4. Özfonksiyonlara göre açılım formülü

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y$$

> **NOT:** Problemi L op. ile ifade edersek.
> $$Ly = \lambda y \Rightarrow (L - \lambda I) y = 0 \text{ olur.}$$
> Aşikâr olmayan çözümler için
> $$L - \lambda I = 0 \Rightarrow \lambda \text{ özdeğerler}$$
> y'ler bu özdeğerlere karşılık özfonk.

$$L \begin{cases} y''(x) + [\lambda - q(x)]\, y(x) = 0 & (4.1) \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 & (4.2) \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 & (4.3) \end{cases}$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. (4.1) denkleminin

$$u(0,\lambda) = \sin\alpha \quad , \quad u'(0,\lambda) = -\cos\alpha$$

koşullarını sağlayan $u(x,\lambda)$ ve

$$v(\pi,\lambda) = \sin\beta \quad , \quad v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$$

koşullarını sağlayan $v(x,\lambda)$ çözümlerini de gözönüne alalım.

$$W_x(u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = u(x,\lambda)\, v'(x,\lambda) - v(x,\lambda)\, u'(x,\lambda) \rightarrow u \text{ ve } v \text{ fonksiyonlarının wronskian determinantı}$$

Bu determinantın x'e bağlı olmadığını gösterelim:

$$\begin{aligned} v \;/\; & u'' + [\lambda - q(x)]\, u = 0 \\ u \;/\; & v'' + [\lambda - q(x)]\, v = 0 \\ \hline & v u'' + v[\lambda - q(x)]\, u = 0 \\ & -u v'' + u[\lambda - q(x)]\, v = 0 \\ \hline \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v u'' - u v'' = 0$$

$$\Leftarrow (u v' - u' v)' = 0 \Rightarrow [W_x(u,v)]' = 0 \Rightarrow W_x(u,v) = c$$

$$\cancel{u'v'} + u v'' - u'' v - \cancel{u'v'} = 0$$

$$u'' v - u v'' = 0$$

x'e bağlı değildir.

Wronskian determinantı $W_x(u,v) = W(\lambda)$ şeklindedir. x'e bağlı değil ama λ'ya bağlıdır.

Teorem 4.1: u ve v lineer bağımlı iseler λ, (4.1)-(4.3) probleminin bir özdeğeri ve u ile v'de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlardır.

İspat: u ve v lineer bağımlı iseler o zaman $u = c \cdot v$ olacak şekilde $c \neq 0$ bir sabit vardır.

v fonksiyonu (4.3) koşulunu sağladığından u fonksiyonu da (4.3) koşulunu sağlar. Dolayısıyla λ (4.1)-(4.3) probleminin bir özdeğeri u'da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur.

$v = \frac{u}{c}$ olduğundan v'de λ'ya karşılık gelen özfonksiyondur.

Teorem 4.2: u ve v fonksiyonlarından biri (4.1)-(4.3) probleminin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu ise diğeride λ'ya karşı gelen özfonksiyondur.

İspat: u, (4.1)-(4.3) probleminin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olsun. O zaman

$u(\pi,\lambda)\cos\beta + u'(\pi,\lambda)\sin\beta = 0$'dır.

$v(\pi,\lambda) = \sin\beta \quad v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$. olduğundan

$$\Rightarrow u(\pi,\lambda)\cdot[-v'(\pi,\lambda)] + u'(\pi,\lambda)\cdot v(\pi,\lambda) = 0 \Rightarrow u'(\pi,\lambda)v(\pi,\lambda) - v'(\pi,\lambda)u(\pi,\lambda) = 0$$

$$-W_\pi(u,v) = 0 \Rightarrow W_\pi(u,v) = 0$$

$W_x(u,v)$ x'e bağlı olmadığından

$\forall x \in [0,\pi]$ için $W_x(u,v)=0$'dır. O halde u ve v fonksiyonları Lineer bağımlıdır. Dolayısıyla bir önceki teoremden v de λ'ya karşı gelen öz fonksiyon olacaktır.

Teorem 4.3: (4.1)–(4.3) sınır değer probleminin özdeğerler kümesi ile $W(\lambda)=0$ denkleminin kökleri kümesi çakışıktır.

İspat: λ_0, (4.1)–(4.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve y_0'da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. Yani

$$y_0'' + [\lambda_0 - q(x)]\, y_0 = 0 \qquad (4.4)$$

$$y_0(0)\cos\alpha + y_0'(0)\sin\alpha = 0 \qquad (4.5) \longrightarrow y_0'(0) = -\frac{y_0(0)}{\sin\alpha}\cos\alpha \rightarrow u'(0,\lambda) = \frac{-y_0(0)}{y_0(0)}\cdot\cos\alpha$$

$$y_0(\pi)\cos\beta + y_0'(\pi)\sin\beta = 0 \qquad (4.6) \longrightarrow y_0'(\pi) = -\frac{y_0(\pi)}{\sin\beta}\cos\beta \rightarrow u'(\pi,\lambda) = \frac{-y_0(\pi)}{y_0(\pi)}\cdot\cos\beta$$

dır.

