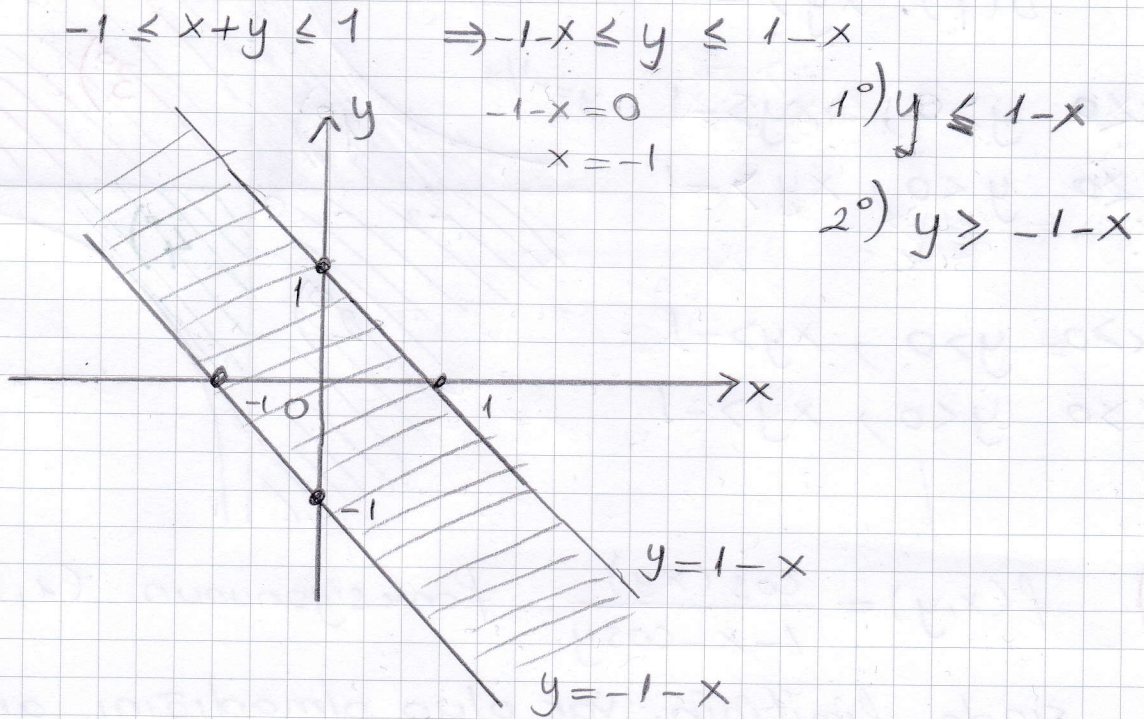


## - Uygulama -

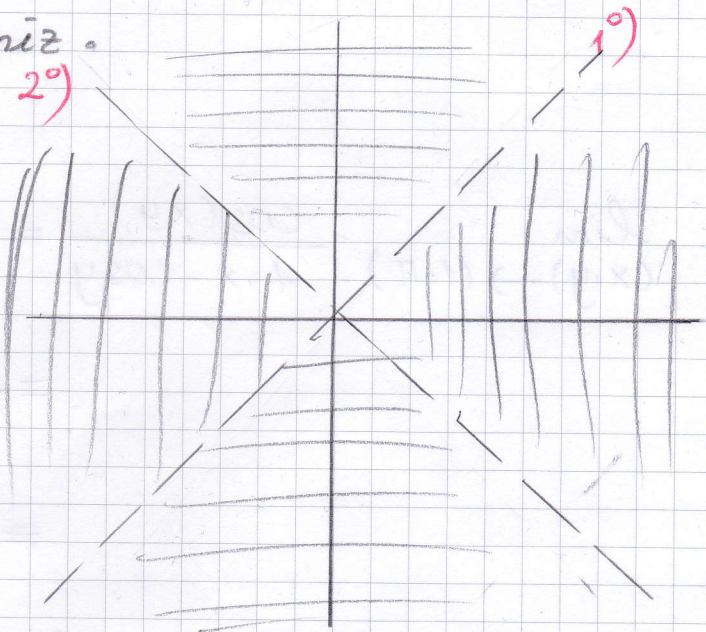
- 1)  $f(x,y) = z = \arcsin(x+y)$  fonksiyonunun tanım kümesini bulup düzlemlerde gösteriniz.



