Bu bölümdekiler tersten 20. sayfadan 9. sayfaya kadardır.

$$(x^3+xy^2)dx + x^2y\,dy = 0 = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

1'den

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3+xy^2 \longrightarrow \int \partial u = \int (x^3+xy^2)\partial x \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + h(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + \frac{dh}{dy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y$$

$$\Rightarrow x^2y = x^2y + \frac{dh}{dy} \Rightarrow \frac{dh}{dy} = 0 \Rightarrow dh = 0 \Rightarrow h = C_1 \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C_1$$

2'den

$$du(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = C \Rightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C_1 = C$$

$$C - C_1 = K \Rightarrow \boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} = K}$$ G.Ç.

Ör/ $(x^2+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ dif denklemi tam dif. denk. midir? Değilse bir integrasyon çarpanı yardımıyla tam hale getirerek çözünüz.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y \quad \neq \quad \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

Denklem tam dif. değildir.

$P(x,y) = x^2+y^2$

$Q(x,y) = xy$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - y = y$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$\Rightarrow (x^3+xy^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3+xy^2) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = 2xy$$

Tam dif. denk.

$$\Rightarrow \int \frac{\partial \lambda}{\lambda} = \int \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]}{Q} dx$$

$$\ln \lambda = \int \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]}{Q} dx \Rightarrow \boxed{\lambda = e^{\int \frac{\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]}{Q} dx}}$$

λ'nın x'e bağlı olması durumundaki integrasyon çarpanı

2.durum λ'nın sadece y değişkenine bağlı olduğu düşünülürse $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$'dır.

$$P\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = 0 \Rightarrow P\frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\lambda\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]$$

$$\int \frac{\partial \lambda}{\lambda} = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \frac{1}{P} \partial y$$

$$\ln \lambda = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \Rightarrow \boxed{\lambda = e^{\int \frac{\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]}{P} dy}}$$

λ'nın y'ye bağlı olması durumundaki integrasyon çarpanı

$$\lambda(x,y)P(x,y)dx + \lambda(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x,y)P(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,y)Q(x,y)\right]$$ olmalıdır.

O halde

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}P + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\lambda$$

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = 0$$

elde edilir. Bu son denklem λ'ya göre bir kısmi türevli dif. denk.'dir. λ'yı bulmak zordur. Özel durumlar ele alınır.

<u>1. Durum</u> λ sadece x'e bağlı olarak düşünülür.

O zaman $\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$'dır. Bu durumda $\cancel{-}Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \cancel{-}\lambda\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]$ olur.

$$\Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\lambda} = \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]\cdot\frac{1}{Q}\,\partial x$$

(2)'den $\int du(x,y)=\int 0 \Rightarrow u(x,y)=c$ (9)

(8) ve (9)'dan

$$y\ln x+\frac{y^4}{4}+c_1=c$$

$c-c_1=k \Rightarrow$ $\boxed{y\ln x+\frac{y^4}{4}=k}$ G.Ç.

Tam Hale Getirilebilen Denklemler (İntegrasyon çarpanı)

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

dif. denklemi tam dif. denklem değilse yani $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ ise $\lambda(x,y)$ gibi bir çarpanla denklemin her iki tarafı çarpılarak denklem tam dif. denkleme dönüştürülmeye çalışılır. Elde edilen dif. denklemin çözümü ile verilen denklemin çözümü aynı olacaktır.

$$\frac{y}{x}dx + (y^3+\ln x)\,dy = 0 = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

(2)

(1)

(1)'den

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = y^3 + \ln x$

(3)'den $\int \partial u = \int \frac{y}{x}\,\partial x \Rightarrow u(x,y) = y\ln x + h(y)$ (5)

(5)'den y'ye göre türev alalım; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \ln x + \dfrac{dh}{dy}$ (6)

(6) ve (4)'ten

$$\cancel{\ln x} + \frac{dh}{dy} = y^3 + \cancel{\ln x} \Rightarrow \int dh = \int y^3\,dy \Rightarrow h(y) = \frac{y^4}{4} + c_1 \quad (7)$$

(7)'yi (5)'te yerine yazalım; $u(x,y) = y\ln x + \dfrac{y^4}{4} + c_1$ (8)

(3) ve (6)'dan

$$\cancel{\tan y}-3x^2=\cancel{\tan y}+\frac{dh}{dx} \Rightarrow \frac{dh}{dx}=-3x^2 \Rightarrow \int dh=-3\int x^2dx$$

$$h(x)=-x^3+c_1 \quad (7)$$

(7)'yi (5)'de yerine yazalım;

$$u(x,y)=x\tan y-x^3+c_1 \quad (8)$$

(2)'den $\quad du(x,y)=0 \Rightarrow u(x,y)=c \quad (9)$

(8) ve (9)'dan

$$x\tan y-x^3+c_1=c$$

$$c-c_1=k \Rightarrow \boxed{x\tan y-x^3=k}$$

Tam dif. denk'in genel çözümüdür.