$y_0 \not\equiv 0$ olduğundan $y_0(0)$ ve $y_0'(0)$ sayılarından en az biri ve $y_0(\pi)$ ve $y_0'(\pi)$ sayılarından da en az biri sıfırdan farklıdır.

$y_0(0)=y_0'(0)=0$ alınırsa problem Cauchy problemi olur ve dif. denklemin tek bir çözümü olur ki bu çözüm sıfır olur. Bu durum y_0'ın özfonksiyon olması ile çelişir. Aynı durum $y_0(\pi) = y_0'(\pi) = 0$ için de geçerlidir.

$y_0(0) \neq 0$ ve $y_0(\pi) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$u(x,\lambda) = \frac{y_0(x)}{y_0(0)} \cdot \sin\alpha \quad , \quad V(x,\lambda) = \frac{y_0(x)}{y_0(\pi)} \cdot \sin\beta \qquad (4.7)$$

olduğunu gösterelim;

$$u(0,\lambda) = \sin\alpha \iff u(0,\lambda) = \frac{y_0(0)}{y_0(0)} \cdot \sin\alpha \qquad V(\pi,\lambda) = \sin\beta \iff V(\pi,\lambda) = \frac{y_0(\pi)}{y_0(\pi)} \cdot \sin\beta .$$

$$u'(x,\lambda) = \frac{y_0'(x)}{y_0(0)} \cdot \sin\alpha \Rightarrow u'(0,\lambda) = \frac{y_0'(0)}{y_0(0)} \cdot \sin\alpha$$

$$y_0(0)\cos\alpha + y_0'(0)\sin\alpha = 0 \quad (4.5) \longrightarrow y_0'(0) = -\frac{y_0(0)}{\sin\alpha}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow u'(0,\lambda) = \frac{\dfrac{-y_0(0)}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha}{y_0(0)} \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow u'(0,\lambda) = -\cos\alpha$$

$$V'(x,\lambda) = \frac{y_0'(x)}{y_0(\pi)} \cdot \sin\beta \Rightarrow V'(\pi,\lambda) = \frac{y_0'(\pi)}{y_0(\pi)} \cdot \sin\beta$$

$y_0(\pi)\cos\beta + y_0'(\pi)\sin\beta = 0 \qquad (4.6) \longrightarrow y_0'(\pi) = -\dfrac{y_0(\pi)}{\sin\beta}\cos\beta$

$$\Rightarrow v'(\pi,\lambda) = \frac{-\frac{y_0(\pi)}{\sin\beta}\cdot\cos\beta}{y_0(\pi)}\cdot\sin\beta \Rightarrow v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$$

(4.7) 'den $W(\lambda_0)=0$ olduğu görülür.

* $W(\lambda_0)=0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda u ve v fonksiyonları lineer bağımlıdırlar. Teorem 4.1 den λ_0 (4.1)-(4.3) probleminin bir özdeğeridir.

$$\left\{ W(\lambda_0) = uv' - u'v = \frac{y_0(x)}{y_0(0)}\cdot\sin\alpha\;\frac{y_0'(x)}{y_0(\pi)}\cdot\sin\beta - \frac{y_0'(x)}{y_0(0)}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{y_0(x)}{y_0(\pi)}\cdot\sin\beta = 0 \right\}$$

$W(\lambda_0)\neq 0$ olduğunu kabul edip aşağıdaki fonksiyonu gözönüne alalım.

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{u(x,\lambda)\cdot v(t,\lambda)}{W(\lambda)} & ; \quad x\le t \\[2ex] \dfrac{u(t,\lambda)\cdot v(x,\lambda)}{W(\lambda)} & ; \quad x\ge t \end{cases}$$

$G(x,t;\lambda)$ fonksiyonu x ve t'ye göre simetriktir. Yani $G(x,t;\lambda) = G(t,x;\lambda)$'dır. Bu fonksiyona (4.1)-(4.3) probleminin Green fonksiyonu denir.

Ör/

$y'' + \lambda y = 0$ (4.8)

$y(0) = y(\pi) = 0$ (4.9)

problemin Green fonksiyonunu bulunuz.

