Teorem 3: $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve alttan sınırlı her alt kümesinin bir tek en büyük alt sınırı (infimumu) vardır.

Boş olmayan sınırlı bir $X \subset \mathbb{R}$ alt kümesi için $B = \sup X$ ve $A = \operatorname{Inf} X$ sayıları aşağıdaki karakteristik özelliklere sahiptir:

(a) $B = \sup X \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $x \leq B$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $B - \varepsilon < x_\varepsilon$ olacak biçimde $x_\varepsilon \in X$ elemanı vardır.

(b) $A = \inf X \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $A \leq x$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $x_\varepsilon < A + \varepsilon$ olacak biçimde $x_\varepsilon \in X$ elemanı vardır.

Tanım 24: a ve b iki reel sayı ve $a < b$ olsun. $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ kümesine a başlangıçlı b bitimli açık aralık denir ve (a, b) (veya $]a, b[$) şeklinde gösterilir. Benzer olarak, $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ kümesine a başlangıçlı ve b bitimli kapalı aralık denir ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir.

$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \rightarrow$ a da açık b'de kapalı yarı açık aralık $(a, b]$ (veya $]a, b]$)

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \rightarrow$ a'da kapalı b'de açık yarı açık aralık $[a, b)$ (veya $[a, b[$)

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kümesine genişletilmiş reel sayılar sistemi denir. Bu sayılar sisteminin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilir.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-\infty < x < +\infty$

$$x - (+\infty) = x - \infty = -\infty \qquad x - (-\infty) = x + \infty = \infty$$

$$x + (+\infty) = x + \infty = \infty$$

$$+\infty + (+\infty) = \infty \quad , \quad -\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{x}{-\infty} = \frac{x}{+\infty} = 0$$

(b) $x > 0$ ise $\quad x \cdot (-\infty) = -\infty, \quad x \cdot (+\infty) = \infty, \quad \frac{x}{0} = +\infty$

(c) $x < 0$ ise $\quad x \cdot (-\infty) = \infty, \quad x \cdot (+\infty) = -\infty, \quad \frac{x}{0} = -\infty$

Boş olmayan $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ alt kümesi verilsin. Eğer, X kümesi alttan sınırlı değilse, $\inf X = -\infty$ ve X kümesi üstten sınırlı değilse $\sup X = \infty$ gibi tanımlanır. Buna göre, $\overline{\mathbb{R}}$'nin boş olmayan her alt kümesinin hem supremumu hem de infimumu vardır.

Tanım 25: $x \in \mathbb{R}$ reel sayısının mutlak değeri (modülü)

$$x \to |x| = \begin{cases} x, & x>0 \text{ ise,} \\ 0, & x=0 \text{ ise,} \\ -x, & x<0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona denir.

Her $x \in X$ için $|-x| = |x| \geq 0$ olduğu açıktır. Mutlak değerin aşağıdaki özellikleri vardır:

(a) Her $a,b \in \mathbb{R}$ için $|a.b| = |a|.|b|$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0 \text{ olması koşuluyla})$$

(b) Her $a,b \in \mathbb{R}$ için $|a \mp b| \leq |a| + |b|$

(c) Her $a,b \in \mathbb{R}$ için $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$

(d) Her $a>0$ sayısı için $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow (x \leq -a \,,\, x \geq a)$$

$a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$ noktaları için $|a-b| = |b-a|$ sayısına a ve b noktaları arasındaki uzaklık (mesafe) denir ve $d(a,b)$ ile gösterilir.

$a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ olmak üzere $b-a>0$ sayısına (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ ve $[a,b]$ aralıklarının uzunluğu (veya boyu) denir.

Çözümlü Problemler.

