Üstel ve Logaritmik Fonksiyon

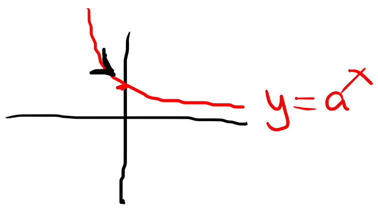
Üstel fonk:

$a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y=a^x$ şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyon denir. x'in her değeri için tanımlı fonksiyonlardır. $D(f)=\mathbb{R}$

$0<a<1$ için $y=a^x$ azalan

$a>1$ için $y=a^x$ artan

$0<a=\frac{1}{3}<1$ $\quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

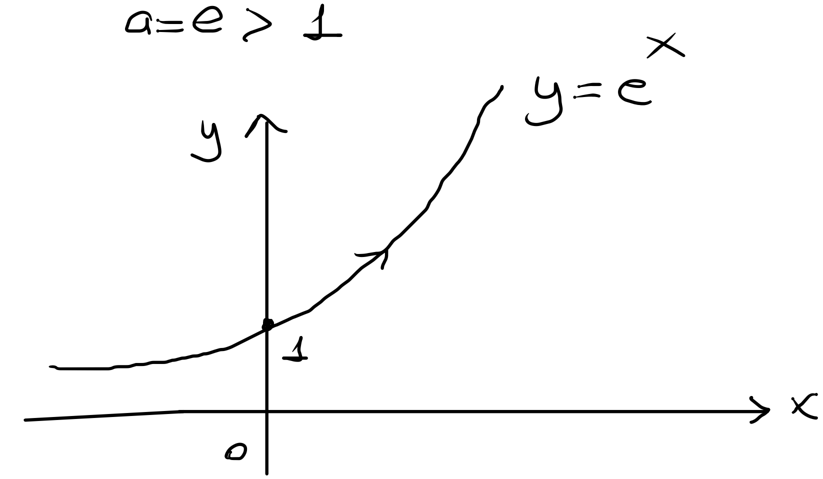


$x=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

$x=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$

$x \to \infty \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^\infty=0$

$a=e>1$



$a=3>1$ $\quad y=3^x$

$x=0 \Rightarrow 3^0=1$

$x=1 \Rightarrow 3^1=3$

$x \Rightarrow \infty \Rightarrow 3^\infty=\infty$

$R(f): (0,\infty)$

Logaritma fonk:

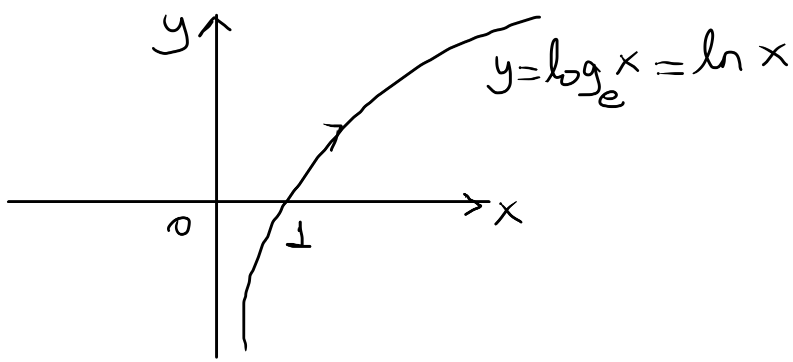
$y = a^x \iff x = \log_a y$

$a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y = \log_a x$ fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir. Tanım kümesi $D(f) = (0,\infty)$ 'dur. $R(f) = \mathbb{R}$

$0<a<1$ için $y = \log_a x$ azalan

$a>1$ için $y = \log_a x$ artan bir fonksiyondur.

$a = e > 1$



e tabanında ise doğal logaritma denir.

10 tabanında ise adi logaritma denir.

$\cancel{\log_a x \cdot \log_a y = \log_a (x+y)}$

Özellikleri:

$x>0$, $y>0$, $a>0$, $b>0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ olmak üzere

1°) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$,

2°) $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$

3°) $\log_a 1 = 0$

4°) $\log_a a = 1$

5°) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

6°) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

7°) $\log_a \infty = \infty$

8°) $\log_a 0 = -\infty$

$9°)\ \log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a}$ $\qquad 11°)\ a^x = e^{x.\ln a}$ $\qquad 13°)\ \ln e^x = x$

$10°)\ a^{\log_a x} = x$ $\qquad 12°)\ e^{\ln x} = x$ $\qquad 14°)\ \log_a a^x = x$

$\log_a\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \Rightarrow \log_a x \cdot \underbrace{\log_a a}_{1} = \log_a x$

Hiperbolik Fonksiyonlar

Herhangi x reel sayısı için hiperbolik sinüs $(\sinh x)$ ve hiperbolik kosinüs $(\cosh x)$ fonksiyonları

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad D(\sinh x) = \mathbb{R}$, $D(\cosh x) = \mathbb{R}$

$R(\sinh x) = \mathbb{R}$, $R(\cosh x) = [1, \infty)$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonlardır.

