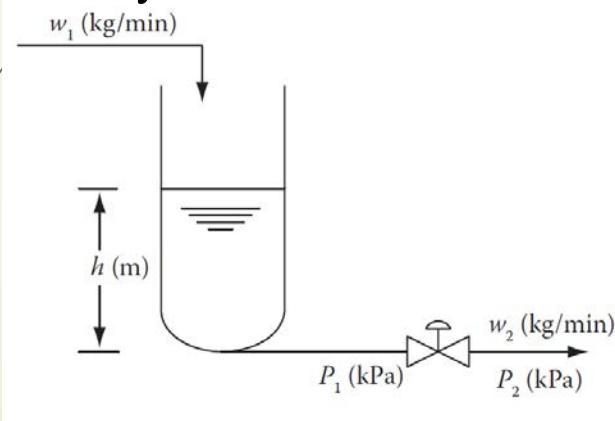


Örnek 2 için zorlayıcı fonksiyon

Kütle Dengesi

Örnek 1

Şekilde gösterilen tankı düşünün. Sıvının 1000kg/m^3 yoğunluğa sahip bir su olduğunu, tankın alanının 1m^2 olduğunu, vananın çıkış basıncının 90 kPa olduğunu, kararlı durumda depoya sıvı akışının $10\text{m}^3/\text{dak}$ olduğunu ve vana denkleminin aşağıdaki denklemle verildiğini varsayalım.



$$f_2 = 1,5\sqrt{P_1 - P_2} ; \text{m}^3/\text{dak}$$

Sıvı seviyesi

(a) Kararlı durumdaki sıvı seviyesini bulun.

(b) Giriş hacimsel debisi $2 \text{ m}^3/\text{dak}$ değiştiğinde veya $f_1 = 10 + 2u(t)$ olduğunda tanktaki seviyenin nasıl değiştiğini açıklayan modeli oluşturun.

(a) Kararlı durumda, tanka giren kütleli debi, tanktan çıkan kütleli debiye eşit olmalıdır.

$$w_1 - w_2 = 0$$

$$w_1 = w_2$$

$$w_1 = w_2 = f_1 \cdot \rho = 10 \frac{\text{m}^3}{\text{dak}} \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{dak}}$$

Çıkış hacimsel debisi

$$f_2 = \frac{w_2}{\rho} = \frac{1 \times 10^4 \frac{kg}{dak}}{1000 \frac{kg}{m^3}} = 10 \frac{m^3}{dak} \quad \text{dır.}$$

Bu örnekte, $f_1 = f_2$, çünkü giriş ve çıkış yoğunlukları (ρ sabit) eşittir.

Bu akışı sağlayan basıncı bulmak için vana denklemini kullanırız,

$$f_2 = 10 = 1,5\sqrt{P_1 - P_2} = 1,5\sqrt{P_1 - 90} \rightarrow P_1 = 134,44 \text{ kPa}$$

Son olarak, P_1 basıncını oluşturan sıvı seviyesi bulmak için aşağıdaki denklem kullanılır.

$$\begin{aligned} P_1 &= 134,44 \text{ kPa} = 101,32 + \frac{\rho gh}{1000} \\ &= 101,32 + \frac{\left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) h}{1000} \end{aligned}$$

$$h = 3,38 \text{ m}$$

$$(b) \rho f_1 - 1,5\rho \sqrt{101,32 + \frac{\rho g h}{1000}} - P_2 = \rho A \frac{dh}{dt}$$

$$\rho f_1 - 1,5\rho \sqrt{11,32 + 9,8h} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

$$\rho A \frac{dh}{dt} + 1,5\rho \sqrt{11,32 + 9,8h} = \rho f_1 = \rho[10 + 2u(t)]$$

birinci mertebeden **lineer (doğrusal) olmayan** diferansiyel denklemdir.

Doğrusal Diferansiyel Denklem Tanımı

Bir doğrusal diferansiyel denklem,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)y = r(x)$$

şeklinde yazılabilir.

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, ve r ya sadece bağımsız değişkenin ya da sabitlerin fonksiyonudur. Bağımsız değişken x 'in doğrusal fonksiyonları olmak zorunda değildir.

$r(x)$ zorlayıcı fonksiyon olarak adlandırılır, çünkü değiştiğinde, bağımlı değişken y 'yi değiştirmeye zorlar.

