Çözüm - Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $x \in U_\delta(1)$ için

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε'na bağlı $\delta > 0$ sayısının bulunabileceğini gösterelim.

Her $x \in (0,2) = U_1(1)$ için

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2x-(x+1)}{2(x+1)} \right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2|x+1|} < \frac{1}{2}|x-1| < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

$$\delta = 2\varepsilon$$

olduğundan $\delta = \min\{2\varepsilon, 1\} > 0$ alırsak her $x \in U_\delta(1)$ için

$$|x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

bulunur. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \min\{2\varepsilon, 1\} > 0$ öyle ki $\forall x \in U_\delta(1)$ için $\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla verilen eşitlik doğrudur.

Tanım 60: (Heyne'ye göre)

$X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

ise, f'nin a noktasında limiti A'dır denir ve

$\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A$ veya $x \in X$, $x \to a$ iken $f(x) \to A$ yazılır. Bu tanımın değili:

$\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) \neq A \iff \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan öyle (x_n) dizisi vardır ki, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq A$'dır.

Önerme- Limitin Cauchy ve Heyne-ye göre tanımları denktir.

İspat-

Cauchy $\Rightarrow$ Heyne.

$\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x) - A| < \varepsilon$ olur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. O halde, $\exists n_\varepsilon = n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$ için $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ dir. Dolayısıyla $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ elde edilir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$ için ($x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ olduğundan) $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ bulunur.

Bu da Heyne-ye göre $\lim\limits_{X \in x \to a} f(x) = A$ olması demektir.

Heyne $\Rightarrow$ Cauchy.

Cauchy'ye göre $x \in X$ için $\lim_{x\to a} f(x) = A$ bağıntısının gerçeklenmediğini varsayalım. O halde, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\exists x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) \cap X$, öyle ki $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \mathring{U}_{\delta_n}(a) \cap X$, $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve $|x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}$

koşullarının sağlandığı ve son eşitsizlikten de $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

elde edilir. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$ elde ederiz. Bu da Heyne'ye göre $\lim_{X \ni x \to a} f(x) = A$ olması ile çelişki olur.

Örnek/ $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Terimleri

$$x_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

şeklinde tanımlayalım. (x_n) ve (y_n) dizilerini gözönüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n, y_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

olduğu açıktır. Fakat, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sin\frac{1}{x_n} = -1$,

$\sin\frac{1}{y_n} = 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = -1, \quad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = 1$$

elde edilir. Demek ki, hiçbir $A \in \mathbb{R}$ sayısı Heyne'ye göre $\sin \frac{1}{x}$ fonksiyonunun 0 noktasında limiti olamaz. Bu da istenen limitin mevcut olmadığını gösterir.

SAĞDAN ve SOLDAN LİMİTLER

Tanım 61: $a \in \mathbb{R}$ ile $\delta > 0$ sayıları verilmiş olsun. $U_\delta(a^+) = [a, a+\delta)$ $\left(U_\delta(a^-) = (a-\delta, a] \right)$ aralığına a'nın sağ (sol) komşuluğu denir.

$\overset{\circ}{U}_\delta(a^+) = (a, a+\delta)$ $\left(\overset{\circ}{U}_\delta(a^-) = (a-\delta, a) \right)$ aralığına da a'nın delinmiş sağ (sol) komşuluğu denir.

$a = +\infty$ $(a = -\infty)$ durumunda $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$ $\left(U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta) \right)$ aralığına da ∞'un ($-\infty$'un) δ-komşuluğu denir.

Tanım 62: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A \in \mathbb{R}$, $a \in X'$ ve $(a, +\infty) \cap X \neq \emptyset$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve

$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a^+) \cap X$ için $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ olacak şekilde

ε'na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa A'ya f'nin X kümesine göre a noktasındaki sağ limiti denir ve $x \in X$ için $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$ veya $f(a^+) = A$ şeklinde gösterilir.

Tanım 63: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $B \in \mathbb{R}$, $a \in X'$ ve $(-\infty, a) \cap X \neq \emptyset$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve

$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a^-) \cap X$ için $f(x) \in U_\varepsilon(B)$ olacak şekilde

ε'na bağlı bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa B'ye f'nin X kümesine göre a noktasındaki sol limiti denir ve $x\in X$ için $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=B$ veya $f(a^-)=B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımlarda komşuluk sembolünü kullanmazsak:

- $\lim\limits_{X\ni x\to a^+} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0$ için $\exists\,\delta>0$ öyle ki $\forall x\in X$ için $a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ olur.

- $\lim\limits_{X\ni x\to a^-} f(x)=B \iff \forall\varepsilon>0$ için $\exists\,\delta>0$ öyle ki $\forall x\in X$ için $a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon$ olur.