- 2)  $f(x,y) = z = \frac{xy}{x^2-y^2}$  fonksiyonunun tanım kümesini

bulup düzlemlerde gösteriniz.

$x^2 - y^2 \neq 0$   
 $(x-y)(x+y) \neq 0$   
 $x-y \neq 0 \quad (x+y) \neq 0$   
1°)  $x \neq y$       2°)  $x \neq -y$



3°)  $z = \ln(1+xy)$  fonksiyonunun tanım bölgesini bulunuz ve düzlemde gösteriniz.

$$1+xy > 0$$

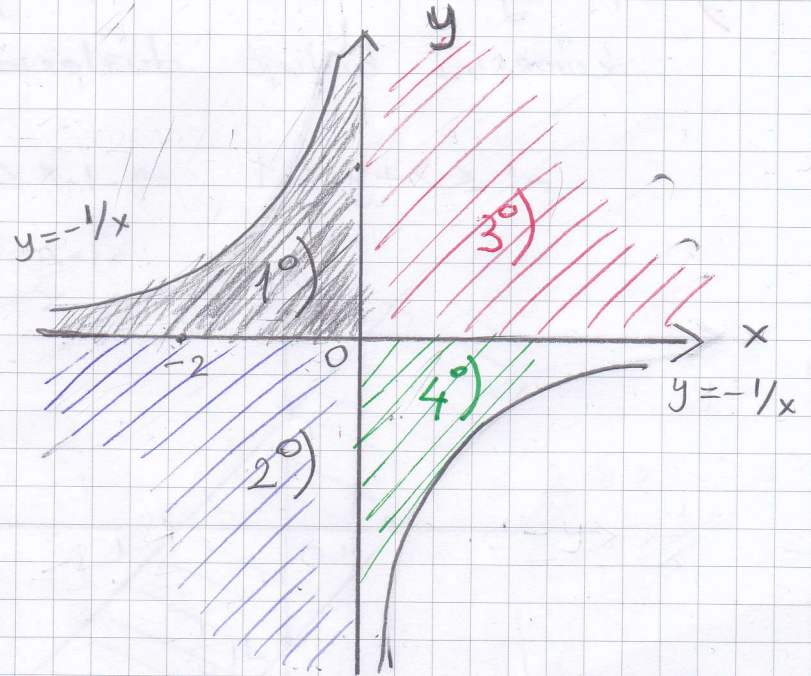
$$D(f): xy > -1$$

$$1^\circ) x < 0, y > 0, xy > -1$$

$$2^\circ) x < 0, y < 0, xy > -1$$

$$3^\circ) x > 0, y > 0, xy > -1$$

$$4^\circ) x > 0, y < 0, xy > -1$$



4°)  $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}$  fonksiyonunun  $(1, \pi)$  noktasında limitin var olup olmadığını araştırınız.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y} &= \lim_{y \rightarrow \pi} \left[ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{\cos y}{\cos y} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \lim_{y \rightarrow \pi} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{\cos(x\pi)}{1-x-(-1)} \right] \\ &= \frac{-1}{1} = -1 \end{aligned}$$

Farklı yollardan alınan limitler eşit olmadığından fonksiyon  $(1, \pi)$  noktasında limite sahip değildir.

5)  $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4}$  fonksiyonunun  $(0,0)$  noktasında limitinin varlığını inceleyiniz.

$y=kx$  doğrusu boyunca yaklaşıalım;

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{k^2 x^4}{2x^4 + k^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 \cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(2+k^4)} = \frac{k^2}{2+k^4}$$

limitin sonucu  $k$ 'nin farklı değerleri için farklı olacağından fonksiyon orijinde limite sahip değildir.