1) Aşağıdaki $X \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için, eğer varsa, $\sup X$ ve $\inf X$ sayılarını bulunuz.

a) $X = \left\{ \frac{n+1}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$

b) $X = \left\{ \frac{1}{3} \mp \frac{n}{3n+1} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$

Çözüm :

a) Supremum ve infumumun karakteristik özellikleri-ni kullanalım:

$\max X = \sup X = 2$ olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $\frac{n+1}{n} > 1$ 'dir. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \frac{1}{\varepsilon}$ doğal sayısı için $\frac{n+1}{n} < 1 + \varepsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 1$ elde edilir.

b) $\inf X = 0$ 'dır. Çünkü, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > \frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$ doğal sayısı için $0 < \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlandığından $\inf X = 0$ elde edilir.

$\sup X = \frac{2}{3}$ dür. Çünkü, herhangi $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n > \frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$ doğal sayısı için $\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{1}{3} + \frac{n}{3n+1} < \frac{2}{3}$ eşitsizliği sağlandığından $\sup X = \frac{2}{3}$ elde edilir.

(2) $X \subset Y \subset \mathbb{R}$ ise $\sup X \leq \sup Y$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $B_1 = \sup X$ ve $B_2 = \sup Y$ olarak alalım. Eğer, Y kümesi üstten sınırlı değilse, $B_2 = +\infty$ dur. Dolayısıyla, $B_1 \leq +\infty = B_2$ olduğu açıktır.

Y üstten sınırlı olsun. Bu durumda, üst sınır prensibine göre B_2 sonlu sayıdır. $X \subset Y$ olduğundan $\forall x \in X$ için $x \leq B_2$ olur. Dolayısıyla B_2 sayısı X'in bir üst sınırıdır. Buradan da $B_1 \leq B_2$ elde edilir.

(3) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq y$ ise X'in üstten, Y'nin ise alttan sınırlı olduğunu ve $\sup X \leq \operatorname{Inf} Y$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Sabit $y_0 \in Y$ ve her $x \in X$ için $x \leq y_0$ olduğundan X üstten sınırlı bir kümedir, ve $\sup X \leq y_0$ olur. Her $y \in Y$ için $\sup X \leq y$ olduğundan Y alttan sınırlı bir kümedir. Buradan da $\sup X \leq \operatorname{Inf} Y$ elde edilir.

(4) $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}$ sınırlı kümeleri için

$X \cap Y$ ve $X \cup Y$ kümelerinin sınırlı olduğunu ve

a) $\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$;

b) $\max(\operatorname{Inf} X, \operatorname{Inf} Y) \leq \operatorname{Inf}(X \cap Y)$

önermelerinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm:

a) X ve Y sınırlı iki küme olduğundan $B_1 = \sup X$ ve $B_2 = \sup Y$ sayıları sonludur. (Tamlık aksiyomuna göre). $B_1 \leq B_2$ olsun. Her $x \in X$ için $x \leq B_1 \leq B_2$ ve her $y \in Y$ için $y \leq B_2$ olduğundan her $z \in X \cup Y$ için $z \leq B_2$ olur. Buradan da $X \cup Y$ kümesinin üstten sınırlı olduğu ve

$$\sup(X \cup Y) \leq B_2$$

elde edilir. Diğer taraftan, $Y \subset (X \cup Y)$ olduğundan $\sup Y \leq \sup(X \cup Y)$, yani $B_2 \leq \sup(X \cup Y)$ olur. $B_2 = \max(B_1, B_2)$ olduğundan son iki eşitsizliğe göre

$$\sup(X \cup Y) = \max(\sup X, \sup Y)$$

elde edilir.

b) X ve Y sınırlı iki küme olduğundan $A_1 = \operatorname{Inf} X$ ve $A_2 = \operatorname{Inf} Y$ sayıları sonludur. $A_1 \leq A_2$ olsun. Her $y \in Y$ için $A_2 \leq y$ olduğundan her $z \in X \cap Y$ için $A_2 \leq z$ olur. Buradan da $X \cap Y$'nin alttan sınırlı olduğu ve

$$A_2 \leq \operatorname{Inf}(X, Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan, yine $(X \cap Y) \subset Y$ olduğundan $\operatorname{Inf}(X \cap Y) \geq \operatorname{Inf} Y$, yani $A_2 \leq \operatorname{Inf}(X \cap Y)$ dir. $A_2 = \max(A_1, A_2)$ olduğundan bu eşitsizliğe göre

$$\max(\operatorname{Inf} X, \operatorname{Inf} Y) \leq \operatorname{Inf}(X \cap Y)$$

elde edilir.