Aşağıdaki diferansiyel denklemi düşünün:

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = R r(x) + S s(x)$$

Bu denklemin iki zorlayıcı fonksiyonu vardır ve açıkçası daha fazlada olabilir. Doğrusal bir sistem için,

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = R r(x)$$

denkleminin çözümü ile

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = S s(x)$$

denkleminin çözümünün toplanması yukarıdaki denklemin bir çözümüne eşittir. Buna **Süperpozisyon (üst üste binme) Prensibi** denir.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

diferansiyel denklemindeki gibi sağ taraf sıfıra eşitse, denklem **homojen** bir denklem olarak adlandırılır; aksi halde, **homojen olmayan** bir denklemdir.

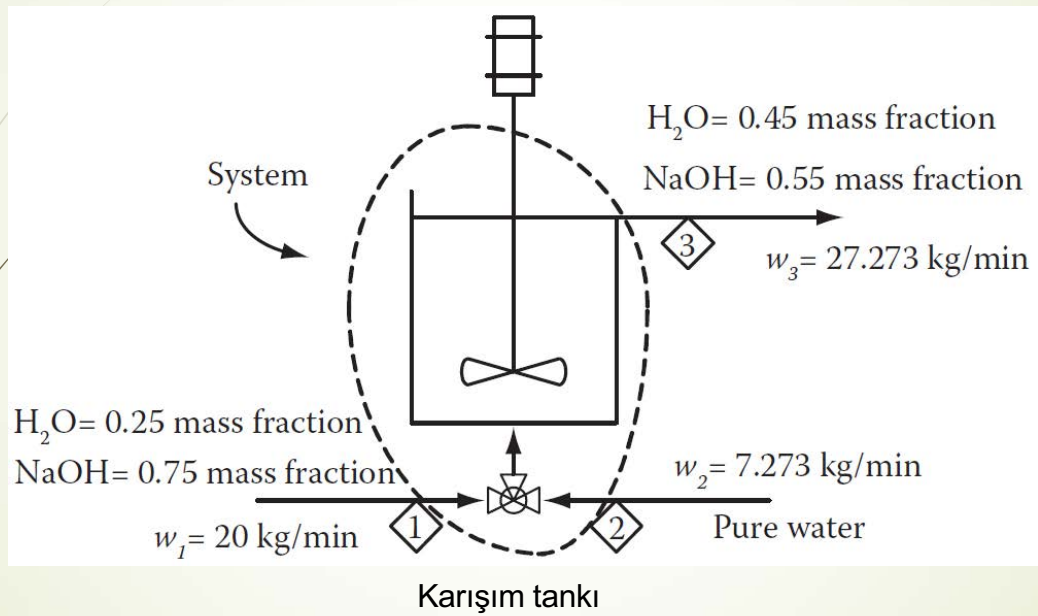
$a_2(x)$, $a_1(x)$,... ve $a_0(x)$ gibi bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olan katsayılara sahip doğrusal diferansiyel denklemlerin analitik çözümü oldukça zordur. Sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri kolaydır.

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = r(x)$$

Kütle Dengesi

Örnek 2

Şekilde gösterilen karışım tankını düşünün.



Bu tankta, yüksek konsantrasyonlu bir NaOH ve H₂O (akış 1) çözeltisi, saf su (akış 2) kullanılarak seyreltilmektedir. Konsantre çözeltideki NaOH kütle oranı 0,75'tir. Şekil karalı durum şartlarını göstermektedir. Tanktan sıvı çıkışı, taşma yoluyla sağlanmaktadır, tank 0,2845 m³'lük bir hacme sahiptir ve tankta biriken sıvının yoğunluğu 1200 kg/m³ (sabit) olarak kabul edilebilir. Ayrıca, tankın iyice karıştırıldığını varsayın (yani, NaOH konsantrasyonunun, çıkan akışkan dahil, tüm hacimde aynı).

