Ekstrem Değerler

$y=f(x)$ fonksiyonunun kendi tanım kümesindeki bir a noktasında, a'ya yeterince yakın f'in tanım kümesindeki tüm x'ler için eğer $f(x) \leq f(a)$ (veya $f(x) \geq f(a)$) ise bir yerel maksimum değere (veya yerel minimum değere) sahip olduğunu biliyoruz. Eğer uygun eşitsizlik f'in tanım kümesindeki tüm x'ler için sağlanırsa f'in a'da mutlak maksimum (veya mutlak minimum değere) sahip olduğunu söyleriz. Benzer durum çok değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir. İki değişkenli bir fonksiyon kendi tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında, (a,b) noktasına yeterince yakın f'in tanım kümesindeki tüm (x,y)'ler için eğer $f(x,y) \leq f(a,b)$ ise bir yerel (izafi) maksimum (veya $f(x,y) \geq f(a,b)$ ise bir yerel (izafi) minimum) değere sahip olduğunu söyleriz. Eğer eşitsizlik f'in tanım kümesindeki tüm (x,y)'ler için sağlanırsa f'in (a,b)'de bir global (mutlak) maksimum (veya minimum) değere sahip olduğunu söyleriz.

Teorem 1 (Ekstrem Değerler için Gerekli Koşullar):

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu kendi tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında eğer (a,b) noktası için aşağıdaki durumlardan biri söz konusu ise bir yerel veya mutlak ekstrem değere sahip olabilir.

1) (a,b) noktası fonksiyonun bir kritik noktası ise (fonksiyonun birinci mertebeden türevlerini sıfır yapan nokta ise)

2) (a,b) noktası fonksiyonun bir tekil noktası ise (birinci mertebeden türevleri tanımsız kılan nokta ise)

3) (a,b) noktası fonksiyonun tanım bölgesinin bir sınır noktası ise

Teorem 2 (Ekstrem Değerler için Yeterli Koşullar):

Eğer f tanım kümesi R^2 'de kapalı ve sınırlı bir küme olan iki değişkenli sürekli bir fonksiyon ise o zaman fonksiyonun görüntü kümesi reel sayıların sınırlı bir kümesidir ve tanım kümesinde fonksiyonun max ve min değerlerini aldığı noktalar vardır

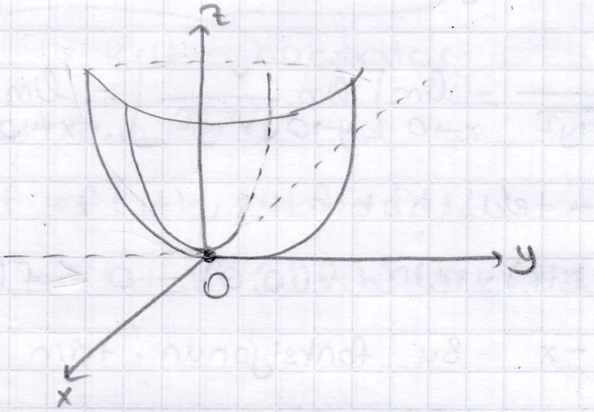
ÖRNEKLER

1) $f(x,y) = x^2+y^2$ $D(f): R^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y=0$$

$(0,0) \rightarrow$ kritik nokta



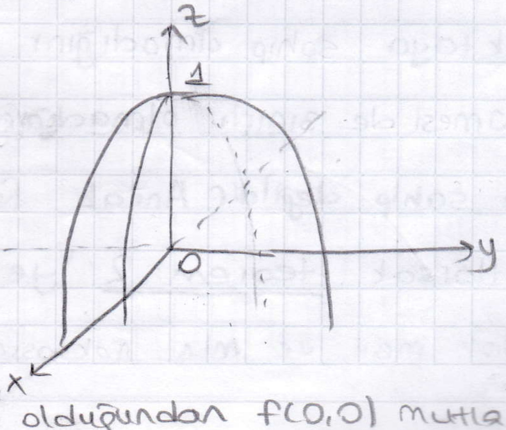
$\forall (x,y) \in D(f)$ için $f(0,0) \leq f(x,y)$ olduğundan $f(0,0)$ mutlak minimumdur

2) $g(x,y) = 1-x^2-y^2$ $D(f): R^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2y = 0 \Rightarrow y=0$$

$(0,0) \rightarrow$ kritik nokta



$\forall (x,y) \in D(f)$ için $f(0,0) \geq f(x,y)$ olduğundan $f(0,0)$ mutlak maksimumdur

3) $h(x,y) = y^2 - x^2$ $\quad D(f): \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -2x = 0 \Rightarrow x=0$$

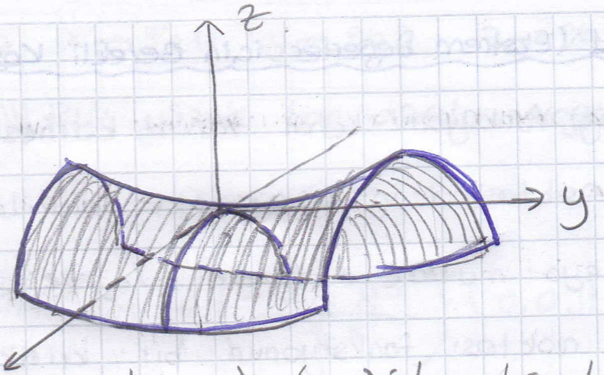
$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y=0$$