(5) $|x+1|+|x|+|x-1|-6=0$ denkleminin köklerini bulunuz.

$$|x+1|+|x|+|x-1|-6=\begin{cases} -3x-6=0 & x\in(-\infty,-1) \text{ ise} \\ -x-4=0 & x\in[-1,0) \text{ ise} \\ x-4=0 & x\in[0,1) \text{ ise} \\ 3x-6=0 & x\in[1,\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu açıktır. Buradan da görüldüğü gibi

$-3x-6=0 \Rightarrow x=-2\in(-\infty,-1)$ (kök var)

$-x-4=0 \Rightarrow x=-4\notin[-1,0)$ (kök yok)

$x-4=0 \Rightarrow x=4\notin[0,1)$ (kök yok)

$3x-6=0 \Rightarrow x=2\in[1,\infty)$ (kök var)

bulunur. Denklemin kökleri $x=-2$ ve $x=2$'dir.

Reel Sayı Sınıfları

I- Doğal Sayılar.

Tanım 26: Bir şeyleri saymakta yararlanılan ve rakamlar adı verilen $0,1,2,\dots,8,9$ ile yazılabilen sayıların tümüne doğal sayılar kümesi denir ve

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots,n,n+1,\dots\}$$

şeklinde gösterilir.

"Doğal sayıları tamamen belirtmeye yeterli olduğu ispatlanabilen en belirgin özellikler Peano aksiyomları adıyla aşağıdaki beş aksiyomla ifade edilebilir:

$\mathbb{N}1.$ 1 bir doğal sayıdır. $1 \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{N}2.$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ = n+1 \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{N}3.$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 1$;

$\mathbb{N}4.$ $\forall n, m \in \mathbb{N};\ n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$

$\mathbb{N}5.$ $(1 \in A \subset \mathbb{N}$ ve $n \in A \Rightarrow n^+ \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}$
(Bu aksiyoma Matematik İndüksiyon Prensibi denir. Bu aksiyom matematikte sık sık kullanılan bir ispat tekniğini ortaya koymaktadır)

Teorem 4.

n doğal sayısına bağımlı bir $B(n)$ bağıntısı

(a) 1 doğal sayısı için doğru : $B(1)$ doğru

(b) n için doğru ise n+1 için de doğru : $B(n)$ doğru ise $B(n+1)$ doğru oluyorsa, $B(n)$ bağıntısı bütün doğal sayılar için doğrudur.

Bu ispat tekniğine Matematik İndüksiyon (veya Tümevarım) Yöntemi denir.

Doğal sayıların sık sık kullanılan bir kaç önemli özelliği bu yöntemle ispatlanır. Bu özelliklerin kısa bir özetini verelim:

1°) $n,m \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+m) \in \mathbb{N} \wedge n.m \in \mathbb{N}$;

2°) $n \in \mathbb{N} \wedge (n \neq 1) \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$;

3°) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x \in \mathbb{N} : n < x\}$ kümesinin minimal elemanı vardır ve

$$\min\{x \in \mathbb{N} : n < x\} = n+1;$$

4°) $m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow n+1 \leq m$;

5°) $n \in \mathbb{N}$ ise $n < x < n+1$ olacak biçimde bir x doğal sayısı yoktur;

6°) $\mathbb{N}$'in boş olmayan her alt kümesinin bir minimal elemanı vardır;

7°) $\mathbb{N}$'in üstten sınırlı her alt kümesinin bir maksimal elemanı vardır;

8°) $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir.

