KAPALI FONKSİYONLAR

$F(x,y,z)=0$ şeklindeki denklem değişkenlerden birine göre tek değerli olarak, örneğin $z=f(x,y)$ şeklinde çözülebiliyorsa bu denkleme iki değişkenli kapalı fonksiyon denir. Böyle bir denklemden değişkenlerden birinin her zaman çözüle-meyeceği aşikârdır.

$x^2+y^2+z^2+4=0 \rightarrow$ değişkenlerden hiçbirine göre reel çözüm yoktur.

$x^2+y^2+z^2=0 \rightarrow$ Sadece $x=y=z=0$ için çözüm kabul eder

$x^2+y^2+z^2-4=0 \rightarrow z=\mp\sqrt{4-x^2-y^2} \rightarrow$ iki değerli.

$F(x,y,z)=0$ şeklindeki bir denklemin, hangi şartlarda kapalı bir fonksiyon olacağı yani değişkenlerden birine göre tek değerli olarak çözülebileceği ve türevinin mevcut olacağını, kapalı fonksiyonların mevcudiyet (varlık) teoremi ile verilir.

$F(x,y,z)=0$ denkleminin $z=f(x,y)$ için kapalı fonksiyon olduğunu kabul edelim ve kısmi türevlerini hesaplayalım;

Teorem: $F(x,y,z)$, $f(x,y)$ fonksiyonları ve bunların türevleri bir V bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. Eğer $\forall (x,y,z)\in V$ için

$$F[x,y,f(x,y)]=0 \quad \text{ve} \quad F'_z(x,y,f(x,y))\neq 0 \quad \text{ise}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=f(x,y) \end{array}\right\} F(x,y,f(x,y)) = \tilde{F}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$ dir.

Ör/ $F(x,y,z) = x^3+2y^3+z^3-3xyz-3y+3x = 0$ denklemi ile kapalı olarak verilen $z=f(x,y)$ fonksiyonunun $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

1-yol

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2-3yz+3}{3z^2-3xy} = -\frac{x^2-yz+1}{z^2-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{6y^2-3xz-3}{3z^2-3xy} = -\frac{2y^2-xz-1}{z^2-xy}$$

2-yol

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3zy-3xy\frac{\partial z}{\partial x}+3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(3z^2-3xy) = -3x^2+3zy-3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(3x^2-3zy+3)}{3z^2-3xy} = -\frac{(x^2-yz+1)}{z^2-xy}$$

kapalı bir fonksiyonun yüksek mertebeden türevlerini hesaplamak için uzun formüller çıkartmak yerine birinci mertebe türev formülden hesaplanır ve diğer türevler kapalı türetme ile bulunur.

Ör/ $1+xy=\log\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)$ denklemi ile kapalı olarak verilen $y=f(x)$ fonk. için $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ türevlerini hesaplayınız.

$$F(x,y)=1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=-\frac{y-\dfrac{ye^{xy}-ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{x-\dfrac{xe^{xy}-xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}=-\frac{\cancel{ye^{xy}}+ye^{-xy}-\cancel{ye^{xy}}+ye^{-xy}}{\cancel{xe^{xy}}+xe^{-xy}-\cancel{xe^{xy}}+xe^{-xy}}=-\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}}=-\frac{y}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y'x-y}{x^2}=-\frac{-\frac{y}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}-y}{x^2}=\frac{2y}{x^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^2}=\frac{2y'x^2-4xy}{x^4}=\frac{-2\frac{y}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}^2-4xy}{x^4}=\frac{-6xy}{x^4}=\frac{-6}{x^3}y$$

Ör

$x\ln(yz) = yz\sin(xy) + 5xy$ denklemi ile kapalı olarak verilmiş $x = f(y,z)$ fonksiyonunun $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ ve $\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ türevlerini hesaplayalım;

$$F(x,y,z) = x\ln(yz) - yz\sin(xy) - 5xy = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial x} = -\frac{x\cdot\frac{y}{yz} - y\sin(xy)}{\ln(yz) - y^2 z\cos(xy) - 5y} = \frac{-\frac{x}{z} + y\sin(xy)}{\ln(yz) - y^2 z\cos(xy) - 5y}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\frac{x}{z^2}\left(\ln(yz) - y^2 z\cos(xy) - 5y\right) - \left(-\frac{x}{z} + y\sin(xy)\right)\cdot\left[\frac{y}{yz} - y^2\cos(xy)\right]}{\left[\ln(yz) - y^2 z\cos(xy) - 5y\right]^2}$$