$(0,0) \rightarrow$ kritik nokta

$(a,0) \Rightarrow h(a,0) = -a^2 < 0$

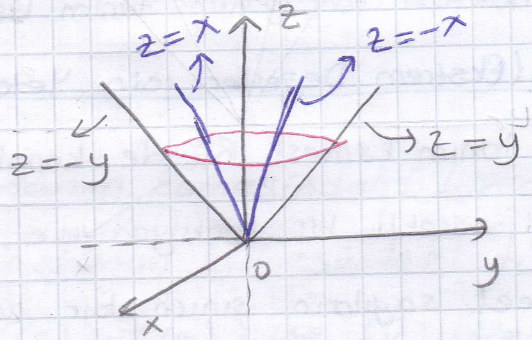
$(0,a) \Rightarrow h(0,a) = a^2 > 0$

$(0,0) \rightarrow$ Eyer noktasıdır.



$h(x,y)$ $(0,0)$'da bir kritik noktaya sahiptir fakat bu noktada ne bir yerel minimum nede bir yerel maksimum değere sahiptir. $h(0,0)=0$ olmasına karşın sıfırdan farklı tüm x ve y değerleri için $h(x,0)<0$, $h(0,y)>0$'dr.

4) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad D(f): \mathbb{R}^2$

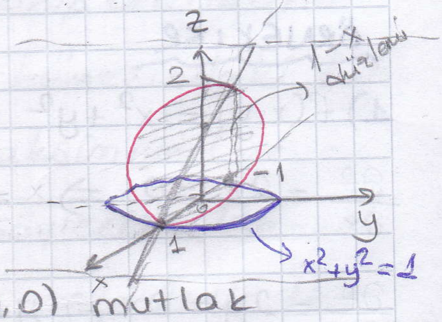


$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow y=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \lim_{y\to0} 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \lim_{x\to0} \frac{x}{x} = 1$$



$(0,0) \rightarrow$ tekil noktadır

$\forall (x,y) \in D(f)$ için $f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ $\;f(0,0)$ mutlak minimumdur

5) $f(x,y) = 1-x$ Bu fonksiyonun tüm düzlemde tanımlı olması ve $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ $\;\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ olmasından ötürü kritik noktaya, tekil noktaya sahip olmadığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla fonksiyon tanım kümesi de sınırlı olmadığından bir max ya da min noktasına sahip değildir. Ancak fonksiyon tanım kümesini $D(f): x^2+y^2 \leq 1$ gibi kısıtlarsak teorem 2 'ye göre fonksiyon sürekli olduğundan bir mutlak max ve min noktasına sahip olacaktır.

Kritik Noktaların Sınıflandırılması =

Verilen örneklerde fonksiyonu bir kritik veya tekil noktada max- min değerlere veya bir eyer noktasına sahip olup olmadığı açıkça görüldü. Daha komplike fonksiyonlar için iç kritik noktaları sınıflandırmak daha zordur. Böyle fonksiyonlar için sınıflandırma h ve k'nın küçük değerlerinde $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ farkı göz önüne alınarak yapılabilir. (a,b) noktası fonksiyonun kritik noktasıdır. Eğer bu fark pozitif ise fonksiyon yerel minimum değere negatif ise de yerel max değere sahiptir denir. Fark $\overset{?}{(0,0)}$ noktasının keyfi civarındaki bazı (h,k) noktaları için diğerleri için pozitif ise o zaman fonksiyonun (a,b) noktasında bir eyer noktasına sahip olduğu söylenir

Ör ⇒ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0$$

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad\quad x = 1$$

$$\Downarrow \quad\quad \Downarrow$$

$$y = 0 \quad\quad y = 1$$

$$\underbrace{A(0,0) \;,\; B(1,1)}_{\text{kritik noktalar}}$$

(1,1) için

$$\Delta f = f(1+h, 1+k) - f(1,1)$$

$$= 2(1+h)^3 - 3(1+h).(1+k) + 3(1+k)^2 - (-1)$$

$$\vdots$$

$$= h^2[3+2h] + 3[h-k]^2$$

(0,0) için

$$\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0)$$

$$= 2h^3 - 6hk + 3k^2 - 0$$

$$= 2h^3 - 6hk + 3k^2$$

$$(h,0) \longrightarrow \Delta f = 2h^3$$

$$h>0 \Rightarrow \Delta f>0$$

$$h<0 \Rightarrow \Delta f<0$$

h'ın farklı değerleri için Δf'in işareti değiştiğinden (0,0) bir eyer noktasıdır.

Son ifadedeki her iki terim $|h| < \frac{3}{2}$ ise pozitif olur ve her iki terim de h ve k sıfır olmadıkça 0 olmaz. Dolayısıyla h < h ve k için $\Delta f > 0$'dır. O halde fonksiyon (1,1) noktasında bir yerel minimum noktasına sahip olur diyoruz.