II - Tam Sayılar -

Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $n+x=n$ denkleminin tek çözümü 0 (sıfır) ile $n+x=0$ denkleminin tek çözümü $-n$ elemanlarını $\mathbb{N}$ kümesine ilave ederek elde edilen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

kümesine Tam sayılar kümesi denir. Tam sayılar şu özelliklere sahiptir:

1°) $n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow (n+m) \in \mathbb{Z} \wedge n.m \in \mathbb{Z}$;

2°) $n, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n+x=m$ denkleminin $\mathbb{Z}$ kümesinde tek bir $x=(-n)+m$ çözümü vardır;

3°) $\mathbb{Z}$'nin her sınırlı alt kümesinin minimal ve maksimal elemanı vardır.

4°) $\mathbb{Z}$ sınırsız bir kümedir.

III. Rasyonel Sayılar

$n \neq 0$ olmak üzere m ve n birer tam sayı ise

$$m.n^{-1} = \frac{m}{n}$$

şeklindeki sayıya rasyonel sayı ve bu sayıların teşkil ettiği kümeye Rasyonel sayılar kümesi denir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Rasyonel sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemleri̇ne göre bir değişmeli cisim yapısına sahiptir.

Teorem 5. Rasyonel olmayan sayı vardır.

İspat. Teoremi ispat etmek için karesi ikiye eşit olan pozitif $s \in \mathbb{R}$ sayısının varlığını ve bu s sayısının rasyonel sayı olmadığını göstermek yeterlidir.

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 < 2\} \quad \text{ve} \quad Y = \{y \in \mathbb{R}_+ : y^2 > 2\}$$

olsun. $1 \in X$ ve $2 \in Y$ olduğundan, $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ dir. Her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $x<y \Leftrightarrow x^2<y^2$ olduğundan

her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x<y$'dir. O zaman Tamlık aksiyomuna göre her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq s \leq y$ olacak şekilde tek bir $s \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $s^2=2$ olduğunu görelim. $s^2<2$ olsun. O zaman $1 \in X$ olduğundan $1^2 \leq s^2 < 2$ ve $0<\delta = 2-s^2 < 1$ dir.

Öte yandan

$$\left(s+\frac{\delta}{3}\right)^2 = s^2+2s\frac{\delta}{3}+\left(\frac{\delta}{3}\right)^2 < s^2+3\frac{\delta}{3} = s^2+\delta = 2$$

olduğundan $s+\frac{\delta}{3} \in X$ elde edilir. Bu ise her $x \in X$

için $x \leq s$ olması ile çeliştiğinden $s^2<2$ varsayımının doğru olmadığı anlaşılır.

Şimdi $2<s^2$ olduğunu varsayalım. $2 \in Y$ olduğundan $2<s^2 \leq 4$ ve $0<\Delta = s^2-2 \leq 2$'dir. Öte yandan

$\left(0<\frac{\Delta}{3}<1\right.$ olduğundan$\left.\right)$

$$\left(s-\frac{\Delta}{3}\right)^2 = s^2-2s\frac{\Delta}{3}+\left(\frac{\Delta}{3}\right)^2 < s^2-3.\frac{\Delta}{3} = s^2-\Delta = 2$$

olduğundan $s-\frac{\Delta}{3} \in Y$ elde edilir. Bu ise her $y \in Y$

için $y \geq s$ olması ile çeliştiğinden $s^2>2$ varsayımının da doğru olmadığı anlaşılır. Böylece tek bir $s^2=2$ durumu gerçeklenebilir. $s \notin \mathbb{Q}$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Rasyonel olmayan reel sayılara İrrasyonel sayılar denir. İrrasyonel sayılar kümesini $\mathbb{I}$ ile göstereceğiz.

$a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ tam sayılar olmak üzere

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

polinom denkleminin çözümü olan x sayısına bir cebirsel sayı denir. Katsayıları tam sayı olmayan bir polinom denklemin çözümü olan irrasyonel sayılara Transandantal sayılar denir.