6°)  $z = \sin(xy)$  fonksiyonunun grafiğine  $(\frac{\pi}{3}, -1)$  noktasında teğet olan düzlemin ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.  $z|_{(\frac{\pi}{3}, -1)} = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$F(x,y,z) = z - \sin(xy) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y \cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, -1)} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x \cos(xy) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, -1)} = -\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, -1)} = 1$$

Teğet düzlemin denklemi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, -1)} (x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, -1)} (y + 1) + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(\frac{\pi}{3}, -1)} (z + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$$

$$\frac{1}{2} (x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6} (y + 1) + (z + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$$

Normal doğrusunun parametrik denklemleri:

$$x = \frac{\pi}{3} + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(\pi/3, -1)} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\lambda}{2}$$

$$y = -1 + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(\pi/3, -1)} \quad y = -1 - \frac{\lambda \pi}{6}$$

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(\pi/3, -1)} \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda$$

7)  $z = \ln(x^2 + y^2)$  fonksiyonunun  $(1, -2)$  noktasındaki Teget düzlemleri ve normal doğrusunun denklemlerini bulunuz.

$$F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) - z = 0$$

$$z|_{(1, -2)} = \ln(1 + 4) = \ln 5$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(1, -2)} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(1, -2)} = \frac{-4}{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

Teget düzlemin denklemleri:

$$\frac{2}{5}(x-1) - \frac{4}{5}(y+2) - (z - \ln 5) = 0$$

Normal doğrusunun parametrik denklemleri:

$$x = 1 + \frac{2\lambda}{5}, \quad y = -2 - \frac{4\lambda}{5}, \quad z = \ln 5 - \lambda$$

$$8^o) f(x,y) = \begin{cases} (x^3+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu için  $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$  türevlerinin varlığını araştırınız.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \cdot \sin \frac{1}{h^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k \cdot \sin \frac{1}{k^2}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \sin \frac{1}{k^2} \\ &\text{limit mevcut değil.} \end{aligned}$$

0 halde fonksiyonun x değişkenine göre (0,0)'da kısmi türevi vardır, y değişkenine göre kısmi türevi yoktur.

9^o)  $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  fonksiyonu için  $f(3.01, 2.99)$  değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

(3,3) noktasında lineer yaklaşımla hesaplayalım.

$$\underline{1.yol} \quad L(x,y) = f(3,3) + f_x(3,3)(x-3) + f_y(3,3)(y-3)$$

$$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x} \quad f_x(x,y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$f(3,3) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad f_x(3,3) = \frac{-3}{18} \quad f_y(3,3) = \frac{3}{18}$$

$$= -\frac{1}{6} \quad = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow L(x,y) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)(x-3) + \left(\frac{1}{6}\right)(y-3)$$

$$f(3.01, 2.99) \cong L(3.01, 2.99)$$

$$\cong \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}(3.01-3) + \frac{1}{6}(2.99-3)$$

$$\cong \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}(0.01) + \frac{1}{6}(-0.01)$$

$$\cong \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(0.01)$$

2.701

Toplam diferansiyel ile hesaplayalım;

$$\Delta z \cong dz$$

$$\Delta x = dx, \Delta y = dy$$

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \cong \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} dy$$

$$a=3 \quad \Delta x = 0.01$$

$$b=3 \quad \Delta y = -0.01$$

$$\Rightarrow f(3.01, 2.99) \cong f(3,3) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(3,3)} \cdot (0.01) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(3,3)} \cdot (-0.01)$$

$$\cong \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)(0.01) + \frac{1}{6} \cdot (-0.01)$$

$$\cong \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(0.01)$$

10°)  $f$  tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere  $z = f(x^2 - y^2)$  fonksiyonunun

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot f'(x^2 - y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \cdot f'(x^2 - y^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} &= y \cdot [2x f'(x^2 - y^2)] + x [-2y f'(x^2 - y^2)] \\ &= 2xy f'(x^2 - y^2) - 2xy f'(x^2 - y^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

11°)  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$

denkleminde  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  değişken dönüşümünü yaparak denklemi yeni değişkenler cinsinden ifade ediniz.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$z = f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = F(\rho, \theta)$$

son değişkenler  $\rho$  ve  $\theta$  ama buradan  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial z}{\partial y}$ 'yi yeni değişkenler cinsinden bulmak zordur. Tersine düşünmek işi kolaylaştırır.