İki Değişkenli Fonksiyonlar için İkinci Türev Testi:

Fonksiyonun tanım kümesinin bir iç noktası olan (a,b) noktasının bir kritik nokta olduğunu kabul edelim. Ayrıca fonksiyonun 2. mertebeden kısmi türevlerinin (a,b) noktasının komşuluğunda sürekli olduğunu ve de

$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} = A$, $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \, \partial y} = B$, $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} = C$ değerlerine sahip olduğunu kabul edelim.

1) $B^2 - AC > 0$ ise f için (a,b) noktası bir eyer noktasıdır.

2) $B^2 - AC < 0$ ise

  a) $A > 0$ olduğunda f(a,b) minimum değerdir.

  b) $A < 0$ olduğunda f(a,b) maksimum değerdir.

3) $B^2 - AC = 0$ ise ikinci türev testi cevap vermez.

Fonksiyon (a,b)'de maksimum, minimum değere veya eyer noktasına sahip olabilir.

ÖRNEKLER

1) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz sınıflandırınız.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$

$6x^2 - 6x = 0$

$6x(x-1) = 0$

$x = 0 \quad x = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$

(0,0), (1,1) → kritik noktalar

(0,0)

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = -6 = B$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 6 = 0$$

$$B^2 - AC = (-6)^2 - 0 \cdot 6$$

$$= 36 > 0$$

(0,0) → eyer noktasıdır

(1,1)

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 12 = A$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = -6 = B$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = 6 = C$$

$$B^2 - AC = (-6)^2 - 12 \cdot 6$$

$$= 36 - 72$$

$$= -36 < 0$$

$A = 12 > 0$ olduğundan $f(1,1) = -1$ fonksiyonun yerel minimum değeridir

ÖR ⇒ $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy - 6y^2 - 3x - 21y + 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 6x - 12y - 21 = 0$$

$$6y^2 - 18y - 24 = 0$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$(y-4)(y+1) = 0$$

$$y = 4 \qquad y = -1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x = \frac{27}{6} \qquad x = -1/2$$

$\left(\frac{27}{6}, 4\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$ → kritik noktalardır

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y - 12$$

$\left(\frac{27}{6}, 4\right)$

$$\frac{\partial^2 f(\frac{27}{6}, 4)}{\partial x^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f(\frac{27}{6}, 4)}{\partial y^2} = 36$$

$$\frac{\partial^2 f(\frac{27}{6}, 4)}{\partial y \partial x} = -6$$

$$B^2 - AC = (-6)^2 - 6 \cdot 36$$

$$= -180 < 0$$

$A = 6 > 0$ $f\left(\frac{27}{6}, 4\right)$ → minimum değer

$\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$

$A=6$

$B=-6$

$C=-24$

$B^2-AC=(-6)^2-6\cdot(-24)$

$=180>0$

$\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$ → eyer noktasıdır

ÖDEV: $f(x,y)=x\cdot y\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırınız (5 tane nokta bulmalısın)

$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2y^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$=ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \Rightarrow y=0,\ 1-x^2=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow x=0,\ 1-y^2=0$

$x=0 \Rightarrow y=0 \longrightarrow (0,0)$ → kritik nokta

$x=\mp1$ → $x=1 \Rightarrow y=\mp1$; $x=-1 \Rightarrow y=\mp1$ } $(1,1),(1,-1)$; $(-1,1),(-1,-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2)-2xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2+2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(1-x^2)-y^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2)$

$=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2)(1-y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-y^2)-2xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-y^2+2)$

(0,0) için

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 = C$$

$$B^2 - AC = 1^2 - 0$$

$$= 1 > 0$$

(0,0) → eyer noktası

(1,1), (−1,−1) için

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2}{e} = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2}{e} = C$$

$$B^2 - AC = 0^2 - \left(\frac{-2}{e}\right)\left(\frac{-2}{e}\right)$$

$$= \frac{-4}{e^2} < 0$$

$$A = \frac{-2}{e} < 0$$

(1,1) ve (−1,−1) noktaları max noktalardır.

(−1,1), (1,−1) için

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{e} = A$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = B$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{e} = C$$

$$B^2 - AC = 0^2 - \left(\frac{2}{e}\right)\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$= \frac{-4}{e^2} < 0$$

$$A = \frac{2}{e} > 0$$

(−1,1) ve (1,−1) noktaları min noktalardır.

ÖR ⇒ $f(x,y) = 1 - x^4 - y^4 - 4x^2y^2$ kritik noktalarını bulup sınıflandırınız

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 - 8xy^2 = 0 \Rightarrow -4x\underbrace{(x^2+2y^2)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 - 8x^2y = 0 \Rightarrow -4y\underbrace{(y^2+2x^2)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(0,0) → kritik nokta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2 - 8y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 - 8x^2$$

