b) $y = \sin x$

$$\Rightarrow y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 . \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 . \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \left[\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + n . \frac{\pi}{2}\right)$$

ÖRNEK- $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$(\arctan x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left[n\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm-

$$y = \arctan x \Rightarrow x = \tan y$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y$$

ise verilen eşitliği

$$y^{(n)} = (n-1)! . \cos^n y \sin\left[n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

olarak yazabiliriz. Tümevarım yöntemi ile bu eşitliğin doğruluğunu gösterelim.

$n=1$ için

$$y' = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y$$

$$= \cos y \cdot \cos y$$

$(0! = 1)$

$$= 0!\, \cos y \,\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (1-1)!\, \cos y \,\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

bulunur ki $n=1$ için istenen eşitlik doğrudur.

Kabul edelim ki istenen eşitlik $n>1$ için doğrudur. $n+1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$$y^{(n)} = (n-1)!\, \cos^n y \,\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

eşitliğinin her iki tarafından x'e göre türev alırsak,

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = (n-1)! \left\{ \cos^n y \,\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \right\}'_x$$

$$= (n-1)! \left[-y' n \sin y \cdot \cos^{n-1} y \,\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] + n\, y' \cos^n y \cdot \cos\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \right]$$

$$\Rightarrow y^{(n+1)} = (n-1)! \cdot y' \left[-n\cos^{n-1} y \cdot \sin y \,\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] + n \cos^n y \cos\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \right]$$

$$= (n-1)! \left[\cos y \,\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \left[-n\cos^{n-1} y \,\sin y \,\sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] + n \cos^n y \cos\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \right]$$

$$= n!\, \cos^{n+1} y \left\{ -\sin y \cdot \sin\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] + \cos y \cos\left[n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \right\}$$

$$= n!\cos^{n+1} y \cdot \cos\left[y + n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= n!\cos^{n+1} y \cdot \cos\left[(n+1)y + \frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= n!\cos^{n+1} y \cdot \sin\left[(n+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

elde ederiz. Bu ise istenen eşitliğin $(n+1)$ durumunda doğru olması demektir. Yani istenen eşitlik doğrudur.

$u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ise, cu $(c \in \mathbb{R})$ ve $u \mp v$ fonksiyonlarının da $[a,b]$ üzerinde n. mertebeden türevlenebilir oldukları ve

$$(c.u)^{(n)} = c.u^{(n)} \quad , \quad (u \mp v)^{(n)} = u^{(n)} \mp v^{(n)}$$

formüllerinin doğruluğu tümevarımla kolayca gösterilebilir.

Teorem ~~41~~ (Leibnitz Formülü)

u ve v fonksiyonları bir $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde n. mertebeden $(n \in \mathbb{N})$ türevlenebilen fonksiyonlar ise, $u.v$ de $[a,b]$ üzerinde n. mertebeden türevlenebilir dir. Ve

$$(u.v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x)$$

dir.

İSPAT. $n=1$ için

$$(u.v)^{(1)}(x) = u^{(1)}(x)\,v(x) + u(x)\,v^{(1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} u^{(1-k)}(x)\, v^{(k)}(x)$$

dir. Kabul edelim ki verilen eşitlik bir $n>1$ için doğrudur. ve onun $n+1$ için doğru olacağını görelim.

$$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x)$$

in her iki tarafından x'e göre türev alırsak,

$$(u.v)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^{(n-k)} v^{(k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[u^{(n-k+1)} v^{(k)} + u^{(n-k)} v^{(k+1)} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k+1)} v^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} v^{(k)}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ÖRNEK.

$f(x) = x^2 \sin 2x$ fonksiyonunun (n). mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm. $\forall k>2$ doğal sayısı için $(x^2)^{k} = 0$ olacağından Leibnitz formülünde $u(x) = \sin 2x$ $v(x) = x^2$ yazarsak,

$$(x^2 \sin 2x)^{(n)} = \binom{n}{0} (\sin 2x)^{(n)} x^2 + \binom{n}{1} (x^2)' (\sin 2x)^{(n-1)} + \binom{n}{2} (x^2)'' (\sin 2x)^{(n-2)}$$

olduğu elde edilir.

$$(\sin ax)^{(k)} = a^k \sin\left(ax + k\frac{\pi}{2}\right) \quad (a \in \mathbb{R})$$

olduğundan

$$(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1} \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\sin 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2} \sin\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -2^{n-2} \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (x^2 \sin 2x)^{(n)} = 2^n x^2 \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + n\,2x\left[-2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\left[-2^{n-2}\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right)\sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$- 2^n\, n x \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

ÖRNEK-

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ herhangi reel sayılar olmak üzere

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

polinomunun $P_n^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ türevlerini bulunuz.

Çözüm-

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

$$P_n'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2} x + a_{n-1}$$

$$P_n''(x) = n(n-1)a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_2 x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}$$

$\vdots$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 2a_0$$

$$P_n^{(k)}(x) = 0, \quad k = n+1, n+2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad P_n(0) = a_n,$$

$$P_n'(0) = a_{n-1},$$

$$P_n''(0) = 2a_{n-2} = 2!\, a_{n-2}$$

$$P_n'''(0) = 3.2.a_{n-3} = 3!\, a_{n-3}$$

$\vdots$

$$P_n^{(n)}(0) = n!\, a_0$$

$$P_n^{(k)}(0) = 0, \quad k = n+1, n+2, \ldots$$

olur. Buradan $a_k = \dfrac{P_n^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$

olacağından

$$P_n(x) = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{P_n^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \cdots + \frac{P_n''(0)}{2!} x^2 + \frac{P_n'(0)}{1!} x + P_n(0)$$

olur.