$$z = f(\rho, \theta) = F(x^2 + y^2, \arctan \frac{y}{x}) = f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{\rho \cos \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\rho \sin \theta}{\rho^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{\rho \sin \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\rho \cos \theta}{\rho^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
 &= \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \rho \cos \theta \cdot \left[ \cos \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] + \rho \sin \theta \left[ \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \rho^2$$

$$\rho \cos^2 \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} + \rho \sin^2 \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} = \rho^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \rho \quad \text{denklemin yeni şeklidir.}$$

12°)  $z = 3axy - x^3 - y^3$  fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız. ( $a > 0$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= 3ay - 3x^2 = 0 \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= 3ax - 3y^2 = 0
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{aligned}
 -3axy + 3x^3 &= 0 \\
 3axy - 3y^3 &= 0 \\
 \hline
 x^3 - y^3 &= 0 \\
 x^3 &= y^3 \\
 x &= y
 \end{aligned}$$

A(0,0)      B(a,a)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 3ay - 3y^2 &= 0 \\
 3y(a - y) &= 0 \\
 y=0 & \quad y=a \\
 \Downarrow & \quad \Downarrow \\
 x=0 & \quad x=a
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3a$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6y$$

$$A(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3a = B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 = C$$

$$B^2 - AC = 9a^2 - 0 = 9a^2 > 0$$

$(0,0)$  Eyer noktası

$$B(a,a)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6a = A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3a = B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6a = C$$

$$B^2 - AC = 9a^2 - 36a^2 = -27a^2 < 0$$

$$A = -6a < 0$$

$(a,a) \rightarrow \text{max. nokta.}$

$f(a,a) = a^3 \text{ max. de\u011fer.}$

130)  $z = x^2 + xy + y^2 - ax - by$  fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - a = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - b = 0$$

$\Rightarrow$

$$2x + y = a$$

$$-2x - 4y = -2b$$

$$-3y = a - 2b$$

$$y = \frac{a - 2b}{3}$$

$$A\left(\frac{a+b}{3}, \frac{a-2b}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = a - \frac{a-2b}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{2a-2b}{3}$$

$$x = \frac{a+b}{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 = A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 = B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 = C$$

$$\Rightarrow B^2 - AC = 1^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$$

$$A = 2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{3}, \frac{a-2b}{3}\right)$$

minimum noktadır.

minimum değer  $f\left(\frac{a-b}{3}, \frac{a-2b}{3}\right) = b^2 - ab$  bulunur.

- 14°)  $f(x, y) = x^2y$  fonksiyonunun  $(-1, -1)$  noktasında
- a) maksimum değişim oranını ve yönünü
  - b) minimum değişim oranını ve yönünü
  - c)  $\vec{i} + 2\vec{j}$  vektörü yönündeki değişim miktarını bulunuz.

$$\nabla f = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$$

$$\nabla f(-1, -1) = 2\vec{i} + \vec{j}$$

a) maksimum değişim oranı  $\nabla f$  yönündeki değişimdir.

$$|\nabla f| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

b) minimum değişim oranı  $-\nabla f$  yönündeki değişimdir. Miktarı  $|\nabla f| = \sqrt{5}$  dir.

$$\begin{aligned} c) D_{\vec{t}} f &= \nabla f(-1, -1) \cdot \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = (2\vec{i} + \vec{j}) \cdot \frac{\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2+2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

15°) Aynı bir P noktasında

$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  vektörü yönündeki değişimi (türevi)  $3\sqrt{2}$  ve  $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$  vektörü yönündeki değişimi (türevi) 5 olan  $f(x, y)$  fonksiyonunun gradyen vektörünü bulunuz.

$$\nabla f(x_0, y_0) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a + b = 6$$

$$D_{\vec{v}} f = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{\sqrt{9+16}} = 5$$

$$\Rightarrow 3a - 4b = 25$$

$$\Rightarrow 4/a+b=6$$

$$3a-4b=25$$

$$4a+4b=24$$

$$3a-4b=25$$

$$7a=49$$

$$a=7 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \nabla f(x,y) = 7\vec{i} - \vec{j}$$

16°)  $x^2+y^2+z^2=14$  küresinin  $z=x^2-y^2$  hiperbolik paraboloidine  $(2,1,3)$  noktasında dik olup olmadığını gösteriniz.