Cebirsel sayılar kümesi sonsuz ve sayılabilir bir küme olduğu halde transandantal sayılar kümesi sayılamayan bir kümedir.

Teorem 6. (Archimet Prensibi)

Her $h>0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $(k-1)h \leq x < kh$ olacak şekilde k tamsayısı vardır. (Bu özelliğe reel sayı kümesinin Archimet özelliği vardır)

İspat. $\mathbb{Z}$ kümesi üstten sınırlı olmadığından her $h>0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$X = \{ n \in \mathbb{Z} : \frac{x}{h} < n \}$$

kümesi $\mathbb{Z}$'nin alttan sınırlı boş olmayan bir alt kümesidir. O zaman tam sayıların 3. özelliğine göre X kümesinin minimal elemanı vardır, yani $k-1 \leq \frac{x}{h} < k$ olacak şekilde bir tek $k \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. $h>0$ olduğundan

$$k-1 \leq \frac{x}{h} < k \Longleftrightarrow h(k-1) \leq x < h \cdot k$$

olur.

Sonuç 1.

$\varepsilon > 0$ ise $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

Gerçekten $h = 1$ ve $x = \frac{1}{\varepsilon}$ alındığında Archimet Prensibine göre $\frac{1}{\varepsilon} < k_0$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{Z}$ vardır. $0 < \frac{1}{\varepsilon} \wedge \frac{1}{\varepsilon} < k_0$ ise $k_0 \in \mathbb{N}$ olur. Bu durumda $\forall n > k_0$ sayısı için $\frac{1}{n} < \frac{1}{k_0}$ olduğundan $\forall n > k_0$ doğal sayısı için $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ olur.

Sonuç 2.

Eğer, $\forall h > 0$ için $0 \leq x < h$ ise $x = 0$'dır.

Gerçekten, $x > 0$ olamaz. Çünkü $x > 0$ olduğunda Sonuç 1'e göre $\frac{1}{n_0} < x$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu ise her $h > 0$ için $x < h$ olması ile çelişir.

Sonuç 3.

Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır.

İspat: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $b - a > 0$ olduğundan Sonuç 1'e göre $0 < \frac{1}{n} < b - a$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Archimet Prensibine göre

$\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ vardır.

O halde $\frac{m}{n} < b$ 'dir. Aksi taktirde

$$\frac{m-1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n}$$

dir ve buradan da $b - a \leq \frac{1}{n}$ çelişkisi elde edilir. Böylece,

$$r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{ve} \quad a < \frac{m}{n} < b$$

dir. Demek ki, herhangi iki reel sayı arasında hiç değilse bir rasyonel sayı bulunacaktır. Bu işleme iste nildiği kadar devam edilebilir.

Sonuç 4.

$\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $k \leq x < k+1$ olacak şekilde tek bir $k \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır.

Söz konusu k tam sayısına x sayısının tam kısmı denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

$x - [\![x]\!]$ sayısına x sayısının kesir kısmı denir ve $\{x\}$ ile gösterilir. Böylece,

$x = [\![x]\!] + \{x\}$ ve $0 \leq \{x\} < 1$ olur.

Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının kendisiyle n $(n \in \mathbb{N})$ defa çarpımından ortaya çıkan sayıya a'nın n. kuvveti denir ve a^n ile gösterilir:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\dots.a}_{n \text{ kez}}$$

$a^0 = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

şeklinde tanımlanır.

$a \in \mathbb{R}_+$ ve $n \in \mathbb{N}$ sayıları verilsin. Eğer, $a = b^n$ ise b'ye a'nın "n. dereceden kökü" denir ve $b = (a)^{1/n}$
$= \sqrt[n]{a}$

şeklinde gösterilir. $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ durumunda

$b^{2k} = a$ olacak şekilde iki $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ ve $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$ sayıları vardır.

$\sqrt[n]{a}$ kökünün negatif olmayan değerine onun aritmetik değeri denir.

$a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $r = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ise

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki özellikleri de sağladığı kolayca gösterilebilir.