Bu fonksiyonlara hiperbolik denmesinin sebebi, herhangi t için $(\overset{x}{\cosh t}, \overset{y}{\sinh t})$ noktasının $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzerinde olmasından dolayıdır.

Bu tanımlara göre; $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad t \in \mathbb{R}$

$\cosh 0 = 1 \qquad \sinh 0 = 0$

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad D(\tanh x) = \mathbb{R}$

$R(\tanh x) = (-1, 1)$

$\cosh(-x) = \cosh x$ çift fonk.

$\sinh(-x) = -\sinh x$ tek fonk.

$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\qquad D(\coth x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$R(\coth x) = \mathbb{R} - \{(-1, 1)\}$

$$\operatorname{sech}x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch}x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$D(\operatorname{sech}x) = \mathbb{R}$, $R(\operatorname{sech}x): (0,1]$ $D(\operatorname{csch}x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1} \qquad R(\operatorname{csch}x) =$$

$$\cosh(x \mp y) = \cosh x . \cosh y \mp \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x \mp y) = \sinh x . \cosh y \mp \cosh x . \sinh y$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x . \cosh x$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(\cancel{e^x} + e^{-x} - \cancel{e^x} + e^{-x})(e^x + \cancel{e^{-x}} + e^x - \cancel{e^{-x}})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2e^{-x} . 2e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \operatorname{sech}^2 x$$

$$1 - \coth^2 x = \operatorname{csch}^2 x$$

Trigonometrik özdeşlikler

$$\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$$

$$\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \cos x \sin y$$

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  $= 1 - 2\sin^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x . \cos x - \sin x . \sin x$$

$$\cos(a \mp b) = \cos a . \cos b \pm \sin a . \sin b$$

$$\sin 2x = \sin(x+x) = 2 \sin x \cos x = \sin x . \cos x + \sin x . \cos x$$

$$\sin(a \mp b) = \sin a . \cos b \mp \sin b . \cos a$$

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

- sinhx ve tanhx fonksiyonları tüm reel eksende tanımlı 1-1 fonksiyonlardır. Dolayısıyla tersleri mevcuttur.

$$y = \operatorname{argsinh} x$$

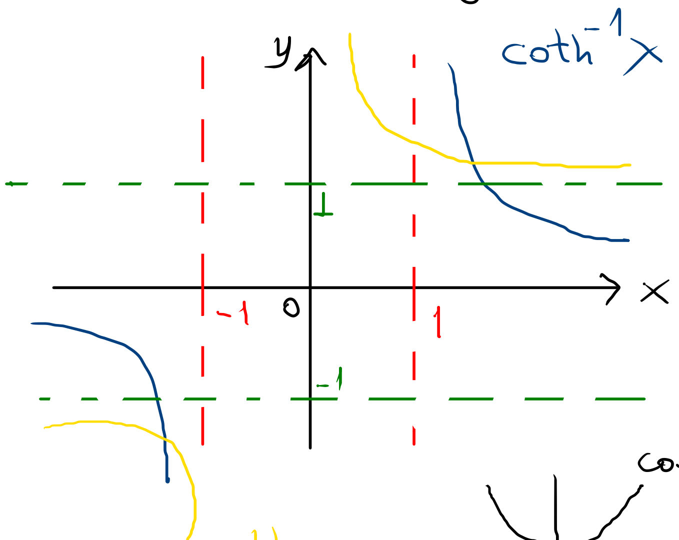
$$y = \sinh^{-1} x \iff x = \sinh y \ , \ \forall y \in \mathbb{R}$$

$$y = \tanh^{-1} x \iff x = \tanh y \ , \ \forall y \in \mathbb{R}$$

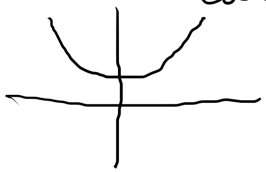
- cothx ve cschx fonksiyonları $\mathbb{R}-\{0\}$ kümesinde tanımlı 1-1 fonksiyonlardır. Dolayısıyla bu kümede tersleri vardır.