NaOH'un çıkış konsantrasyonunun, 1 numaralı akışın konsantrasyonunun, bir adım değişikliğinde NaOH'ın kütle oranının 0,67'ye değişmesiyle, nasıl değiştiğini açıklayan modeli oluşturun.

$$\begin{aligned} & \sum \text{Birim zamanda giren} \\ & \quad \text{NaOH miktarı} - \sum \text{Birim zamanda çıkan} \\ & \quad \text{NaOH miktarı} \\ & = \sum \text{Sistemdeki NaOH} \\ & \quad \text{değişim miktarı} \end{aligned}$$

$$w_1^{NaOH} - w_3^{NaOH} = \frac{dm^{NaOH}}{dt}$$

$$w_1 x_1^{NaOH} - w_3 x_3^{NaOH} = \frac{dm x_3^{NaOH}}{dt}$$

$$m = \rho V = 1200 \cdot 0,2845 = 341,1 \text{ kg}$$

$$w_1 x_1^{NaOH} - w_3 x_3^{NaOH} = m \frac{dx_3^{NaOH}}{dt}$$

$$\frac{w_1}{m} x_1^{NaOH} - \frac{w_3}{m} x_3^{NaOH} = \frac{dx_3^{NaOH}}{dt}$$

$$\frac{dx_3^{NaOH}}{dt} + 0,0799 \cdot x_3^{NaOH} = 0,0585 \cdot x_1^{NaOH}$$

$$12,5 \cdot \frac{dx_3^{NaOH}}{dt} + x_3^{NaOH} = 0,73 \cdot x_1^{NaOH}$$

$$x_3^{NaOH} = 0,55 - 0,05857(1 - e^{-\frac{t}{12,5}})$$

Kütle Dengesi

Örnek 3

Aynı karışım tankını düşünün. Bu sefer, NaOH'un çıkış konsantrasyonunun, bir adım değişikliğinde, NaOH'ın kütle oranının 0,67 ve aynı zamanda, 1 numaralı akışın, bir adım değişikliğinde 15 kg/dak. değiştiğinde nasıl değiştiğini açıklayan modeli oluşturun.

Model oluşturmaya daha önce olduğu gibi, yani NaOH üzerinde bir kütle dengesi ile başlanır.

$$341,1 \frac{dx_3^{NaOH}}{dt} + w_3 x_3^{NaOH} = w_1 x_1^{NaOH}$$

1 denklem, 2 bilinmeyen $[w_3, x_3^{NaOH}]$

$$w_1 + w_2 - w_3 = 0$$

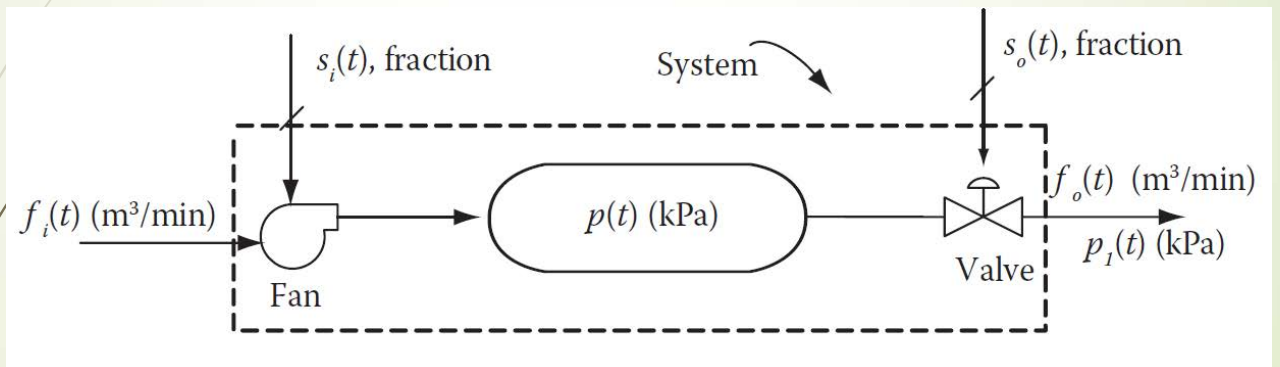
2 denklem, 2 bilinmeyen

$$341,1 \frac{dx_3^{NaOH}}{dt} + (w_1 + w_2) x_3^{NaOH} = w_1 x_1^{NaOH}$$

Kütle Dengesi

Örnek 4

Şekilde gösterilen gaz tankını düşünün. Bir fan tankın içerisine hava üflemede ve hava tanktan bir vana ile dışarı çıkmaktadır.