Ör/ $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$

dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}$$

= 0 halde denk tam dif. denk'dir.

Ör/ $\underbrace{(\tan y - 3x^2)}\,dx + x\sec^2 y\,dy = 0$ dif. denk'nin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tan y - 3x^2) = \sec^2 y$$
$$=$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(x\sec^2 y) = \sec^2 y$$

$\Rightarrow$ denklem tam dif. denk'dir.

$$(\tan y - 3x^2)\,dx + x\sec^2 y\,dy = 0 = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

2

1

1'den

3 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \tan y - 3x^2$

4 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\sec^2 y$

4'den $\int \partial u(x,y) = \int x\sec^2 y\,\partial y$

$u(x,y) = x\tan y + h(x)$ 5

5'den x'e göre türev alalım;

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \tan y + \dfrac{dh}{dx}$ 6

(1)' den

$$\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)dx + 2y\ln x\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Bulmamız gerekir.

* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2+\dfrac{y^2}{x} \longrightarrow \int \partial u = \int\left(x^2+\dfrac{y^2}{x}\right)\partial x \Rightarrow \boxed{u(x,y) = \dfrac{x^3}{3}+y^2\ln x + h(y)}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y\ln x + \dfrac{dh}{dy}$ (4)

(3) * $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y\ln x$

(3) ve (4)' den $\cancel{2y\ln x} = \cancel{2y\ln x} + \dfrac{dh}{dy} \Rightarrow \dfrac{dh}{dy} = 0 \Rightarrow \int dh = \int 0 \Rightarrow \boxed{h(y) = c_1}$

$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \dfrac{x^3}{3}+y^2\ln x + c_1}$ (5)

(2)' den $\int du(x,y) = \int 0 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = C}$ (6)

(5) ve (6)' dan

Tam. dif. denk'in G.Ç.

$$\frac{x^3}{3}+y^2\ln x + c_1 = C$$

$$C - c_1 = k \Rightarrow \boxed{\frac{x^3}{3}+y^2\ln x = k}$$

$\Rightarrow P_1(x,y)+f(y)+c_1=c \Rightarrow P_1(x,y)+f(y)=c-c_1$ $\quad (c-c_1=k)$

$\Rightarrow \boxed{P_1(x,y)+f(y)=k}$ Tam dif. denklemin genel çözümüdür.

Ör/ $\underbrace{\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{2y\ln x}_{Q(x,y)}\,dy=0$ dif. denklemin in genel çözümünü bulunuz.

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cdot\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ denklem tam dif. denk'dir.

$$\underbrace{\left(x^2+\frac{y^2}{x}\right)dx+2y\ln x\,dy}=0=du(x,y)=\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy}$$

1

2

Tam Diferansiyel Denklemler

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ denklemindeki P ve Q fonksiyonları

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (1)$$

koşulunu sağlıyorsa dif. denklem tam dif. denklemdir denir.

Eğer dif. denklem tam dif. ise o zaman denklemin sol tarafı bulunması gereken bir $u(x,y)$ fonksiyonunun toplam diferansiyeline eşittir.

$$0 = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

1

2

2'den $du(x,y) = 0$

$$\boxed{u(x,y) = C} \; *$$

1'den $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \text{ olmalıdır.}$$

3

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow \int \partial u(x,y) = \underbrace{\int P(x,y)\partial x}_{P_1(x,y)}$$

($u(x,y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi türevi alınırken y değişkeni sabit kabul edildiğinden $\int P(x,y)\partial x$ integralinde de y sabit kabul edilir)

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = P_1(x,y) + h(y)}$$

Bu integrasyon sabitidir. İntegral işleminde y sabit olmadığı halde sabit olarak gözönüne alındığından integrasyon sabiti y'ye bağlı bir fonksiyon olarak gözönüne alınır.

Bunu y'ye göre türetelim;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{dh}{dy}$$

(3)'den $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{dh}{dy} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{dh}{dy} = \underbrace{Q(x,y) - \frac{\partial P_1}{\partial y}}$$ $$= \Delta(y)$$

Eğer buraya kadar yapılan işlemler doğru ise bu fark ifadesi sadece y'ye bağlı olmalı ya da sabit olmalı.

$$\Rightarrow \int dh = \int \Delta(y)\,dy \Rightarrow h = \delta(y) + C_1 \quad (**)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = P_1(x,y) + \delta(y) + C_1}$$ $\Rightarrow$ (*) ve (**)'dan