Teorem 22.

$X\subset\mathbb{R}$, $f: X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a\in X'$ ve $(a,+\infty)\cap X\neq\emptyset$ ve $(-\infty,a)\cap X\neq\emptyset$ olsun. f'nin X kümesine göre a noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter koşul f'in X kümesine göre $f(a^+)$ ve $f(a^-)$ limitlerinin mevcut ve $f(a^+)=f(a^-)$ olmasıdır.

Ör/ $X = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \dfrac{|3-x|}{3-x}$ ve $a=3$ olsun.
$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm-

$x<3$ için $3-x>0$ ve $x>3$ için $3-x<0$ olduğundan

$$f(3^-) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3-x}{3-x} = \lim_{x\to 3^-} 1 = 1$$

$$f(3^+) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{-(3-x)}{3-x} = \lim_{x\to 3^+} (-1) = -1$$

dir. $f(3^-) \neq f(3^+)$ olduğundan limit mevcut değildir.

Ör/ $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm-

$\varepsilon>0$ verilmiş keyfi bir reel sayı olsun.

$1<x<1+\delta$ iken $|\sqrt{x-1}-0|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulmalıyız.

$$|\sqrt{x-1}| = \sqrt{x-1} < \varepsilon \text{ veya } x-1<\varepsilon^2 \Rightarrow \delta=\varepsilon^2>0$$

alınırsa $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ elde edilmiş olur.

Tanım 64: $c>0$ olmak üzere $f:(c,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $A\in\mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ ve her $x\in(c,\infty)\cap U_\delta(\infty)$ için $|f(x)-A|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, f'nin $+\infty$'da limiti A'dır denir ve $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ veya $f(+\infty)=A$ şeklinde gösterilir.

Tanım 65: $c>0$ olmak üzere $f:(-\infty,-c)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $B\in\mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ ve her $x\in(-\infty,-c)\cap U_\delta(-\infty)$ için $|f(x)-B|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, B'ye f'nin $-\infty$'da Limiti denir ve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$ veya $f(-\infty)=B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımları daha kısa olarak aşağıdaki şekilde de verebiliriz:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ öyle ki $\forall x>\delta$ (veya $x\in(\delta,\infty)$) için $|f(x)-A|<\varepsilon$ dur.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ öyle ki $\forall x<-\delta$ (veya $x\in(-\infty,-\delta)$) için $|f(x)-B|<\varepsilon$ dur.

Ör/ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ fonksiyonu verilsin.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için öyle bir $\delta>0$ sayısı bulmalıyız ki, her $x>\delta$ için

$$|f(x)-0|=|\sqrt{x^2+1}-x|<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlansın. Herhangi $x\in(0,+\infty)$ için

$$|\sqrt{x^2+1}-x|=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}<\frac{1}{x}$$

olduğundan dolayı $\delta=\frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçilirse her

$x > \delta$ için $\frac{1}{x} < \varepsilon$ ve dolayısıyla $|\sqrt{x^2+1} - x| < \varepsilon$ bulunur ki, bu da istenen eşitliği ispatlar.

Ör/ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız ki, her $|x| > \delta$ için $|f(x) - 0| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlansın. Her $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$ olduğundan dolayı $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçilirse her $|x| > \delta$ için $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$ ve dolayısıyla, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$ bulunur. ki bu istenen eşitliği ispatlar.

LİMİT İLE İLGİLİ ÖNERMELER.

Aşağıdaki teoremde $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ ($x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = -\infty$ ve $x_0 = +\infty$ olabilir) ve ele alınan fonksiyonların X üzerinde tanımlı reel değerli oldukları kabul edilir. Ayrıca, $x_0 \in \mathbb{R}$ ise, $a = x_0$, $a = x_0^-$, $a = x_0^+$, $x_0 = -\infty$ ($x_0 = +\infty$) ise, $a = -\infty$ ($a = +\infty$) olduğu varsayılarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 23. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(1) $\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A_1$ ve $\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = A_2 \Rightarrow A_1 = A_2$ dir.

(Limit varsa tektir)

(2) $\lim\limits_{\mathcal{X} \ni x \to a} f(x) = A$ ise, $\exists \delta > 0$ öyle ki f fonksiyonu

$\overset{o}{U}_\delta(a) \cap \mathcal{X}$ kümesinde sınırlıdır.

(3) $\lim\limits_{\mathcal{X} \ni x \to a} f(x) = A$, $A \neq 0$ ise, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki

$\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(a) \cap \mathcal{X}$ için $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$ dir.