Gaz sistemi

Bu örnek için, fan tarafından sağlanan hava miktarının aşağıdaki denklem yardımıyla verildiğini varsayalım.

$$f_i(t) = 0,453s_i(t)$$

$f_i(t)$ = hava debisi (m³/dak) @T= 23°C, P=101,32 kPa

$s_i(t)$ = fana gönderilen sinyal, (0 – 1)

Çıkış vanasından çıkan hava miktarı aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir.

$$f_o(t) = 2,078 \times 10^{-3} s_o(t) \sqrt{p(t)[p(t) - p_1(t)]}$$

$f_o(t)$ = hava debisi, m³/dak @ T=23°C P=P_{tank}

$s_o(t)$ = vanaya gönderilen sinyal, (0 – 1)

$p(t)$ = tanktaki basınç, kPa

$p_1(t)$ = vana çıkış basıncı, kPa

Tankın hacmi 0,569 m³'tür ve işlemin 23°C'de izotermal olarak gerçekleştiği varsayılabilir.

İlk kararlı durum koşulları şunlardır:

$$f_i(0) = f_o(0) = 0,2265 \text{ m}^3/\text{dak}$$

$$p(0) = 275,788 \text{ kPa}$$

$$p_1(0) = 101,325 \text{ kPa}$$

$$s_i(0) = 0,5$$

$$s_o(0) = 0,1825$$

Tanktaki basıncı; fan sinyalindeki $s_i(t)$, vana sinyalindeki $s_o(t)$, ve vana çıkış basıncındaki $p_1(t)$ değişimlere bağlayan matematiksel modeli oluşturun.

Fan, tank ve çıkış vanası olarak tanımlanan sistem etrafındaki kararsız durum kütle dengesi, başlangıç ilişkisini sağlar. Yani,

$$w_i(t) - w_o(t) = \frac{dm(t)}{dt}$$

yada

$$\rho_i f_i(t) - \rho_o f_o(t) = \frac{dm(t)}{dt}$$

1 denklem, 4 bilinmeyen [$f_i(t)$, ρ_o , $f_o(t)$, $m(t)$]

Giriş havasının basıncı ve sıcaklığı bilindiğinden, yoğunluğu da bilinir ve aşağıdaki denklem ile hesaplanabilir (hava moleküler kütlesi 28,9 g/mol).

$$\begin{aligned}\rho_i &= \bar{\rho}_i \cdot \text{moleküler k\u00fctle} = \frac{p_i \cdot \text{molek\u00fcler k\u00fctle}}{RT_i} \\ &= \frac{(101325 \text{ Pa})(28,9 \frac{\text{g}}{\text{mol}})}{(8,314 \text{ Pa} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{molK}})(296\text{K})}\end{aligned}$$

$$\rho_i = 1189,85 \text{ g/m}^3$$

Çıkış yoğunluğu,

$$\rho_o = \overline{\rho_o} \cdot \text{moleküler kütle} = \frac{p(t) \cdot \text{moleküler kütle}}{RT}$$

2 denklem, 5 bilinmeyen [$p(t)$]

Fandan elde edilen başka bir denklem:

$$f_i(t) = 0,453s_i(t)$$

3 denklem, 5 bilinmeyen

Vanadan elde edilen başka bir denklem:

$$f_o(t) = 2,078 \times 10^{-3} s_o(t) \sqrt{p(t)[p(t) - p_1(t)]}$$

4 denklem, 5 bilinmeyen

Tanktaki basınç düşük olduğundan, tanktaki mol miktarını basınçla ilişkilendirmek için ideal gaz denklemi kullanılabilir.

$$p(t)V = n(t)RT$$

5 denklem, 6 bilinmeyen $[n(t)]$

Aşağıdaki denklem kullanılarak

$$n(t) = \frac{m(t)}{\text{molecular mass}}$$

6 denklem, 6 bilinmeyen

Bu denklem dizisi, bu süreç için matematiksel modeli oluşturmaktadır. Çözüm, tanktaki basıncın, $s_i(t)$, $s_o(t)$ ve $p_1(t)$ değişikliklerine nasıl tepki verdiğini açıklar.

Elde edilen denklem, birinci dereceden adi doğrusal olmayan diferansiyel denklem olacaktır.