1^0) $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, hem de $n \leq 0$ veya $m \leq 0$ olduğunda $a \neq 0$ ise,

i) $a^m . a^n = a^{m+n}$; ii) $(a^m)^n = a^{m.n}$

. dir.

2°) $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ ise

i) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$; ii) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.m]{a^m}$;

iii) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$; iv) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

v) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3°) $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}$, $r' \in \mathbb{Q}$ ise

i) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$; ii) $a^r . a^{r'} = a^{r+r'}$;

iii) $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$; iv) $(a.b)^r = a^r . b^r$;

v) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

dir.

$a>0$, $a \neq 1$ ve $b>0$ olmak üzere, eğer $a^p = b$ ise p'ye b'nin a tabanına göre Logaritması denir ve $p = \log_a b$ şeklinde gösterilir. p için yalnız bir tane reel değerin mevcut olduğundan daha sonra bahsedeceğiz.

Her $a>0$, $a \neq 1$ ve $b>0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ sayıları için

i) $\log_a (b_1 . b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$;

ii) $\log_a \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$;

iii) $\log_a b^r = r \log_a b$, $(r \in \mathbb{Q})$

özellikleri sağlanır.

Pratikte iki taban sistemi kullanılır:

$a=10$ tabanı ve $a=e$ doğal tabanı

ve $\log_{10} b = \log b$, $\log_e b = \ln b$ şeklinde

yazılır.

Çözümlü Problemler.

(1) $\mathbb{N}$ kümesinde

a) $n,m \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+m) \in \mathbb{N}$

b) $\mathbb{N}$'in üstten sınırlı her alt kümesinin maksimal elemanı vardır.

özelliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $m,n \in \mathbb{N}$ verilsin.

$X = \{ n \in \mathbb{N} : (m+n) \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N} \}$ kümesini gözönüne alalım.

Her $m \in \mathbb{N}$ için $m+1 \in \mathbb{N}$ ise $1 \in X$'dir. $n \in X$, yani $n+m \in \mathbb{N}$ ise $(m+(n+1)) = ((m+n)+1) \in \mathbb{N}$ olduğundan $n+1 \in X$ olur. Matematik indüksiyon yöntemine göre $X = \mathbb{N}$ elde edilir.

b) $X \subset \mathbb{N}$ üstten sınırlı bir küme olsun. Üst sınır prensibine göre $\sup X = B \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Üst sınırın karakteristik özelliklerine göre

$$B-1 < n \leq B$$

olacak şekilde $n \in X$ sayısı vardır. Buradan $\beta = \max X$ olduğu anlaşılır.

(2) $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin üstten sınırsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önce $\mathbb{N}$ kümesinin üstten sınırsız olduğunu görelim. Olmayana ergi yöntemine göre eğer, $\mathbb{N}$ üsten sınırlı bir küme ise $\max \mathbb{N} = n$ elemanı mevcuttur. Fakat $n+1 \in \mathbb{N}$ ve $n+1 > n$ 'dir. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ üstten sınırsız olduğundan $\mathbb{Z}$'de üstten sınırsızdır.

(3) α sıfırdan farklı rasyonel ve β irrasyonel ise $\alpha \cdot \beta$ sayısının irrasyonel olacağını gösteriniz.

Çözüm: Eğer $\alpha \cdot \beta = r \in \mathbb{Q}$ ise iki rasyonel sayının oranı da rasyonel sayı olduğundan $\beta = \frac{r}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ olur. Bu ise β'nın irrasyonel olması ile çelişir. O halde $\alpha \cdot \beta$ sayısı irrasyoneldir.

(4) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ in bir rasyonel sayı olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ dersek;

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{15} \Rightarrow x^2 - 8 = 2\sqrt{15}$$

ve $$x^4 - 16x^2 + 64 = 60 \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin muhtemel rasyonel kökleri ∓ 2 ve ∓ 4 sayıları olabilir. Fakat bu sayıların hiçbiri verilen denklemi sağlamadığından $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sayısı rasyonel bir sayı değildir.