Birbirlerine dik olmaları için  $\nabla f$  ile  $\nabla g$ 'nin birbirlerine dik olması gerekir.

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14=0$$

$$g(x,y,z) = z-x^2+y^2=0$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\nabla f(2,1,3) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\nabla g = -2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla g(2,1,3) = -4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla f \perp \nabla g \Rightarrow \nabla f \cdot \nabla g = 0$$

$$\Rightarrow (4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}) \cdot (-4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = -16 + 4 + 6 = -6 \neq 0$$

olduğundan dik değildir.

17°)  $f(x,y) = e^x \sin(x^2-y)$  fonksiyonunun  $(0,\pi)$  noktasında hangi yönlerdeki türevi sıfır olur.

$$\nabla f = [e^x \sin(x^2-y) + 2xe^x \cos(x^2-y)]\vec{i} - e^x \cos(x^2-y)\vec{j}$$

$$\nabla f(0,\pi) = \vec{j}$$

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  bir birim vektör olsun.

$$D_{\vec{u}} f(0, \pi) = 0 \Rightarrow \nabla f(0, \pi) \cdot \vec{u} = 0$$
$$\vec{j} (a\vec{i} + b\vec{j}) = 0$$
$$b = 0$$

$\vec{u}$  birim vektör olduğundan  $|\vec{u}| = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2} = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$\Rightarrow \vec{u} = \vec{i}$  ve  $\vec{u} = -\vec{i}$  yönlerindeki türevler sıfırdır.

180)  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z$  fonksiyonunun  $M(1, 2, 0)$  noktasını  $N(2, 4, 2)$  noktasına birleştiren  $\overrightarrow{MN}$  yönündeki doğrultu türevinin  $M(1, 2, 0)$  noktasındaki değerini bulunuz.

$$\overrightarrow{MN} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\nabla f(1, 2, 0) = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$D_{\overrightarrow{MN}} f = \nabla f(1, 2, 0) \cdot \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = (2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \frac{(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})}{3}$$
$$= \frac{2+16+6}{3} = 8$$

19)  $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2 = 0$  kapalı denklemi ile verilen  $z = f(x, y)$  fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

$x$ 'e göre türetelim;  $4x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 2z - 2x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z - 4x}{2z - 2x}$$

$y$ 'ye göre türetelim;  $2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2z - 2x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2z - 4x = 0 \Rightarrow z = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 0 + (2x)^2 - 2x \cdot 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + \cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow z = \pm 2, y = 0$$

$$A_1(1, 0, 2) \quad A_2(-1, 0, -2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2 \frac{\partial z}{\partial x} - 4)(2z - 2x) - (2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2)(2z - 4x)}{(2z - 2x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2 \frac{\partial z}{\partial y} (2z - 2x) - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (2z - 4x)}{(2z - 2x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2(2z - 2x) + 2y \cdot 2 \frac{\partial z}{\partial y}}{(2z - 2x)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{A_1} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{A_2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{A_1} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{A_2} = 0$$

$$\underline{A_1(1, 0, 2)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-8}{4} = -2 = A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = C$$

$$\left\{ \begin{aligned} B^2 - AC &= 0 - (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -1 < 0 \end{aligned} \right.$$

$A = -2 < 0$   $f(A_1)$  maksimum  
depender.

$$\underline{A_2(-1, 0, -2)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8}{4} = 2 = A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} = C$$

$$B^2 - AC = 0 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 > 0$$

$A_2$  eyer noktasıdır.

20°)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x \cdot (e^y - 1) + 1} - 1}{xy}$  limitini hesaplayınız.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{[\sqrt{x(e^y - 1) + 1} - 1][\sqrt{x(e^y - 1) + 1} + 1]}{xy \sqrt{x(e^y - 1) + 1} + 1}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(e^y - 1) + \cancel{1} - \cancel{1}}{xy[\sqrt{x(e^y - 1) + 1} + 1]}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(e^y - 1) + 1} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y - 1}{y}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y}{1}$$

$$= \frac{1}{2}$$