(0,0) için

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0 = A \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 0 = B \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0 = C \end{aligned}\right\} B^2 - AC = 0$$

$$\Delta f = f(0+h, 0+k) - f(0,0)$$

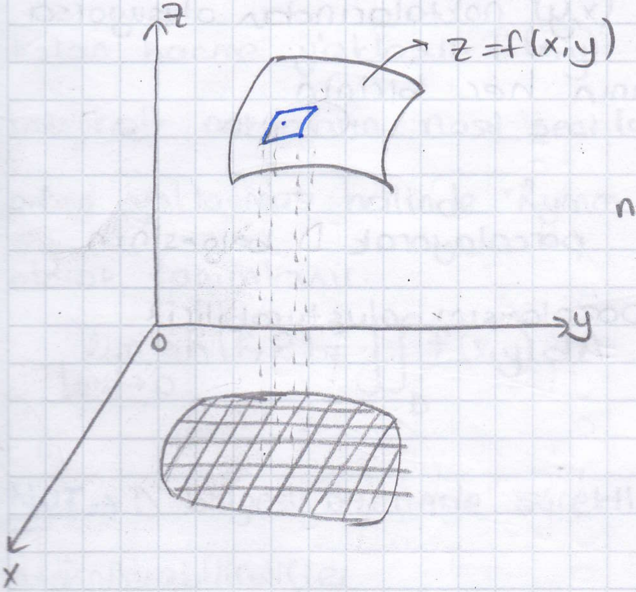
$$= \cancel{1} - h^4 - k^4 - 4h^2k^2 - \cancel{1}$$

$$= -\underbrace{(h^4 + k^4 + 4h^2k^2)}_{>0}$$

$\Delta f < 0 \Rightarrow (0,0)$ max nokta

$f(0,0)$ → max değer

İKİ KATLI İNTEGRALLER



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i).\Delta x_i \Delta y_i=\iint_D f(x_i,y_i)dA$$

$dA \to dxdy$
$\to dydx$

$\Delta A=\Delta x_i \Delta y_i$

yükseklik ← $f(x_i,y_i)$

xoy düzleminde bir c eğri ile sınırlı kapalı bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olan $z=f(x,y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $z=f(x,y)$ yüzeyi xoy düzlemi ve D bölgesinin sınırından geçen z-eksenine paralel olan prizma ile sınırlı üç boyutlu bölgenin standart hacim problemi iki değişkenli bir fonksiyonun iki katlı integralidir. Üç boyutlu bölgeye cisim denir. D bölgesi üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonunu iki katlı integrali;

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA}$$

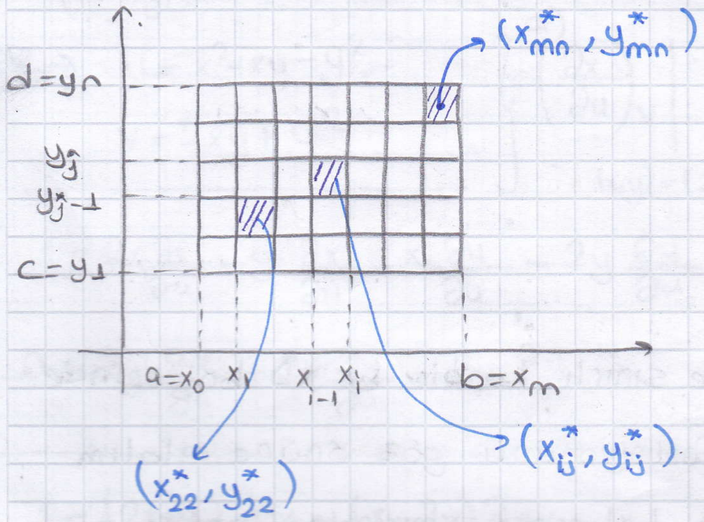
şeklinde tanımlanır Burada D uygun bir bölge, f(x,y) pozitif degerli bir fonksiyondur. İki katlı integralin degeri cismin hacmini verir.

Dikdörtgenler Üzerinde İki Katlı İntegraller

D bölgesinin; kenarları xy düzlemindeki koordinat eksenlerine paralel bir dikdörtgensel bölge olduğunu f(x,y) fonksiyonunun da bu bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olduğunu göz önüne alalım. Eger D bölgesi $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ şeklindeki (x,y) noktalarından oluşuyorsa o zaman [a,b] ve [c,d] aralıklarının her birinin

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_m = b$

$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$ şeklinde parçalayarak D bölgesinin küçük dikdörtgenlerden oluşan bir P parçalanışını oluşturabiliriz



P parçalanışı mn tane D_{ij} $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ dikdörtgeninden oluşur. Dikdörtgenlerin her biri $x_{i-1} \le x < x_i$, $y_{j-1} < y \le y_j$ noktalarından oluşur. D_{ij} dikdörtgenlerinin alanı $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ve diyagonal uzunluk $diam(D_{ij}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$ şeklindedir.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $\quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$

P parçalanışının normu $\|P\| = \max\limits_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} (\operatorname{diam}(D_{ij}))$. Her bir D_{ij} dikdörtgeninden bir (x_{ij}^*, y_{ij}^*) noktası alarak her bir parçalanıştaki dikdörtgene karşı gelen mn terimin toplamı olan

$$R(f,P)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}$$ Ryman toplamını oluşturalım.