$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$

$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} u(0,\lambda) = \sin\alpha & u'(0,\lambda) = -\cos\alpha \\ v(\pi,\lambda) = \sin\beta & v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta \end{array}}$$

$y(0) = 0$

$y(\pi) = 0$

- $\alpha = \beta = 0$
- $\alpha = 0 \quad \beta = \pi$
- $\alpha = \pi \quad \beta = 0$
- $\alpha = \pi \quad \beta = \pi$

- $\alpha = \beta = 0$

$y(0)\cdot\overset{1}{\cos 0} + y'(0)\cdot\overset{0}{\sin 0} = 0$

$y(\pi)\cdot\underset{1}{\cos 0} + y'(\pi)\cdot\underset{0}{\sin 0} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} u(0,\lambda) = 0 & u'(0,\lambda) = -1 \\ v(\pi,\lambda) = 0 & v'(\pi,\lambda) = -1 \end{array}}$$

$y'' + \lambda y = 0 \rightarrow$ k.D: $r^2 + \lambda = 0$

1. $\lambda < 0 \rightarrow \lambda = -\mu^2 < 0 \quad r^2 = \mu^2 \Rightarrow r_{1,2} = \mp\mu \Rightarrow y = c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$
2. $\lambda = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2$
3. $\lambda > 0 \Rightarrow r^2 = \mp\sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow y = c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$

3. $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=u'(0,\lambda)=-1 \end{cases}$ $c_1=0$ $\quad y'(x)=-\sqrt{\lambda}\,c_1\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}\,c_2\cos\sqrt{\lambda}x \Rightarrow y'(x)=\sqrt{\lambda}\,c_2\cos\sqrt{\lambda}x$

$\Rightarrow y'(0)=\sqrt{\lambda}\,c_2=-1 \Rightarrow c_2=\frac{-1}{\sqrt{\lambda}}$

$$\begin{cases} v(\pi,\lambda)=y(\pi)=0 \Rightarrow c_1\cos\sqrt{\lambda}\pi+c_2\sin\sqrt{\lambda}\pi=0 \\ y'(\pi)=v'(\pi,\lambda)=-1 \Rightarrow -\sqrt{\lambda}\,c_1\sin\sqrt{\lambda}\pi+\sqrt{\lambda}\,c_2\cos\sqrt{\lambda}\pi=-1 \end{cases}$$

$c_1=-c_2\tan\sqrt{\lambda}\pi$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\cdot\tan\sqrt{\lambda}\pi\ c_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}\pi+\sqrt{\lambda}\,c_2\cos\sqrt{\lambda}\pi=-1$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\,c_2\left[\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\pi}{\cos\sqrt{\lambda}\pi}+\cos\sqrt{\lambda}\pi\right]=-1$

$\Rightarrow c_2=\frac{-\cos\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow c_1=\frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}}$

- $u(x,\lambda)=-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$

  $u'(x,\lambda)=-\cos\sqrt{\lambda}x$

- $v(x,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}}\cdot\cos\sqrt{\lambda}x+\left(-\frac{\cos\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)\cdot\sin\sqrt{\lambda}x$

  $=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(\pi-x) \Rightarrow v'(x,\lambda)=-\cos\sqrt{\lambda}(\pi-x)$

$W(u,v)=u(x,\lambda)\cdot v'(x,\lambda)-u'(x,\lambda)\cdot v(x,\lambda) \xRightarrow[\text{değil}]{x'e\ \text{bağlı}} W(u,v)=u(0,\lambda)\,v'(0,\lambda)-u'(0,\lambda)\cdot v(0,\lambda)$

$0\cdot(-\cos\sqrt{\lambda}\pi)-(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\pi$

$$W(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}\pi \neq 0$$

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} \left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{\lambda}}} \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)\right] \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\lambda}}}{\sin\sqrt{\lambda}\pi} & ; \quad x \leq t \\ \left[\frac{-\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{\lambda}}} \sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)\right] \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\lambda}}}{\sin\sqrt{\lambda}\pi} & ; \quad x \geq t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda} \cdot \sin\sqrt{\lambda}\pi} & ; \quad x \leq t \\ -\frac{\sin\sqrt{\lambda}t \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda} \cdot \sin\sqrt{\lambda}\pi} & ; \quad x \geq t \end{cases}$$

2. $y = c_1 x + c_2$

$y' = c_1$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 = u(0,\lambda) \Rightarrow c_2 = 0 \\ y'(0) &= u'(0,\lambda) = -1 \Rightarrow c_1 = -1 \end{aligned}\right\} \quad u(x,\lambda) = -x \Rightarrow u' = -1$$

$$\left.\begin{aligned} y(\pi) &= 0 = v(\pi,\lambda) \Rightarrow c_1\pi + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1\pi \\ y'(\pi) &= v'(\pi,\lambda) = -1 \Rightarrow c_1 = -1 \end{aligned}\right\} \quad c_2 = \pi$$

$$v(x,\lambda) = -x+\pi \Rightarrow v' = -1$$

$$W(u,v) = \begin{vmatrix} -x & -x+\pi \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = x - (-1)\cdot(-x+\pi) = \pi$$

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{-x.(\pi - t)}{\pi} & ; \quad x \leq t \\ \dfrac{-t\,(\pi - x)}{\pi} & ; \quad x \geq t \end{cases}$$

Teorem 4. 4: λ, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri değil ve $f(x)$ $[0,\pi]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$y'' + [\lambda - q(x)]\,y = f(x)$$

denkleminin (4.2) ve (4.3) sınır koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\pi} G(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt$$

dır.