Teorem : (Kapalı Fonksiyonların Mevcudiyet Teoremi)

$F(x,y,z)=0$ denklemi verildiğinde;

1) V tanım bölgesi içindeki (x_0,y_0,z_0) noktasında $F(x_0,y_0,z_0)=0$ ise,

2) (x_0,y_0,z_0) noktasının bir $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, $|z-z_0|<\delta$ komşuluğunda $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ kısmi türevleri mevcut ve sürekli iseler,

3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ ise

bu koşullar altında, (x_0,y_0) noktasının uygun bir $|x-x_0|<\xi$ ve $|y-y_0|<\xi$ komşuluğunda tanımlı, sürekli ve sürekli türevlere sahip $F(x_0,y_0,f(x_0,y_0))=0$ şartını sağlayan $z_0=f(x_0,y_0)$ olan tek bir $z=f(x,y)$ fonksiyonu vardır.

Ör/ $F(x,y,z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$ fonksiyonunun $(0,0,0)$ noktasında $z = f(x,y)$ şeklinde çözülebileceğini gösteriniz ve bu noktada $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini hesaplayınız.

$$F(0,0,0) = 0 + 0 + 0.e^0 + 0.\cos 0 = 0 \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + zye^{xz} & \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = e^{xz} - z\sin y & \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = 1 - 0 = 1 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + yxe^{xz} + \cos y & \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = 0 + 0.1 + 1 = 1 \end{array}\right\} \checkmark$$

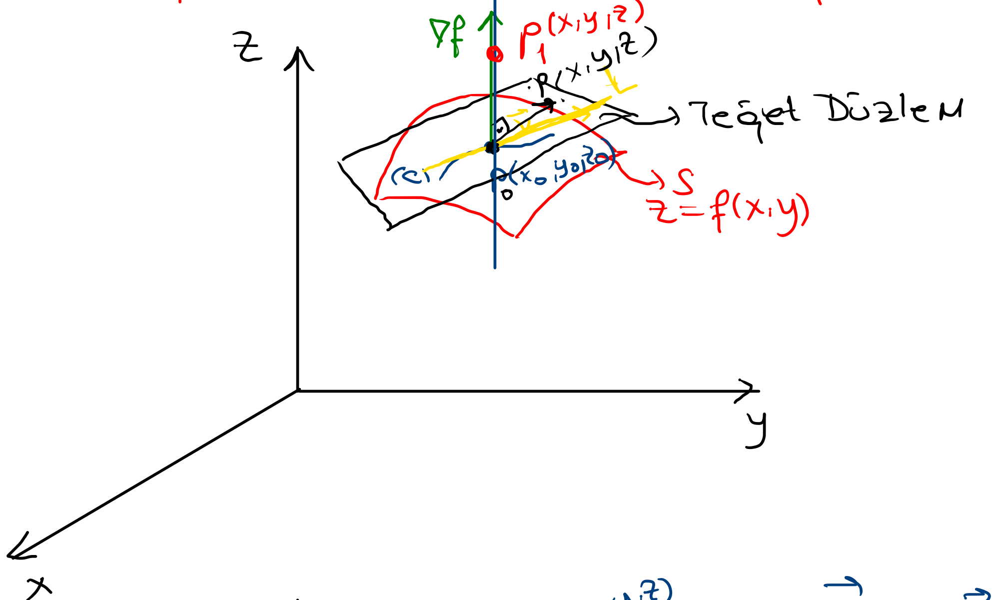
$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0 \checkmark$$

$F(x,y,z) = 0$ $z = f(x,y)$ şeklinde çözülebilir.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{1}{1} = -1$$