$$y = \coth^{-1} x \iff x = \coth y \ , \ \forall y \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x \iff x = \operatorname{csch} y \ , \ \forall y \in \mathbb{R}-\{0\}$$

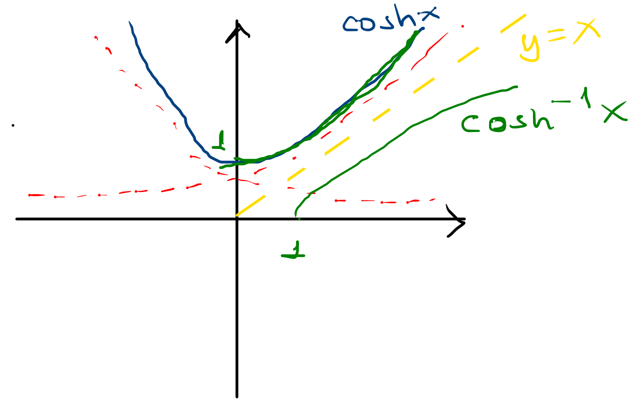


- coshx ve sech x fonksiyonları ise tüm reel eksende tanımlı olmalarına karşın 1-1 fonksiyonlar değildirler. Dolayısıyla tanım kümeleri $[0,\infty)$ aralığına kısıtlanmak suretiyle 1-1 hale getirilebilirler ve bu durumda tersleri mevcut olur.



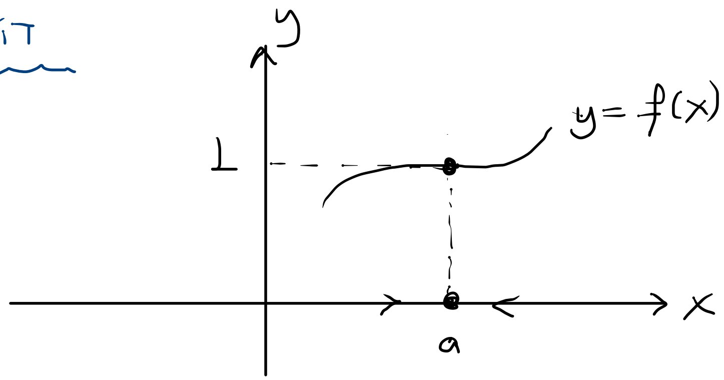
$y=\cosh^{-1}x \iff x=\cosh y, \quad \forall y\in[0,\infty)$

$y=\operatorname{sech}^{-1}x \iff x=\operatorname{sech} y, \quad \forall y\in[0,\infty)$



LİMİT ve SÜREKLİLİK

LİMİT



x bağımsız değişkeni, a sbt olmak üzere a'dan farklı ve a sayısına istenildiği kadar yakın değerler alıyorsa (Başka bir deyişle x ile a arasındaki fark x değiştiğinde istenildiği kadar küçük pozitif bir sayıdan daha küçük kalıyorsa yani $|x-a|<\delta$ $(\delta>0)$ oluyorsa) ve buna karşılık f(x)'nde a noktası yakınındaki her x için tanımlı olmak üzere (a'da tanımlı olmayabilir) L gibi bir değere istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x a'ya yaklaşırken f(x) de L limitine yaklaşır deriz.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ şeklinde gösterilir.

Ör/ 1. $\lim_{x \to a} x = a$

2- $\lim_{x \to a} c = c$

* Fonksiyonun ($f(x)$) $x=a$ noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı olması ve grafiğinin herhangi bir kırılma (kopma) olmadan $(a, f(a))$ noktasından geçmesi halinde

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

dır.

* Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ da tanımlı değilse o zaman uygun cebirsel işlemler yapılarak limit hesaplanabilir.

* $f(x)$ fonksiyonu $x=a$'da tanımlı olmadığı gibi limiti de olmayabilir.

$y = \frac{1}{\sin x}$ $\quad x=\pi$'de tanımsız.

$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sin x} \to \infty$ limit mevcut değil.

Örnekler.

