

FONKSİYON DİZİLERİ ve SERİLERİ

Bir reel sayı dizisi terimleri reel sayılar olan reel değerli bir fonksiyondur. Terimleri reel değerli fonksiyonlar olan bir diziye bir fonksiyonlar dizisi denir. Her bir $n=1,2,\dots$ için $f_n: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ile $\{f_n\}$ bir fonksiyonlar dizisidir.

Dizilerde verilen gerçekleri fonksiyon dizilerine uygulamak için bir $x_0 \in E$ özel değeri seçeriz. Bu durumda $\{f_n(x_0)\}$ bir reel sayı dizisi olur ve reel sayı dizilerindeki teoriler uygulanır.

Tanım: $E \subseteq \mathbb{R}$ ve terimleri E üzerinde tanımlı reel değerli bir $(f_n: E \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer, $x_0 \in E$ için reel terimli $\{f_n(x_0)\}$ dizisi yakınsak (ıraksak) ise $\{f_n\}$ dizisi x_0 noktasında yakınsaktır (ıraksaktır) denir.

Tanım: Eğer, $\{f_n\}$ ($f_n: E \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) dizisi her bir $x \in E$ için yakınsak ise, $\{f_n\}$ dizisi E üzerinde noktasal (veya sadece) yakınsaktır denir. Bu durumda $\forall x \in E$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ limiti var ve bu limit x 'e bağlı bir $f(x)$ fonksiyonudur, yani

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

dir. Bu durum $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in E$ veya kısaca $f_n \xrightarrow{E} f$ yazılarak belirtilir.

Bu tanımları ε - δ tanımlarına benzer olarak şu şekilde söyleyebiliriz

Tanım: $\{f_n\}$ ($f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) dizisinin E üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in E$ için $\forall n \geq n_0$ iken $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

ÖR $\Rightarrow f_n(x) = x^n$ fonksiyon dizisinin $E = [0, 1]$ aralığı üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğunu gösteriniz.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(0) = 0$ ve $f_n(1) = 1$ olduğundan

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$ olduğu açık-

tır. $0 < x < 1$ olsun. Herhangi $\varepsilon \in (0, 1)$ sayısı verildiğinde $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right\rceil + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \forall x \in E \text{ için } \forall n \geq n_0 \text{ iken } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ o.s.} \\ n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ olmalı. } 0 < x < 1 \text{ için } f(x) = 0 \Rightarrow |x^n - 0| < \varepsilon \\ \Rightarrow x^n < \varepsilon \Rightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Rightarrow n < \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \end{array} \right\}$$

için $0 < x^n < \varepsilon$ olacağından $\forall x \in (0, 1)$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ olur. Demek ki $f_n \xrightarrow{[0,1]} f$ dir.

ÖR $\Rightarrow g_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $n \in \mathbb{N}$ fonksiyon dizisinin

$E = (-\infty, \infty)$ aralığında noktasal yakınsadığı fonksiyonu bulunuz.

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in (-\infty, \infty) \text{ için } |g_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

olduğu açıktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ olduğuna göre,

buradan $g(x) = 0, x \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere

$g_n \xrightarrow{\mathbb{R}} g$ olduğu elde edilir.

Tanım: $E \subset \mathbb{R}$ ve $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) olmak üzere bir $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi ve bir

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Herhangi

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in E$ için

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε 'na

bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{f_n\}$ dizisi

f fonksiyonuna E üzerinde düzgün yakınsaktır denir ve bu durum $f_n(x) \xrightarrow{\quad} f(x), x \in E$ veya $f_n(x) \xrightarrow[E]{} f(x)$ şeklinde yazılarak belirtilir. Kısaca özetlersek;

$f_n(x)$ fonksiyonunun E üzerinde $f(x)$ 'e düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için bazı $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayıları vardır ki $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ iken $\forall x \in E$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 'dur.

NOT: Herhangi aralıkta düzgün yakınsak dizi bu aralıkta aynı zamanda noktasal yakınsaktır. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir.

$E \subset \mathbb{R}, f_n : E \rightarrow \mathbb{R} (n \in \mathbb{N})$ ve $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna E üzerinde noktasal yakınsak olsun.

$$g_n = \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in E \}$$

diyelim. Herbir $n \in \mathbb{N}$ için ρ_n 'nin sonlu olduğunu kabul edeceğiz. Her $x \in E$ için $|f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n$ ($n \in \mathbb{N}$) olduğuna göre düzpen yakınsaklık tanımını şu şekilde de verebiliriz.

Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ ise $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna E üzerinde düzpen yakınsaktır denir.

NOT: E kümesi kapalı ve sınırlı bir küme f_n ($n \in \mathbb{N}$) ve f fonksiyonları E üzerinde sürekli oldukları durumda $\rho_n = \max \{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\}$ olarak alınabilir.

ÖR $\Rightarrow f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ genel terimi ile verilen $\{f_n\}$ dizisinin $E = [0, 1]$ aralığı üzerinde düzpen yakınsak olduğunu gösteriniz.

$$\forall x \in [0, 1] \text{ için } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} = x \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1] \} \\ &= \sup \left\{ \frac{x+x^2}{1+n+x} : x \in [0, 1] \right\} \leq \frac{2}{2+n} \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2+n} = 0 \text{ olduğundan dolayı,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \text{ 'dır. Demek ki } f_n \xrightarrow{[0,1]} x \text{ 'dır.}$$

OR $\Rightarrow$ Genel terimi $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ olan

$\{f_n\}$ dizisinin $E = [-1, 1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

$$\forall x \in [-1, 1] \text{ için } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(x-n)^2} = 0$$

olduğu açıktır.

$$p_n = \sup \{ e^{-(x-n)^2} : x \in [-1, 1] \} = e^{-(1-n)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{[-1,1]} 0 \text{ } x \in [-1, 1]$$

OR $\Rightarrow$ Genel terimi $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ olan

$\{f_n\}$ dizisinin $E = [0, 1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

$$x \in [0, 1] \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$p_n = \sup \{ x^n - x^{2n} : x \in [0, 1] \} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left[\sup \{ f_n(x) : x \in [0, 1] \} \right] = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow f_n(x) \not\rightarrow 0, x \in [0,1]$$

dir.

Teorem (Düzen yakınsaklık için Cauchy kriteri)

Terimleri $E \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin E üzerinde düzen yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in E$ için $\forall n \geq n_0$ ve $\forall m \geq n_0$ iken $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısının var olmasıdır.

Teorem: $\{f_n\}$, $E \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna E üzerinde düzen yakınsak ise f fonksiyonu E üzerinde süreklidir. Kısaca;

$$f_n \in C(E), n \in \mathbb{N} \text{ ve } f_n \xrightarrow{E} f \Rightarrow f \in C(E) \text{ dir.}$$

Teorem: $\{f_n\}$, $[a, b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir fonksiyonların dizisi olsun. Eğer, $\{f_n\}$ dizisi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak ise, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir. Ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$

dir. Bu durumda, limit alma ile integral alma işlemlerinin sırası değiştirilebilir denir.

İSPAT.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $f > 0$ sayısını $f \cdot (b-a) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde seçelim.

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a, b] \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$\mathcal{R}[a,b] \rightarrow [a,b]$ aralığında integrallenebilir.
 $\mathcal{C}[a,b] \rightarrow [a,b]$ " sürekli.

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

dir. $n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısını

sabit tutalım. $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğuna göre,

$[a,b]$ aralığının

alt ve üst toplamaların limitleri fonksiyonun verilen aralıktaki integraline eşitse fonksiyon integrallenebilirdir. Dolayısıyla, limit tanımından (2) eşitsizliği elde edilir.

$$U(f_n, P) - L(f_n, P) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

olacak şekilde bir P parçalanması (bölünüşü)

vardır. (1)'den $\forall x \in [a,b]$ için

(*) $f_n(x) - \delta < f(x) < f_n(x) + \delta$ olduğuna göre,
delta için verilen eşitsizlik kullanılarak (*) eşitsizliği elde edilir.

$$U(f, P) \leq U(f_n, P) + \delta(b-a) \quad (3)$$

(*) eşitsizliklerinde her terim $(b-a)$ ile çarpılarak (3) ve (4) eşitsizlikleri elde edilir.

ve

$$L(f, P) \geq L(f_n, P) - \delta(b-a) \quad (4)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğu elde edilir.

(2), (3) ve (4)'den

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &\leq U(f_n, P) - L(f_n, P) + 2\delta(b-a) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

dolayısıyla $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğu anlaşılır.

$$\text{Şimdi } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

olduğunu gösterelim.