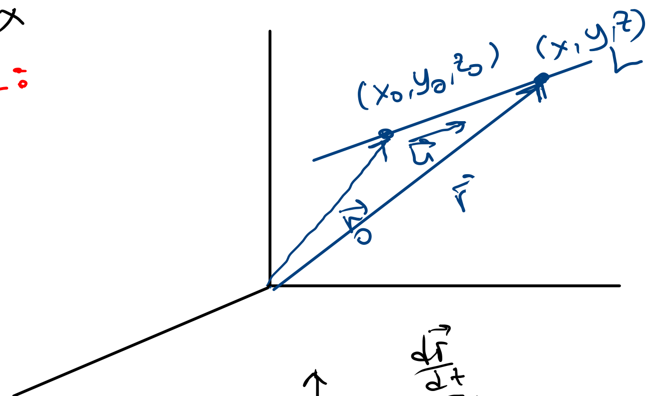
Teğet Düzlem ve Normal Doğru

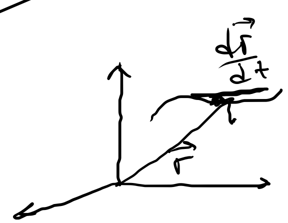


Bir S yüzeyinin denklemi $F(x,y,z)=0$ olsun. Yüzeyin bir (x_0,y_0,z_0) noktasından geçen bir doğru bu noktadan geçen ve yüzey üzerinde bulunan bir eğriye teğet ise yüzeye de teğettir.

Yüzey üzerindeki bir (x_0,y_0,z_0) noktasından geçen ve yüzey üzerinde bulunan sonsuz sayıda eğri çizilebilir. Buna göre yüzeyin bir noktasından geçen sonsuz sayıda teğeti olur.

Not:





$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\,\vec{i} + (y - y_0)\,\vec{j} + (z - z_0)\,\vec{k}$$

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$\vec{u} \parallel \vec{r} - \vec{r}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = t\cdot\vec{u}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} \rightarrow \text{Doğrunun vektörel denk.}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 \\ y &= y_0 + tu_2 \\ z &= z_0 + tu_3 \end{aligned}\right\} \text{skaler denk.}$$

Teorem :

$F(x,y,z)=0$ yüzeyinin herhangi bir noktasından geçen bütün teğetleri aynı bir düzlem üzerindedir ve bu düzleme teğet düzlem denir.

$F(x,y,z)$ yüzeyi üzerindeki bir eğrinin parametrik denklemleri

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\\ z&=z(t)\end{aligned}\right\}$$ olsun. Bu eğri yüzey üzerinde olduğundan yüzeyin denklemini sağlar yani;

$F(x(t),y(t),z(t))=0$ bu ifadeden t'ye göre türev alırsak;

$$\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right)}_{\text{Normal vektörü}}\cdot\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}\ \to\ \text{Teğet vektörü}}=0$$

Nabla $\leftarrow \nabla F$

Eğri boyunca her noktada ∇F eğrinin teğet vektörüne diktir. P_0 noktasından geçen tüm eğrilerin teğet vektörleri bu noktadaki yüzeyin normal vektörü olan ∇F'e diktir. O halde P_0 noktasından geçen teğet doğrularının tümü ∇F'e dik olan teğet düzlemde bulunur. $P(x,y,z)$ düzlemdeki herhangi bir nokta olmak üzere $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü de ∇F'e diktir.

$$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

$$\nabla F\Big|_{P_0} \perp \overrightarrow{P_0P} \Rightarrow \nabla F\Big|_{P_0} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(P_0)}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(P_0)}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(P_0)}(z-z_0) = 0}_{\text{Teğet Düzlemin Denklemi}}$$

P_0 noktasından geçen yüzeyin normal vektörüne paralel olan doğruya Normal Doğru denir.

$$\overrightarrow{P_0P_1} \parallel \nabla F \Rightarrow (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = \lambda \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(P_0)}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(P_0)}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(P_0)}\vec{k}\right]$$

$$\lambda = \frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(P_0)}} = \frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(P_0)}} = \frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(P_0)}} \rightarrow$$ Normal doğrusunun standart denklemi

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot \left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(P_0)}\right) \\ y &= y_0 + \lambda \left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(P_0)}\right) \\ z &= z_0 + \lambda \left(\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(P_0)}\right) \end{aligned}\right\}$$ Normal doğrusunun parametrik denklemleri.

Ör/ $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ yüzeyinin $P_0(1,2,4)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

$$\nabla F(1,2,4) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

Teğet Düz. Denk: $P(x,y,z) \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-4)\vec{k}$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \nabla F(1,2,4) = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 4(y-2) + (z-4) = 0$$

$$\boxed{2x + 4y + z = 14}$$ Teğet düz denk.

Normal Doğ: $P_1(x,y,z) \Rightarrow \overrightarrow{P_0P_1} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-4)\vec{k}$

$\overrightarrow{P_0P_1} \parallel \nabla F(1,2,4) \Rightarrow (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-4)\vec{k} = \lambda\left[2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\right]$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= 2 + 4\lambda \\ z &= 4 + \lambda \end{aligned}\right\}$$ Normal Doğ.inun parametrik denk.