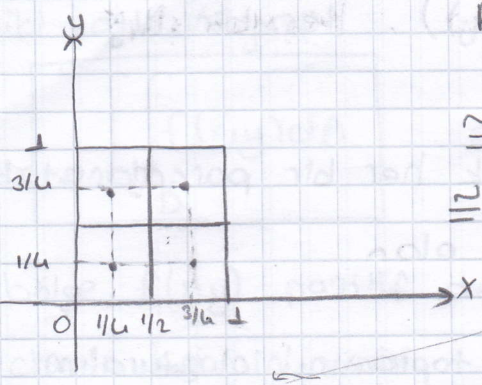
Her bir D_{ij} dikdörtgenine karşılık gelen terim eğer $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \geq 0$ ise tabanı D_{ij} ve yüksekliği $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$'in değeri olan dikdörtgensel kutunun hacmidir. Dolayısıyla pozitif f fonksiyonları için Ryman toplamı D bölgesinin üstünde ve f(x,y)'nin grafiğinin altında kalan hacme yaklaşır. f(x,y) fonksiyonun D bölgesindeki iki katlı integrali noktaların nasıl seçildiğinden bağımsız olarak P'nin normunun sıfıra yaklaşması halinde Ryman toplamının limitinin mevcut olması olarak tanımlanır.

sınırlar verilmediyse → dx dy = dy dx

$$\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \iint_D f(x,y)\,dA$$

NOT ⇒ D bölgesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar bu bölgede integrallenebilirdirler.

ÖR ⇒ D bölgesi $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ karesi olsun. $\iint_D (x^2y)\,dA$ integraline yaklaşık bir değer bulmak için bölgenin 4 tane küçük kareye parçalanışına karşılık gelen Ryman toplamını her birinin merkezindeki noktaları seçerek kullanınız.



$$R(x^2+y,P)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)\Delta A_{ij}$$

$$\cong f(x_{11}^*,y_{11}^*)\Delta A_{11}+f(x_{12}^*,y_{12}^*)\Delta A_{12}+f(x_{21}^*,y_{21}^*)\Delta A_{21}+f(x_{22}^*,y_{22}^*)\cdot\Delta A_{22}$$

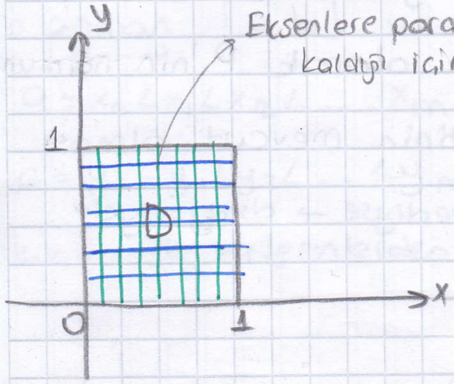
$$\cong f(1/4,1/4)\cdot\frac{1}{4}+f(3/4,1/4)\cdot\frac{1}{4}+f(1/4,3/4)\,\frac{1}{4}+f(3/4,3/4)\cdot\frac{1}{4}$$

$$\cong\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\frac{1}{4}+\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\frac{1}{4}+\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\frac{1}{4}+\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\cdot\frac{1}{4}$$

$$\cong\frac{5}{16}\,\frac{1}{4}+\frac{13}{16}\,\frac{1}{4}+\frac{13}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{21}{16}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\cong\frac{52}{64}=\frac{13}{16}$$

⇑ Rymann Toplamı ile



Eksenlere paralel çizgiler çektik. Her ikisinde de aynı eğriler arasında kaldığı icin bölge düzgündür.

$$\iint_D (x^2+y)\,dA=\int_0^1\int_0^1(x^2+y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1(x^2+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1(x^2+y)\,dx\right]dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+yx\Big|_0^1\right]dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y\right)dy=\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\,//$$

Teorem: (Fubini'nin 1. Teoremi): Eğer $f(x,y)$ $a\le x\le b$ $c\le y\le d$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde sürekli ise;

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

üstten $z = 10 + x^2 + 3y^2$ eliptik paraboloidi ve alttan $D: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ dikdörtgeni ile sınırlanan cismin hacmini bulunuz.

ör ⇒ $D: 0 \leq x \leq 2$ ve $f(x,y) = 100 - 6x^2y$ olduğuna göre

$-1 \leq y \leq 1$ $\qquad \iint_D f(x,y)\,dA = ?$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} (100 - 6x^2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[100x - 6\frac{x^3}{3}y \Big|_0^2\right]dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[200 - 16y\right]dy$$

$$= 200y - 8y^2 \Big|_{-1}^{1} = (200-8) - (-200-8) = \underline{\underline{400}}$$

Teorem (Fubini'nin 2. Teoremi): $f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde sürekli olsun.

1) Eğer D bölgesi $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ile tanımlı ise;

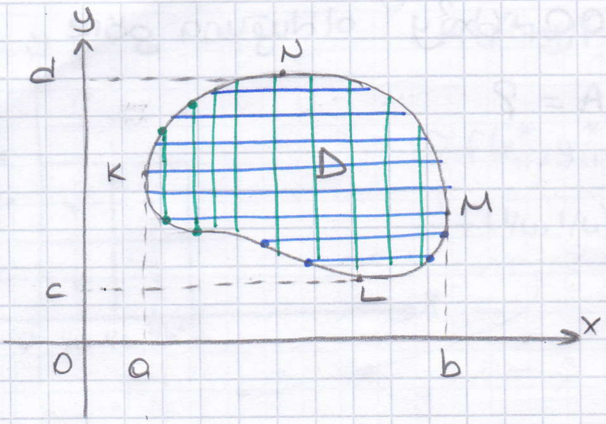
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,\underset{\smile}{dx}} \rightarrow \text{x'e göre düzgün}$$