(4) $\lim\limits_{\mathcal{X} \ni x \to a} f(x) = A$ ve $\lim\limits_{\mathcal{X} \ni x \to a} g(x) = B$ limitleri

varsa $f \mp g$, $f.g$ ve her $x \in \mathcal{X}$ için $g(x) \neq 0$ ve $B \neq 0$ ise, $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonlarının da $x \in \mathcal{X}$ için

$x \to a$ iken limitleri vardır ve

i) $\lim\limits_{\mathcal{X} \ni x \to a} [f(x) \mp g(x)] = A \mp B$

ii) $\lim\limits_{\mathcal{X} \ni x \to a} [f(x) . g(x)] = A . B$

iii) $\lim\limits_{\mathcal{X} \ni x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{A}{B}$ dir.

(5) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ limitleri varsa ve

her $x \in \mathcal{X}$ için $f(x) \leq g(x)$ ise, $A \leq B$'dir.

(6) Her $x \in \mathcal{X}$ için $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ve

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$ ise $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ limiti de vardır ve A'ya eşittir. (Sandaviç Teoremi)

(7) $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ limitleri varsa ve

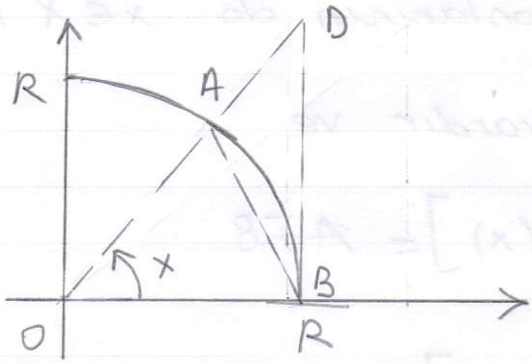
$A < B$ ise, öyle $\delta > 0$ sayısı vardır ki, her $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) < g(x)$ olur.

(8) $\lim_{X \ni x \to a} f(x) = A$ ise $\lim_{X \ni x \to a} |f(x)| = |A|$'dır.

Ör/ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ olsun.



$A_1 = \text{Alan}(\overset{\Delta}{AOB}) = \frac{R^2 \sin x}{2}$

$A_2 = \text{Alan}(\overset{\triangleleft}{AOB}) = \frac{R^2 x}{2}$

$A_3 = \text{Alan}(\overset{\Delta}{DOB}) = \frac{R^2 \tan x}{2}$

ve $A_1 < A_2 < A_3$'dür. Buna göre, her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$\frac{R^2 \sin x}{2} < \frac{R^2 x}{2} < \frac{R^2 \tan x}{2}$$

bulunur. Bu eşitsizlik $\frac{R^2}{2}$ bölündüğünde her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$\sin x < x < \tan x$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da her $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{veya} \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

eşitsizliği elde edilir. Her $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$$

olduğundan her $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x$$

bulunur. $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ için $-x\in(0,\frac{\pi}{2})$ olduğundan her $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ için

$$0<1-\frac{\sin(-x)}{-x}<-x$$

veya

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<|x|$$

eşitsizliğinin doğru olduğu elde edilir. Böylece, her $x\in\overset{\circ}{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$ için

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<|x|$$

dir. $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ ve $\lim\limits_{x\to 0} 0=0$ olduğundan sandaviç teoremine göre

$$\lim_{x\to 0} 1-\frac{\sin x}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 24. (Bileşke Fonksiyonun Limiti)

$X, Y \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $b \in Y'$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{Y \ni y \to b} g(y) = A$ olsun.

Eğer, her $x \in X \setminus \{a\}$ için $f(x) \neq b$ ve $f(x) \in Y$ ise $F(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$ bileşke fonksiyonunun X kümesine göre a noktasındaki limiti vardır ve

$$\lim_{x \to a} F(x) = A$$

dır.

İspat. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

$$\lim_{y \to b} g(y) = A$$

olduğundan $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki, $\forall y \in \overset{\circ}{U}_\delta(b) \cap Y$ için $g(y) \in U_\varepsilon$ olur.

$$\lim_{X \ni x \to a} f(x) = b$$

ise az önce bulunan $\delta > 0$ sayısı için $\exists\, \eta = \eta(\delta) > 0$ öyle ki, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a) \cap X$ için $f(x) \in U_\delta$ olur.
Öte yandan, $\forall x \in X \setminus \{a\}$ için $f(x) \neq b$ olduğundan, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a) \cap X$ için $f(x) \in \overset{\circ}{U}_\delta(b) \cap Y$ ve buradan da

$$f(x) \in \overset{\circ}{U}_\delta(b) \cap Y \Rightarrow g[f(x)] \subset U_\varepsilon(A)$$

bulunur. Demek ki, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki

$\forall x \in \overset{o}{U}_{\eta}(a) \cap X$ için $F(x) = g[f(x)] \in U_{\varepsilon}(A)$ olur.