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a,b] \Rightarrow \exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

öyle ki, $\forall n \geq m_0$ ve $\forall x \in [a,b]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ dir. O halde, } \forall n \geq m_0$$

için

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon$$

olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem: $\{f_n\}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında türevlene-

bilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer,

herhangi bir $x_0 \in [a,b]$ için $\{f_n(x_0)\}$ dizisi

yakınsak ve $\{f'_n\}$ dizisi $[a,b]$ üzerinde
düzgün yakınsak ise, $\{f_n\}$ dizisi de $[a,b]$
üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak
tır ve $\forall x \in [a,b]$ için $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$

veya

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

dir. Bu durumda, limit alma ile türev alma
işlemlerinin sırası değiştirilebilir denir.

İSPAT.

Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\{f_n(x_0)\}$

yakınsak olduğundan Cauchy dizi özelliğinden

$\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ öyle ki, $\forall n \geq n_0$ ve $\forall m \geq n_0$

için

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. $f'_n \Rightarrow \psi(x)$, $x \in [a,b] \Rightarrow \exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

öyle ki, $\forall n \geq m_0$, $\forall m \geq m_0$ ve $\forall t \in [a,b]$ için

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

dir. Diferansiyel hesabın ortalama değer

teoremi gereğince $\forall n \geq m_0, \forall m \geq m_0$ ve

$\forall t \in [a, b]$ için

türev için ortalama değer teoremine göre (**) da
 $[f_n(x) - f_n(t)] = f'_n(c)(t-x)$ ve $[f_m(x) - f_m(t)] = f'_m(c)(t-x)$ olarak
yazılabilir.

$$|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(t) - f_m(t)]|$$

$$= |f'_n(\bar{x}) - f'_m(\bar{x})| \cdot |t - x|$$

$$< \frac{\varepsilon \cdot |t - x|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. $\forall x \in [a, b]$ ve $\forall n \geq m_0, \forall m \geq m_0$
için

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]|$$

$$+ |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğu Cauchy kriteri teoremine göre $\{f_n\}$

dizisinin $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğu

elde edilir. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$

diyelim. Sabit $x \in [a, b]$ için $t \in [a, b]$, $t \neq x$ olmak üzere

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

olsun. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{t \rightarrow x} \varphi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} = f'_n(x)$$

olur. $\forall n \geq m_0$, $\forall m \geq m_0$ ve $\forall t \in [a, b]$ için

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

olduğuna göre, $\{\varphi_n\}$ dizisi $[a, b] \setminus \{x\}$

üzerinde düzgün yakınsaktır. $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$,

$x \in [a, b]$ olduğuna göre

$$\varphi_n(t) \Rightarrow \varphi(t), \quad t \in [a, b] \setminus \{x\}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{t \rightarrow x} \varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \text{ bulunur.}$$

NOT: $E \subset \mathbb{R}$ ve $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna E üzerinde düzpün yakınsak olsun. $x \in E$ (yani x limit noktası olsun) ve $t \in E$ olm. üzere

$$\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

olsun. Bu durumda $\{a_n\}$ dizisi yakınsaktır ve

$$\lim_{t \rightarrow x} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

dir.

NOT. Eğer ilave olarak, f_n ($n \in \mathbb{N}$) fonksiyonlarının $[a, b]$ üzerinde sürekli oldukları kabul edilirse $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [a, b]$

için

$$\int_{x_0}^x f_n'(t) dt = f_n(x) - f_n(x_0) \quad *$$

yazılabilir. $f_n'(t) \Rightarrow \varphi(t)$, $t \in [a, b]$ ve

$f_n' \in C[a, b]$ olduğundan $\varphi \in C[a, b]$ dir.

O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f_n'(t) dt = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$$

FONKSİYON SERİLERİ

$E \subset \mathbb{R}$ ve her bir n doğal sayısı için

$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\{f_n\}$, fonksiyon

ların bir dizisidir. Bu takdirde $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

serisine bir fonksiyon serisi denir.

Bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi için (sayı serilerinde olduğu gibi)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

ile tanımlı $\{S_n\}$ fonksiyonlar dizisine

serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n(x)$ 'e

de serinin n -kısmi toplamı denir.

Tanım: (Noktasal ve düzgün yakınsaklık)

1) Bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinin

$F(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna (toplamına)

noktasal yakınsaması için gerek ve yeter

koşul serinin kısmi toplamlar dizisinin

E 'de F fonksiyonuna yakınsamasıdır.

2) Bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinin bir

$F(x): E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna (toplamına)

düzenli yakınsaması için gerek ve yeter

koşul kısmi toplamlar dizisinin E 'de

$F(x)$ fonksiyonuna düzenli yakınsamasıdır.

3) Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi bir $F(x)$

fonksiyonuna yakınsarsa bu fonksiyon serisi

$F(x)$ fonksiyonu ile temsil ediliyor

demektir.

ÖR $\Rightarrow$ Genel terimi $(f_n(x) = x^n - x^{n+1}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R},$

$n \in \mathbb{N}$) olan serinin noktasal ve düzenli yakın-

saklığını inceleyiniz.

$\forall x \in [0,1]$ için $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ olduğu

açık tır.

$$x^n(1-x)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_n &= \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1] \} \\
 &= \sup \{ |x^n - x^{n+1} - 0| : x \in [0,1] \} \\
 &= \sup \{ |x^n \cdot (1-x)| : x \in [0,1] \} \\
 &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) \\
 &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0
 \end{aligned}$$

oldugundan $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0,1]} 0$ dir.

Kısmi toplamlar dizisine bakalım;

$$F_1(x) = x - x^2$$

$$F_2(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3)$$

$$F_3(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4)$$

⋮

$$F_n(x) = x - x^{n+1} = x(1 - x^n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(1 - x^n) = x$$

olur ki o halde seri $[0,1]$ 'de noktasal yakınsak ama düzgün yakınsak değildir.

Teorem: E , $\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi ve $\{f_n\}$ E 'de tanımlanmış reel fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sürekli fonksiyonlar serisi bir $F(x)$ fonksiyonuna E 'de düzgün yakınsarsa $F(x)$ E 'de sürekli dir.

NOT: Eğer her bir $n=1,2,\dots$ için f_n fonksiyonları E 'de sürekli ancak $F(x)$ E 'de sürekli değilse $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi E 'de $F(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsamaz.

NOT: Eğer terimleri negatif olmayan sürekli fonksiyonların bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi, kapalı ve sınırlı bir $[a,b]$ aralığında sürekli bir $F(x)$ fonksiyonuna yakınsarsa bu yakınsama $[a,b]$

aralığında düzgündür.

ÖR $\Rightarrow$ Genel terimi $f_n = (1+x)x^{n-1}$ olarak

verilen $f_n: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisinin

düzgün yakınsak olduğunu ispat ediniz.

Serinin n. kısmi toplamı

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n (1+x)x^{k-1} = \sum_{k=1}^n (x^{k-1} + x^k) \\ &= (1+x) + (x+x^2) + (x^2+x^3) + \dots + (x^{n-1}+x^n) \\ &= (1+x) [1+x+x^2+\dots] \end{aligned}$$

Eğer $x = -1$ ise $S_n(x) = 0$ olur, $F(x) = 0$

ve eğer $x = 0$ ise $S_n(x) = 1$ olur $F(x) = 1$

dir.

Eğer $-1 < x < 0$ ise

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n (1+x)x^{k-1} \\ &= (1+x) \sum_{k=1}^n x^{k-1} \\ &= (1+x) \frac{1-x^n}{1-x} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x) \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1+x}{1-x} = F(x)$$

dir. Sonuç olarak limit fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} & -1 \leq x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyon $x = -1$ 'de sağdan ve $x = 0$ 'de soldan sürekli olduğundan $F(x)$ fonksiyonu $[-1, 0]$ aralığında sürekli'dir dolayısıyla yakınsama düzgündür.

Tanım: (Mutlak yakınsaklık)

Fonksiyonların bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisinin E 'de $(f_n : E \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ mutlak olarak noktasal yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in E$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ serisinin yakınsak olmasıdır.

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ serisi E 'de düzgün olarak yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisinin de E 'de mutlak düzgün yakınsadığı söylenir.

Teorem: (Weierstrass M-testi)

Her bir $n=1,2,\dots$ için $f_n: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\{f_n\}$ bir fonksiyonlar dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ terimleri negatif olmayan yakınsak bir reel sayı serisi olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in E$ için $|f_n(x)| \leq M_n$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyonlar serisi E 'de mutlak ve düzgün olarak yakınsar.