2) Eğer D bölgesi $g_1(y)$ ve $g_2(y)$ $[c,d]$ aralığında sürekli olmak üzere $c \leq y \leq d$ $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$ ile tanımlı ise;

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,\underset{\smile}{dy}} \rightarrow \text{y'ye göre düzgün}$$

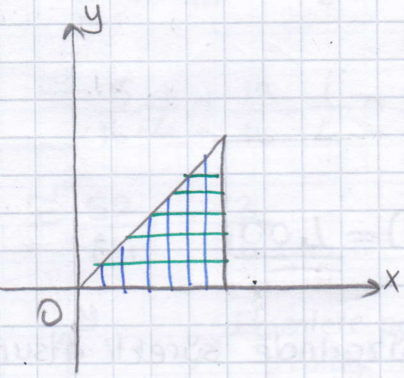
NOT: Bir D bölgesinin çevresi eksenlere paralel doğrularla en çok 2 noktada kesişiyorsa böyle bölgeye düzgün bölge denir.

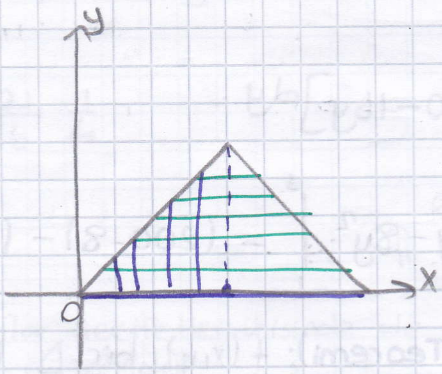
Üçgen tabanı xy-düzleminde olan ve x-ekseni, $y=x$, $x=1$ doğruları ile sınırlanan, tepesi $z=3-x-y$ düzleminde bulunan prizmanın hacmini bulunuz.

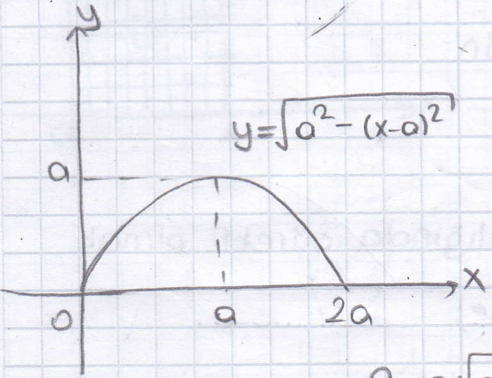


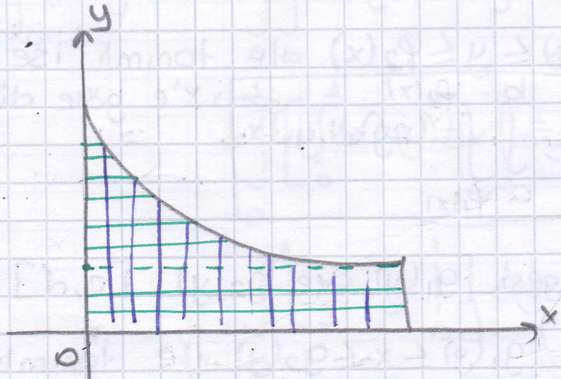
$\widehat{KLM}: \varphi_1(x)$ $\widehat{LKN}: g_1(y)$

$\widehat{KNM}: \varphi_2(x)$ $\widehat{LMN}: g_2(y)$









$y = 2-x$

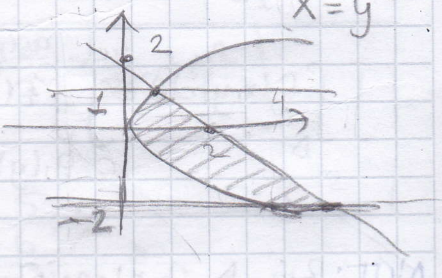
$y^2 = 2-y$

$y^2+y-2=0$

$y=-2$ $y=1$

$X=y^2$

$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} f(x,y)\,dy\,dx \qquad \int_0^{a}\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

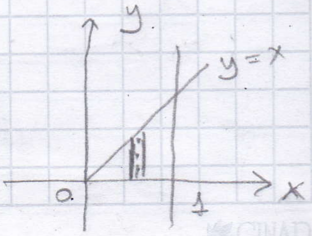


$$I = \int_{-2}^{+1}\int_{y^2}^{2-y} dx\,dy$$ bölgeyi çizmeye çalış, integrasyon sırasını değiştirerek sınırları yazın

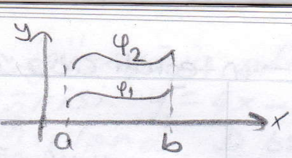
$-2 \leq y \leq 1$ $y^2 \leq x \leq 2-y$

D: $z=0$, $x=1$, $y=x$, x-ekseni

$$\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dA = ! \qquad \int_0^1\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx$$



$$\iint_D dy\,dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx$$



İki Katlı İntegrallerin Özellikleri

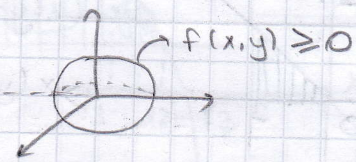
f ve g bir D bölgesi üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar, L ve M herhangi reel sabitler olmak üzere

1) $D=0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA = 0$

✓2) $f(x,y)=1 \Rightarrow \iint_D 1.dA \rightarrow$ D bölgesinin alanını verir.