Bu $\lim\limits_{X \ni x \to a} F(x) = A$ olduğunu ispatlar.

LİMİTİN VARLIĞI KOŞULLARI

Reel terimli dizilerde olduğu gibi bir $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X kümesine göre bir $a \in X'$ noktasında limitini bilmeden, f'nin X üzerinde değişme özellikleri dikkate alınarak $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limitinin varlığı koşulları-

nın bulunması büyük önem taşımaktadır. Aşağıda X üzerinde tanımlı monoton fonksiyonlar ve X üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon için mevcut olan böyle koşullar incelenecektir.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $i = \inf X$, $s = \sup X$ olsun. ($i, s \in \mathbb{R}$, $i = -\infty$, $s = +\infty$ olabilir)

Teorem 25.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $f: X \to \mathbb{R}$, X üzerinde monoton artan bir fonksiyon ise

$$\lim_{X \ni x \to i^+} f(x) = A = \inf \{ f(x) : x \in X \}$$

$$\lim_{X \ni x \to s^-} f(x) = B = \sup \{ f(x) : x \in X \}$$

limitleri mevcuttur. Ayrıca, f, X üzerinde alttan (üstten) sınırlı ise, $A \in \mathbb{R}$ $(B \in \mathbb{R})$'dir. Aksi taktirde

$A = -\infty$ $(B = +\infty)$ dur.

Teorem 26.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $f: X \to \mathbb{R}$, X üzerinde monoton azalan bir fonksiyon ise,

$$\lim_{X \ni x \to i^+} f(x) = D = \sup\{f(x) : x \in X\}$$

$$\lim_{X \ni x \to s^-} f(x) = C = \inf\{f(x) : x \in X\}$$

limitleri vardır. Ayrıca f, X üzerinde üstten (alttan) sınırlı ise, $D \in \mathbb{R}$ $(C \in \mathbb{R})$, aksi taktirde $D = +\infty$ $(C = -\infty)$ dur.

Teorem 27.

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde monoton artan (azalan) bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Bu durumda, f'nin x_0 noktasında sonlu $f(x_0^-)$ ve $f(x_0^+)$ limitleri vardır ve

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) \quad \left(f(x_0^-) \geq f(x_0) \geq f(x_0^+)\right)$$

bağıntısı sağlanır.

Teorem 28. (Cauchy kriteri)

$X \subset \mathbb{R}$ kümesi $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun.

- $\lim_{X \ni x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0$ için

$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki $\forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(a) \cap X$ için

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

sağlanır.

Sonsuz küçük ve sonsuz büyük fonksiyonlar ve o-küçük ve O-büyük sembolleri

Tanım 66. Eğer, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ise f'ye $x \in X$, $x \to a$ iken sonsuz küçük bir fonksiyon denir ve $x \in X, x \to a$ iken $f(x) = o(1)$ şeklinde gösterilir.

Buna göre, $x \in X$, $x \to a$ iken $f(x) = o(1) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap X$ için $|f(x)| < \varepsilon$ sağlanır.

Önerme.
$\lim_{X \ni x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - A$ olmak üzere

$x \in X$, $x \to a$ iken $\alpha(x) = o(1)$'dir.

Önerme.
$x \to a$ iken sonlu sayıda sonsuz küçük fonksiyonların cebirsel toplamı da $x \to a$ iken sonsuz küçük bir fonksiyondur.

Önerme.
$x \in X$, $x \to a$ iken $f = o(1)$ ve $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $r > 0$ için $\mathring{U}_r(a) \cap X$ üzerinde sınırlı ise, $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ fonksiyonu $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz küçüktür.

Tanım 67.

Eğer, $x \in X$ için $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$ ise, f'ye $x \to a$ iken sonsuz büyük fonksiyon denir.

Buna göre, $x \in X$ için $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \ (+\infty)$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) < -\varepsilon$ $(f(x) > \varepsilon)$ dur.

Önerme

(a) Eğer, $\forall x \in X \setminus \{a\}$ için $f(x) \neq 0$ ve $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = o(1)$ ise, $\frac{1}{f(x)}$ $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz büyüktür.

(b) Eğer, f, $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz büyük bir fonksiyon ise, $\frac{1}{f(x)}$ fonksiyonu $x \in X$ için $x \to a$ iken sonsuz küçüktür.

Ör/

1- $x \to 0$ iken $\sin x = o(1)$'dir. Çünkü $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ dır.

2- $x \to 0$ iken $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$ fonksiyonları sonsuz büyüktürler. Çünkü $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$'dur.