ÖR $\Rightarrow$ Genel terimi $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n$

($f_n: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) olan fonksiyonlar serisinin $[-1,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu ispatlayınız.

$$|x| \leq 1 \text{ ise } \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n \right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ bir p -serisi dir $p=2 > 1$ olduğundan yakınsaktır. O halde fonksiyon serisi

$[-1,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır.

NOT: Düzgün yakınsayan ancak mutlak olarak yakınsamayan seriler de mevcuttur. Weierstrass M-testi bu duruma açıklık getirmez.

Teorem: (Terim terime integrasyon)

Eğer integre edilebilir fonksiyonların bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi bir F fonksiyonuna $[a,b]$ 'de düzgün yakınsarsa, F fonksiyonu da $[a,b]$ 'de integre edilebilir ve $\int_a^b F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ dir.

ÖR $\Rightarrow$ Genel terimi $f_n(x) = x^2(1+x)^{1-n}$

$(f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ olan fonksiyonlar serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsadığı fonksiyonu bulunuz ve $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^{k-1}} dx = \frac{5}{6}$

olduğunu gösteriniz.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad n. \text{ kısmi toplamını}$$

göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n x^2 (1+x)^{1-k} \\ &= x^2 + x^2 (1+x)^{-1} + x^2 (1+x)^{-2} + \dots \end{aligned}$$

$$x=1 \text{ ise } S_n(x) = \sum_{k=1}^n 2^{1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \text{ geo. seri}$$

dir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 2$ bulunur. $F(x)=2$ olur.

$x=0$ ise $S_n(x) = 0$ olur. $F(x)=0$ 'dır.

$x \in (0,1)$ ise

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n x^2 \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)^{k-1} \text{ 'dır.}$$

$$(0,1) \text{ aralığı için } \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x} < 1$$

olacağı için yine bir geometrik seri elde

$$\begin{aligned} \text{edilir. } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x}} = x(1+x) \text{ olur.} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

0 halde limit fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x(1+x) & 0 < x < 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$$

şeklinde dir. $F(x)$ fonksiyonu bakılırsa $[0,1]$ aralığında sürekli dir. Dolayısıyla yakınsama düzgün dür.

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x(1+x) dx = \left. \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{5}{6}$$

bulunur. 0 halde

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^{k-1}} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^{k-1}} dx = \frac{5}{6}$$

olarak elde edilir.

Teorem: (Terim terime türetme)

$$(\{f_n(x) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}) \quad (a,b) \subset \mathbb{R}$$

üzerinde türevlenebilir fonksiyonların bir dizisi

olsun. Eğer, herhangi bir $x_0 \in (a,b)$ için $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ serisi yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisi (a,b) üzerinde

düzensün yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi de

(a,b) üzerinde düzensün yakınsaktır ve bu serinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ toplamı } (a,b)$$

üzerinde türevlenebilir ve

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

veya

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

dir.

ÖR $\Rightarrow$ $(f_n(x) : [-a,a] \rightarrow \mathbb{R}, a < 1, n \in \mathbb{N})$

fonksiyon serisinin genel terimi $f_n(x) = x^{2k-2}$

dir. Bu fonksiyon serisinin toplamını bulunuz

ve $|x| \leq a < 1$ için $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{2n-4} = \frac{1}{(1-x^2)^2}$

olduğunu gösteriniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2k-2}$ serisinin n . kısmi toplamı

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^2)^{k-1} = \frac{1-(x^2)^n}{1-x^2} \text{ dir.}$$

$a < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ olur. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (x^2)^n}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2} = f(x)$$

olarak bulunur.

$|x| \leq a < 1$ için yani $x \in (-1, 1)$ için

$$f'(x) = 2(n-1)x^{2n-3} \text{ olup}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)x^{2n-3} \text{ serisi}$$

düzgün yakınsaktır. $|x| \leq a < 1$ ve $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} |2(n-1)x^{2n-3}| &= 2(n-1)|x|^{2n-3} \\ &\leq 2(n-1)a^{2n-3} = M_n \end{aligned}$$

olup bölüm testi gereğince

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2na^{2n-1}}{2(n-1)a^{2n-3}} = a^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = a^2 < 1$$

için $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla

$\sum_{n=2}^{\infty} f'(x)$ serimiz $|x| \leq a$ aralığında düzgün

yakınsaktır. O halde

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (x^{2n-2})$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)x^{2n-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{2n-4} \quad (x \neq 0 \text{ olduğundan})$$

elde edilir.