Isıl Sistemler

Enerjinin Korunumu

Kendimizi atomik fizyon içermeyen süreçlere sınırlarsak, enerji, kütle gibi korunur.

$$\sum \text{Sisteme giren} \text{ Enerji Miktarı} - \sum \text{Sistemden çıkan} \text{ Enerji Miktarı} = \sum \text{Sistem içerisinde değişen} \text{ Enerji Miktarı}$$

$$\dot{q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad \text{Isı İletimi (Fourier Kanunu)}$$

$$\dot{q} = hA(T - T_f) \quad \text{Isı Taşınımı (Newton'un Soğuma Kanunu)}$$

$$E = mC(T - T_{ref}) \quad \text{Depolanan İç Enerji (reaktif olmayan, tek fazlı, katı malzeme)}$$

$$\text{Sistem içerisindeki Enerji Değişimi} = dE/dt = mC dT/dt$$

Isıl Sistemler

Örnek 1: Taşınım ile olan Isı Geçişi

Yüksek başlangıç sıcaklığındaki (T_0) küresel çelik peletler, T_f sıcaklığında bir sıvı içeren çok büyük bir soğutma banyosuna bırakılarak sertleştirilmektedir.

Soğutma banyosuna bırakıldıktan sonra zamanın bir fonksiyonu olarak T peletin sıcaklığı için bir ifade oluşturun.

Bu problemi çözmek için iki varsayım yapacağız:

1. Banyo sıcaklığı T_f sabit kalacak.
2. Pelet içindeki sıcaklık üniformdur - pelet içinde radyal pozisyona bağlı değil fakat zamana bağlıdır. Bu, peleti bir yığık sistemi olarak işlemeye eşdeğerdir.

Peletteki Enerji Değişimi = Pelete Giren Enerji - Peletten Çıkan Enerji

$$mC \frac{dT}{dt} = 0 - hA(T - T_f)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_f)$$

birinci mertebeden bir denklemdir, bundan dolayı bir tane başlangıç koşuluna ihtiyacımız var.

$$T(0) = T_0$$

$$\alpha = \frac{hA}{mC}$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_f)} = - \int \alpha dt$$

İntegre edersek,

$$\ln(T - T_f) = -\alpha t + C_1$$

Başlangıç koşulunu uygularsak, $T(0) = T_0$

$$\ln(T_0 - T_f) = C_1$$

Yeniden düzenlersek,

$$\ln\left(\frac{T - T_f}{T_0 - T_f}\right) = -\alpha t$$

elde edilir.

$$T = T_f + (T_o - T_f) \exp(-\alpha t)$$

Bu çözüm, negatif bir üste sahip olması nedeniyle **azalan üstel fonksiyon** olarak adlandırılır.

Özellikle, burada α 'nın sadece zaman sabiti τ 'nın tersi olduğuna dikkat edilmelidir.

Zaman sabiti, birinci mertebeden bir sürecin gerçekleşmesi için gereken süreyi gösterir.

Göz önünde bulundurulması gereken birkaç nokta, $t=0$ ve $t=\infty$ olduğunda, T sıcaklığının değerleridir. $t=0$ 'da, üs bire gider ve denklem basitçe

$$T(0) = T_f + T_o - T_f = T_o$$

olur.

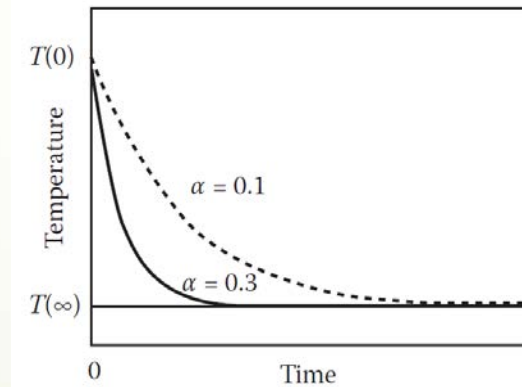
Umarım bu hiç de şaşırtıcı değildir, çünkü bizim başlangıç koşulumuzdu.

Zaman (t) sonsuza yaklaştıkça, üs sıfıra gider ve denklem

$$T(\infty) = T_f$$

olur.

Sıcaklık-zaman grafiği, $\alpha = hA / mC$ değerine bağlıdır. Bununla birlikte, şekilde gösterildiği gibi α 'nın iki farklı değer için, T_0 'dan başlayıp T_f 'ye doğru azalan genel karakteristiğine sahip olacak, asimptotik olarak yaklaşacaktır.