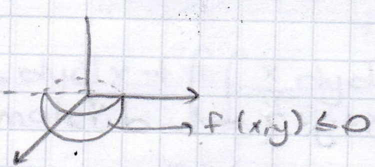
✓3) Eğer D bölgesi üzerinde $f(x,y) \geq 0$ ise

$\iint_D f(x,y)\,dA = V$'dir. V, D bölgesinin üzerinde $f(x,y)$'nin grafiği altında dikey olarak oluşan cismin hacmidir.



✓4) Eğer D bölgesi üzerinde $f(x,y) \leq 0$ ise

$\iint_D f(x,y)\,dA = -V \leq 0$'dır. $-V$, D bölgesinin altında $f(x,y)$'nin grafiği üstünde dikey olarak oluşan cismin hacmidir.



5) $\iint_D [L f(x,y) \mp M g(x,y)]\,dA = L\iint_D f(x,y)\,dA + M\iint_D g(x,y)\,dA$

6) $f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$

7) $\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint |f(x,y)|\,dA$

8) Eğer $D_1, D_2, \ldots, D_k$ bölgeleri üst üste gelmeyen (kesişmeyen veya çakışmayan) bölgeler ve $f(x,y)$ bu bölgelerin her birinde integrallenebilir bir fonksiyon ise $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$ birleşim bölgesinde de integrallenebilirdir ve

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA_1 + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA_2 + \ldots + \iint_{D_k} f(x,y)\,dA_k$$

Kesişmeyen bölgeler ortak sınır noktasına sahip olabilirler ancak ortak iç noktaya sahip olamazlar

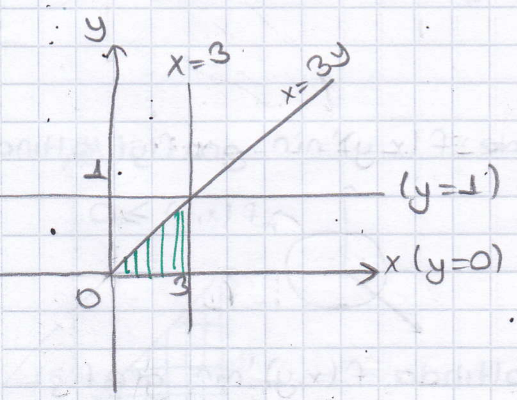
e^{x^2} → integrali çözülemez. (tek katlı integralde)

ÖR → $I=\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,\overset{\text{y'ye göre düzgün}}{dy}$ integralini hesaplayınız ✓

> içteki integral eliptik olduğundan integrasyon sırası değiştirilmelidir.

$0\leq y\leq 1$

$3y\leq x\leq 3$



$$I=\int_0^3\int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^3\left[\,y\Big|_0^{\frac{x}{3}}\right]e^{x^2}\,dx$$

$$=\int_0^3 \frac{x}{3}e^{x^2}\,dx$$

$x^2=t$

$2x\,dx=dt$

$x\,dx=\frac{dt}{2}$

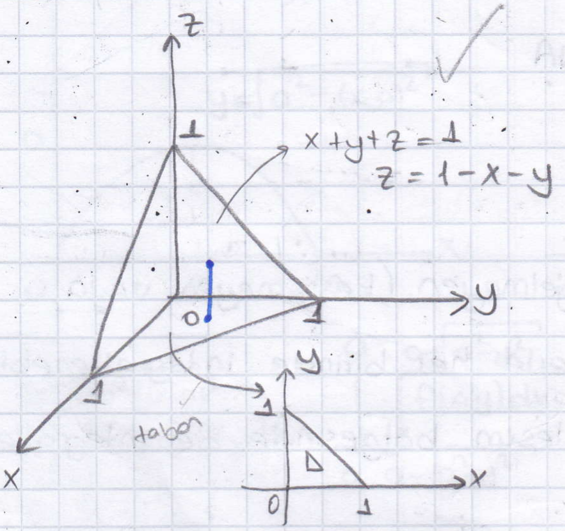
$x=0 \Rightarrow t=0$

$x=3 \Rightarrow t=9$

$$=\frac{1}{3}\int_0^9 e^t\,\frac{dt}{2}$$

$$=\frac{1}{6}e^t\Big|_0^9=\frac{1}{6}(e^9-1)$$

ÖR → $x+y+z=1$ düzlemi $x=0$ $y=0$ ve $z=0$ düzlemleri arasında kalan cismin hacmini bulunuz. ✓



$$V=\iint_D (1-x-y)\,dA=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[y-xy-\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right]dx$$

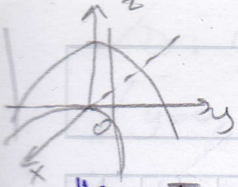
$$=\int_0^1\left[(1-x)-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[1-x\cancel{-x}+x^2-\frac{1}{2}\cancel{+x}-\frac{x^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{6}\,br^3$$



$\int u\,dv = uv - \int v\,du =$

$z = 16 - x^2 - y^2$ yüzeyinin altında ve $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi $y = 4x - 2$ doğrusu, x-ekseni ile sınırlanan D bölgesinin üzerinde bulunan cismin hacmini bul.