NOT: $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 ,$$

polinom denklemi verildiğinde eğer, denklemin p/q şeklinde rasyonel bir kökü varsa a_n, p ile a_0'da q ile tam olarak bölünebilir.

(5) $\forall n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu Matematik İndüksiyon Yöntemi ile gösteriniz.

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

b) $3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ kez}} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$;

Çözüm.

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = D(n)$

$\dfrac{n(4n^2-1)}{3} = G(n)$ olsun.

$1^2 = \dfrac{1.(4.1^2-1)}{3} = 1$ olduğundan $D(1) = G(1)$ dir.

farzedelim ki, $D(n) = G(n)$ ifadesi $n=k$ için doğrudur. O halde,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3}$$

geçerlidir. Her iki tarafa $(2k+1)^2$ yi ilave edersek

$$D(k+1) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{k(4k^2-1) + 3(4k^2+4k+1)}{3}$$

$$= \frac{4k^3 - k + 12k^2 + 12k + 3}{3}$$

$$= \frac{4(k+1)^3 - k - 1}{3}$$

$$= \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2 - 1\right]}{3} = G(k+1)$$

elde edilir. O halde $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.

b) $3 + 33 + 333 + \dots + 33\dots3 = D(n)$

$$\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27} = G(n) \quad \text{olsun.}$$

$$D(1) = 3 = \frac{10^2 - 9 - 10}{27} = \frac{81}{27} = 3 = G(1) \quad \checkmark$$

$n = k$ için $D(n) = G(n)$ doğru olsun.

$$3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{(k+1)\text{ kez}} = \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + \underbrace{33\dots3}_{(k+1)\text{ kez}}$$

$$\underbrace{33\dots3}_{(k+1)\text{ kez}} = 3.10^k + 3.10^{k-1} + \dots + 3.10 + 3.10^0$$

$$= 3.\left(10^{k}+10^{k-1}+\dots+10+10^{0}\right) = 3.\frac{10^{k+1}-1}{10-1}$$

$$\Rightarrow D(k+1) = 3+33+\dots+\underbrace{33\dots3}_{(k+1)\,kez} = \frac{10^{k+1}-9k-10}{27} + 3.\frac{10^{k+1}-1}{9}$$

$$= \frac{10^{k+1}-9k-10+9.10^{k+1}-9}{27}$$

$$= \frac{10^{k+2}-9(k+1)-10}{27}$$

$$= G(k+1)$$

elde edilir. O halde $D(n) = G(n)$ bağıntısı tüm $n \in \mathbb{N}$ sayıları için doğrudur.

(6) $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{5}{2}$ ve $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $a_n = \frac{5}{2} a_{n-1} - a_{n-2}$ ise $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n = 2^n + 2^{-n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a_0 = 2 = 2^0 + 2^0 = 2$

$a_1 = \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1}$ olduğu açıktır.

Farzedelim ki, $a_n = 2^n + 2^{-n}$ ifadesi $n = k$ için doğrudur. Bu durumda

$$a_{k-1} = 2^{k-1} + 2^{-k+1} \quad \text{ve} \quad a_k = 2^k + 2^{-k}$$

geçerlidir.

$$a_{k+1} = \frac{5}{2} a_k - a_{k-1}$$

$$= \frac{5}{2}\left(2^k + 2^{-k}\right) - \left(2^{k-1} + 2^{-k+1}\right)$$

$$= (2+2^{-1})(2^{k}+2^{-k}) - (2^{k-1}+2^{-k+1})$$

$$= 2^{k+1} + \cancel{2^{-k+1}} + \cancel{2^{k-1}} + 2^{-1-k} - \cancel{2^{k-1}} - \cancel{2^{-k+1}}$$

$$= 2^{k+1} + 2^{-(k+1)}$$

elde edilir. Demek ki $a_n = 2^{n} + 2^{-n}$ eşitliği tüm $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayıları için doğrudur.