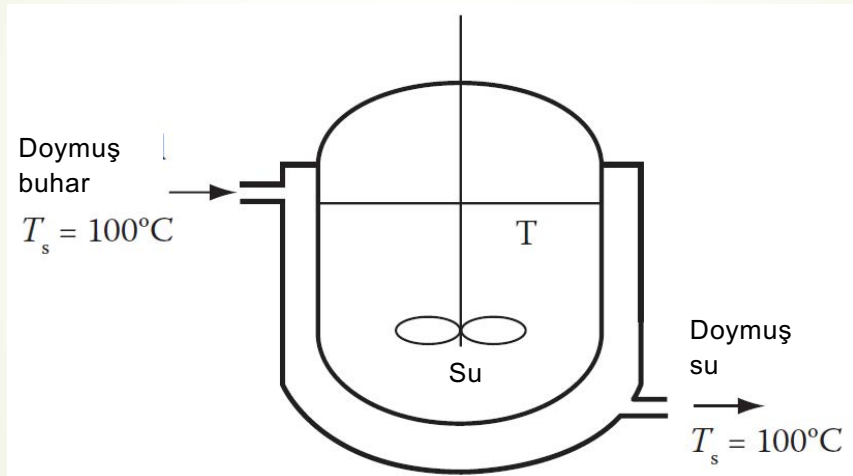
α değerini arttırmak (zaman sabitini azaltmak), azalmanın daha hızlı gerçekleşmesini sağlar. Pratik olarak, azalma $t = 5\tau$ 'den sonra bitecektir.

Isıl Sistemler

Örnek 2: Bir sıvının ceketli, karıştırılan bir kapta ısıtılması

74

Karıştırılan bir tank (şekle bakınız), başlangıçta 25°C'de 30 m³ su içermektedir.



Suyun ceketli, karıştırılan bir kapta ısıtılması

17.10.2018

Su, kabı çevreleyen ceket içinde 100°C 'de yoğuşturulan doymuş buhar ile ısıtılmaktadır. Ceketin ısı transfer yüzey alanı 80 m^2 'dir ve yoğuşma buharı ile kaptaki su arasındaki toplam ısı transfer katsayısı $500 \text{ J/m}^2\text{s}^{\circ}\text{C}$ 'dir. Suyun yoğunluğu ve ısı kapasitesi sırasıyla 1000 kg/m^3 ve $4200 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ 'dir. Tanktaki suyun 50°C sıcaklığa ulaşması için geçmesi gereken süreyi belirleyin.

Tanktaki su için enerji dengesi yazarak matematiksel bir model geliştirmeye başlıyoruz:

$$\sum \text{Sudaki Enerji Değişimi} = \sum \text{Suya Giren Enerji} - \sum \text{Sudan Çıkan Enerji}$$

$$\dot{q}_{in} = UA(T_s - T)$$

A ceketin yüzey alanı, T_s yoğuşan buharın sıcaklığı, T tanktaki suyun sıcaklığı.

$$mC \frac{dT}{dt} = UA(T_s - T)$$

Başlangıç koşulu, $T(0) = T_0 = 25^\circ\text{C}$.

$$\alpha = \frac{UA}{mC}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_s)$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_s)} = - \int \alpha dt$$

İntegre edersek,

$$\ln(T - T_s) = -\alpha t + C_1$$

Başlangıç koşulunu uygularsak, $T(0) = T_0$

$$\ln(T_0 - T_s) = C_1$$

Yeniden düzenlersek,

$$\ln\left(\frac{T - T_s}{T_0 - T_s}\right) = -\alpha t$$

elde edilir.

Kütle (m), yoğunluk (ρ) ile hacmin (V) çarpımına eşittir. α değeri aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{UA}{\rho VC} \\ &= \left(\frac{500 \text{ J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) \left(\frac{80 \text{ m}^2}{1} \right) \left(\frac{\text{m}^3}{1000 \text{ kg}} \right) \left(\frac{1}{30 \text{ m}^3} \right) \left(\frac{^\circ\text{C} \cdot \text{kg}}{4200 \text{ J}} \right) \\ &= 0,00032 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

Başlangıç sıcaklığı $T_0=25^\circ\text{C}$, buhar sıcaklığı $T_s=100^\circ\text{C}$ 'dir ve biz suyun sıcaklığının $T=50^\circ\text{C}$ 'ye ulaşması için gereken süreyi bulmak istiyoruz.

$$\ln\left(\frac{50 - 100}{25 - 100}\right) = -0,00032t$$

Yukarıdaki eşitlikten t 'yi çözersek, kaptaki suyun 50°C 'ye ulaşması için 1270 saniyenin (veya yaklaşık 21 dak) gerekli olduğunu buluruz.