$\frac{20803}{1680}$

ÖR ⇒ $I = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{3-y}} \frac{x}{y}\,dx\,dy$

a) Verildiği şekilde hesaplayınız

b) İntegrasyon sırasını değiştirerek integrali yazınız.

a) $I = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3-y}} \right] \frac{1}{y}\,dy$

$= \int_1^2 \left(\frac{3-y}{2y} \right) dy$

$= \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{dy}{y} - \frac{1}{2} \int_1^2 dy$

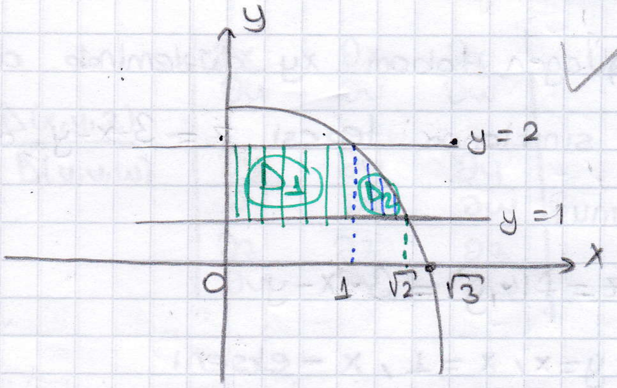
$= \frac{3}{2} \left(\ln|y| \Big|_1^2 \right) - \frac{1}{2} \left(y \Big|_1^2 \right)$

$= \frac{3}{2} \left(\ln 2 - \cancel{\ln 1}^{\,0} \right) - \frac{1}{2}(2-1)$

$= \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}$

b) $1 \leq y \leq 2$

$0 \leq x \leq \sqrt{3-y}$ $\quad y = 3 - x^2$



$I = \iint_{D_1} \frac{x}{y}\,dy\,dx + \iint_{D_2} \frac{x}{y}\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \int_1^2 \frac{x}{y}\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_1^{3-x^2} \frac{x}{y}\,dy\,dx$

ÖR ⇒ $I = \int_0^3 \int_1^{e^y} (x+y)\,dx\,dy$

a) Verildiği şekilde çözünüz

b) İntegrasyon sırasını değiştirerek integrali yazınız

a) $I = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} + xy \Big|_1^{e^y} \right) dy = \int_0^3 \left[\frac{e^{2y}}{2} + ye^y - \left(\frac{1}{2} + y \right) \right] dy$

$= \frac{1}{2} \int_0^3 e^{2y} + \int_0^3 ye^y\,dy - \frac{1}{2} \int_0^3 dy - \int_0^3 y\,dy$

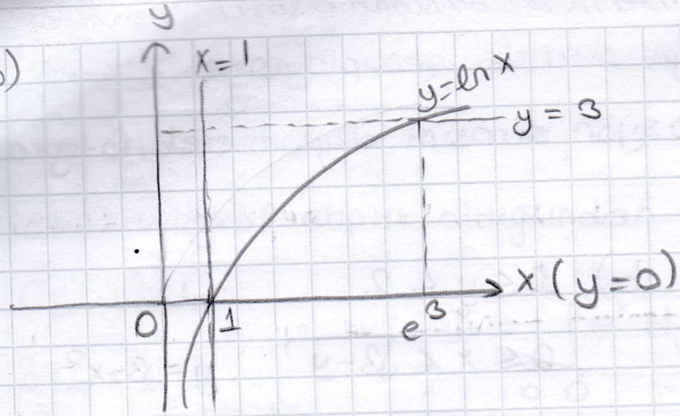
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_0^3 + \left[ye^y \Big|_0^3 - \int_0^3 e^y\,dy \right] - \left(\frac{y}{2} \Big|_0^3 \right) - \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^3 \right)$

$= \frac{1}{4}(e^6 - 1) + 3e^3 - (e^3 - 1) - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$

$= \frac{e^6}{4} - \frac{1}{4} + 2e^3 + 1 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$

$= \frac{e^6}{4} + 2e^3 - \frac{21}{4}$

b)



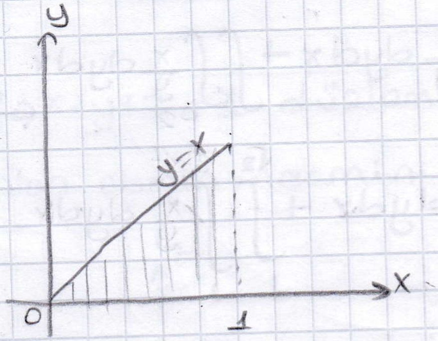
$$I = \int_1^{e^3} \int_{\ln x}^{3} (x+y)\, dy dx$$

Ör→ Üçgen tabanı xy düzleminde olan ve x ekseni y=x x=1 doğruları ile sınırlanan tepesi z= 3-x-y düzleminde bulunan prizmanın hacmini bulunuz

$$V = \iint_D f(x,y)\, dA$$

$z = f(x,y) = 3-x-y$

D: $y=x$, $x=1$, x - ekseni



$$= \int_0^1 \int_0^x (3-x-y)\, dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[(3-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^x \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[(3-x).x - \frac{x^2}{2} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx$$

$$= 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{1 br^3}}$$