1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} =$

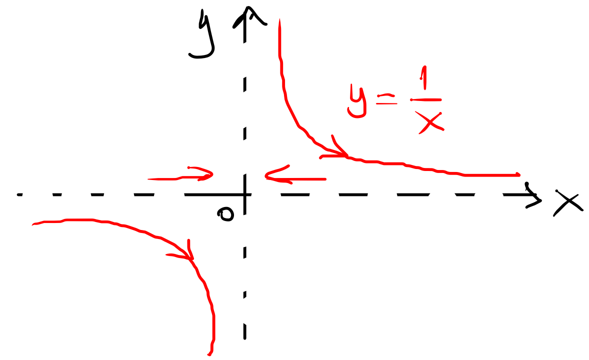
2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$.

$x-a$

3) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} =$

NOT: Bir f(x) fonksiyonu x=a noktasının her iki yanında tanımlı olmasına karşın bu noktada limite sahip olmayabilir.

$y=\frac{1}{x}$ $\quad$ $D(f): \mathbb{R}-\{0\}$

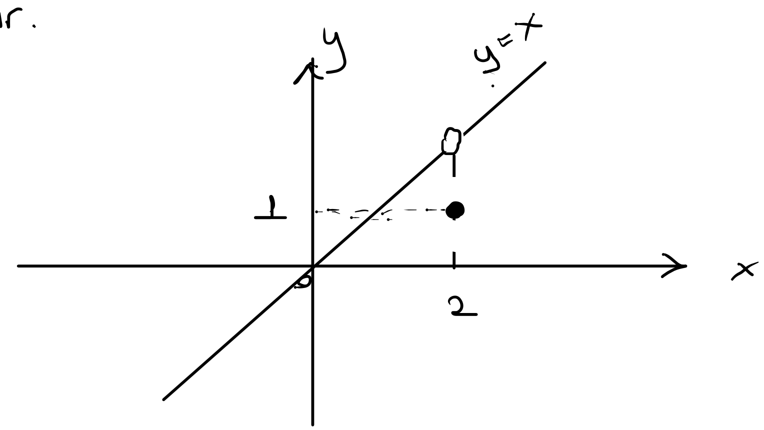


$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \rightarrow$ mutlak değerce $\frac{1}{x}$ büyür.

Belli bir L değeri söz konusu değildir.

NOT: Bir f(x) fonksiyonu x=a noktasında tanımlı olabilir ancak x a'ya yaklaşırken limit değeri f(a)'ya eşit olmayabilir.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 1$$

Sağ - Sol Limitler (Kenar limitler)

Sol limit: f(x) fonksiyonu a'nın solundaki bir (b, a) aralığında tanımlı ve x'i a'nın solundan a'ya yeterince yakın alarak, f(x)'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak f(x) x=a'da sol limite sahiptir deriz.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Sağ limit: f(x) fonksiyonu a'nın sağındaki bir (a, b) aralığında tanımlı ve x'i a'nın sağından a'ya yeterince yakın alarak f(x)'in M'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak f(x) x=a'da sağ limite sahiptir deriz.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = M$$

şeklinde gösterilir.

Ör/
$$\text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ \text{Tanımsız} & x = 0 \end{cases}$$

$x \to 0$ sağ ve sol limitini bulunuz.

Ö: $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ $x=2$'de sağ ve sol limitlerini bulalım.

TEOREM: Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir $x=a$ noktasında L limitine sahip olması için gerek ve yeter koşul $x=a$ noktasında sağ ve sol limitlerinin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır.

Buna göre verilen son örnekte $\operatorname{sgn}(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $x=0$'da, ve $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ fonksiyonu $x=2$'de limite sahip değildir.

Limit kuralları

Eğer $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ ve k bir sabit ise;

1°) Limit varsa tektir.

2°) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\mp g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\mp\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\mp M$

3°) $\lim\limits_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = k \cdot L$

4°) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right] = L \cdot M$

5°) $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]}{\left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right]} = \dfrac{L}{M}$ $\quad$ ($\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$ olması koşuluyla)

6°) $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer n çift iken $L > 0$ ise ve $m < 0$ iken $L \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n} \text{'dir.}$$

7°) Eğer a noktasını içeren bir aralık üzerinde (a noktası aralığın herhangi bir uç noktası olmayacak) $f(x) \leq g(x)$ ise

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x) \Rightarrow L \leq M \text{'dir.}$$

8°) (Sandviç teoremi) a noktasını içeren bir açık aralıktaki tüm x'ler için $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ($x=a$'da olmayabilir) olduğunu kabul edelim. Ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ olsun.

O zaman $\lim_{x \to a} g(x) = L$'dir.

- Verilen tüm kurallar sağ-sol limitler için de geçerlidir.
- Limit kuralları belirsizlik söz konusu olmadığında geçerlidir.

Ör/ $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ ise $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.