Diziler ve Seriler

Diziler

* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ gibi belli bir düzenle verilmiş sayılar topluluğuna dizi denir.

* Reel sayıların bir dizisi pozitif tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyondur. Yani, $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına bir a_n sayısı karşılık getiren bir fonksiyona dizi denir.

$$\{\underbrace{a_n}_{\text{dizinin genel terimi}}\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

- $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$
- $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\right\}$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$
- $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$
- $\left\{\frac{n}{3^n}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}, \ldots, \frac{n}{3^n}, \ldots\right\}$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$
- $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$
- $a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

  $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$ Fibonacci dizisi

Diziler bir sabit ile çarpılabilir, toplanabilirler, çıkarılabilirler çarpılabilirler, bölünebilirler

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ herhangi iki dizi, α bir sabit olsun.

- $\alpha\{a_n\} = \alpha\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n, \dots\}$
- $\{a_n\} \mp \{b_n\} = \{a_n \mp b_n\} = \{a_1 \mp b_1, a_2 \mp b_2, a_3 \mp b_3, \dots, a_n \mp b_n, \dots\}$
- $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\} = \{a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots\}$
- $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dots, \dfrac{a_n}{b_n}, \dots\right\}$ $\left(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } b_n \neq 0 \text{ olmak üzere}\right)$

Diziler için bazı kavramlar

1- Sınırlılık

Eğer $\{a_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{Z}^+$ için yani $n = 1, 2, \dots$ için

$m \le a_n$ olacak şekilde bir m sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlıdır denir ve m'ye dizinin alt sınırı denir.

Eğer $\{a_n\}$ dizisi, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$a_n \leq M$ olacak şekilde M sayısı varsa üstten sınırlıdır adını alır ve M'ye dizinin üst sınırı denir.

Hem alttan hem de üstten sınırlı bir diziye sınırlı dizi denir.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $|a_n| \leq k$ olacak şekilde k sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi sınırlıdır denir.

$$-k \leq a_n \leq k$$

2_ Monotonluk

Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ dizisine artan dizi

$a_n \geq a_{n+1}$ ise de $\{a_n\}$ dizisine azalan dizi denir.

3_ Pozitiflik _ Negatiflik

Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \geq 0$ ise dizi pozitif

$a_n < 0$ ise dizi negatif terimlidir.

4- Alternatiflik

Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ise $\{a_n\}$ dizisine alternatiftir denir.

Ör/ $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ dizisi sınırlı mıdır?

monoton mudur?

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ----\right\}$$

• Sınırlılık:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$n < n+1$

$\frac{n}{n+1} < 1$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$n+1 \leq n+n = 2n$

$\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1$$

• Monotonluk

$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$

$a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

$$\begin{array}{r|l} n^2+2n & n^2+2n+1 \\ -n^2 \mp 2n \mp 1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{1}{n^2+2n+1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow \text{dizi artandır.}$$

Ör/ $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dizisi sınırlı mıdır?

monoton mudur?

Bu dizi alttan 1 ile sınırlı monoton artan bir dizidir.

Ör/ $\left\{\frac{n}{e^n}\right\} = \left\{\frac{1}{e}, \frac{2}{e^2}, \ldots\right\}$ dizisi monoton mudur?

$f(n) = n.e^{-n}$ $\quad f'(n) = e^{-n} - ne^{-n} = (1-n)e^{-n}$ $\quad n \geq 1 \Rightarrow f'(n) \leq 0 \Rightarrow \{a_n\}$ dizisi azalandır.

Ör/ $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ dizisi sınırlı mıdır?

monoton mudur?

$-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{4}$ sınırlı bir dizi

Dizi monoton değildir. Ancak alternatif bir dizidir.

Ör/ $\{(-1)^n . n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots\}$ Alternatiftir.

Ne alttan ne de üstten sınırlıdır.

Bir dizinin limiti

Dizilerdeki limit kavramı fonksiyonun sonsuzdaki limitine karşılık gelir.

- $\{a_n\}$ dizisini gözönüne alalım. Eğer her reel pozitif $\varepsilon>0$ sayısı için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) > 0$ tam sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi L limitine yakınsar denir ve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

şeklinde gösterilir.

L sonlu ise dizi yakınsak

L, $+\infty$, $-\infty$ veya mevcut değilse dizi ıraksaktır.

Ör/ $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisinin limitinin sıfır olduğunu gösteriniz.

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad L=0$

$\varepsilon>0$ verilmiş olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $n \geq N$ iken $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) > 0$ tam sayısı bulmalıyız.

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} =$ Eğer N $\frac{1}{\varepsilon}$'dan büyük herhangi bir tam sayı olarak seçilirse o zaman dizinin limitinin sıfır olduğunu söyleyebiliriz.

Örnekler :

1) $\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ dizi yakınsaktır.

2) $\{a_n\} = \{-n\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$ dizi $-\infty$'a ıraksar.

3) $\{a_n\} = \{(-1)^n\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \rightarrow$ limit mevcut değildir. Dizi ıraksaktır.

$= \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ → n çift ⇒ 1
→ n tek ⇒ −1

4) $\{a_n\} = \left\{\frac{2n^2-n+1}{5n^2+n-3}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2-n+1}{5n^2+n-3}\right) = \frac{2}{5} \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

Limit kuralları

Fonksiyonlardaki standart limit kuralları dizilerdeki limitler içinde sağlanır.

Eğer $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ yakınsak diziler ve α bir reel sayı ise o zaman;

1) Limit varsa tektir.

2) Her yakınsak dizi sınırlıdır.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n \mp b_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \mp \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

5) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ $\left(\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \text{ olmak koşuluyla}\right)$

7) Eğer $a_n \leq b_n$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için})$

8) ~~Eğer~~ $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$ 'dir. $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için})$

(Sandaviç teoremi)

Ör/ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} = 2$ 'dir gösteriniz.

$a_n = 2 \leq b_n = \sqrt{4+\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{\underbrace{4+\frac{1}{n^2}+4\frac{1}{n}}_{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}} = c_n$

$$\left\{ \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} = 2 \right\}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2 \Rightarrow$ Sandaviç teo. göre $\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} = 2$

Diziler için sürekli fonksiyon teoremi

$\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $\{a_n\}$ dizisinin limiti L ise ve f fonksiyonu $\forall a_n$'de tanımlı olup L'de sürekli ise $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$'dir.