Parametrik Şekilde Verilmiş Fonksiyonun 2. mertebeden türevi

$f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları (α, β) üzerinde 2. mertebeden türevlenebilen ve $\forall t \in (\alpha, \beta)$ için $f'(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) , \quad \alpha < t < \beta \end{cases}$$

tanımı ile $y = f(x)$ fonksiyonunun 2. mertebeden türevi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}_{tt} \cdot \dot{x}_t - \ddot{x}_{tt}\, \dot{y}_t}{(\dot{x}_t)^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}_t}$$

$$= \frac{\ddot{y}_{tt}\, \dot{x}_t - \ddot{x}_{tt}\, \dot{y}_t}{(\dot{x}_t)^3}$$

şeklindedir.

Ör/ $\left.\begin{aligned} x &= \ln t \\ y &= e^t \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'' = ?$ $\quad \dot{x}_t = \frac{1}{t} \quad \ddot{x}_{tt} = \frac{-1}{t^2}$

$\dot{y}_t = e^t \quad \ddot{y}_{tt} = e^t$

$$y'' = \frac{\ddot{y}_{tt}\, \dot{x}_t - \ddot{x}_{tt}\, \dot{y}_t}{(\dot{x}_t)^3} = \frac{e^t \cdot \frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{t^2}\right)e^t}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} = e^t\left(\frac{t+1}{t^2}\right) \cdot t^3$$

$$= e^t(t^2 + t)$$

Ters fonksiyonun 2. mertebeden türevi

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $y=f(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sürekli ve artan (veya azalan) olsun. Eğer, bu fonksiyon (a,b) üzerinde 2. mertebeden türevlenebilen ve $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)\neq 0$ ise, f'nin $f^{-1}:(f(a^+),f(b^-))\to\mathbb{R}$

(veya $f^{-1}:(f(b^-),f(a^+))\to\mathbb{R}$), $x=f^{-1}(y)$ tersinin de 2. mertebeden türevlenebilen olduğunu gösterelim ve x_y'''yü bulalım.

$x=f^{-1}(y)$ ters fonksiyonunun türevlenebilen ve

$x_y'=\dfrac{1}{y_x'}$ olduğunu biliyoruz. O halde önce ters ve

sonra bileşik fonksiyonların türev formüllerini uygularsak

$$x_y''=(x_y')'=\left(\frac{1}{y_x'}\right)_y'=\left(\frac{1}{y_x'}\right)_x'\cdot x_y'$$

$$=\frac{-y_{xx}''}{(y_x')^2}\cdot\frac{1}{y_x'}=\frac{-y_{xx}''}{(y_x')^3}$$

bulunur.

Ör/ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)=x+x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde artan ve $\forall x\in\mathbb{R}$ için

$$y_x'=f_x'=1+3x^2\neq 0,\quad y_x''=6x$$

$$\Rightarrow\quad x_y'=\frac{1}{y_x'}=\frac{1}{1+3x^2},\quad x_y''=\frac{-6x}{(1+3x^2)^3}$$

olur.

Şimdi yüksek mertebeden diferansiyelleri tanımlayalım.

$f:(a,b)\to \mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilen ise, onun $df(x)$ ile gösterilen diferansiyeli hem x, hem de dx değişkenlerine bağlı $df(x)=f'(x)dx$ ile tanımlıdır.

$f':(a,b)\to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilen olsun. Bu durumda $dx\in\mathbb{R}$ sabit tutulmak üzere $df(x)$ diferansiyeli yalnızca x'in bir fonksiyonu olur. Bu fonksiyonun diferansiyeline $f(x)$ fonksiyonunun 2. mertebeden diferansiyeli denir $d^2f(x)$ ile gösterilir.

$$
\begin{aligned}
d^2f(x) &= d(df(x)) = d(f'(x)dx) \\
&= d(f'(x))\, dx \\
&= (f''(x)dx)\, dx \\
&= f''(dx)^2 = f''dx^2
\end{aligned}
$$

bulunur. (a,b) üzerinde (n). mertebeden türevlenebilen $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun n. mertebeden diferansiyeli benzer şekilde tanımlanabilir. Tümevarımla

$$d^nf(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n \quad (\text{herhangi } n\in\mathbb{N})$$

elde edilir.

Ancak bu formüller x bağımsız değişken olduğu durumda geçerlidir. Yani f bileşik fonksiyon olduğunda durum değişecektir.

Bunu $n=2$ için görelim.

$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$, $u = \varphi(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde $f : \varphi((a,b)) \to \mathbb{R}$, $y = f(u)$ fonksiyonu da $\varphi((a,b))$ üzerinde 2. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$dy = y'_x\, dx = [f(\varphi(x))]'\, dx$$
$$= f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)\, dx$$

elde ederiz. Buna göre,

$$d^2y = d(dy) = d\left[f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)\, dx\right]$$
$$= f''[\varphi(x)] \cdot [\varphi'(x)]^2\, dx^2$$
$$+ f'[\varphi(x)]\, \varphi''(x)\, dx^2$$

$$\Rightarrow d^2y = f''(u) \cdot (du)^2 + f'(u) \cdot d^2u$$

$$(\varphi(x) = u \Rightarrow du = \varphi'(x)\, dx \Rightarrow d^2u = \varphi''(x)\, (dx)^2)$$

bulunur.

Örn/ $y = \cos x^2$ fonksiyonunun x bağımsız ve bağımlı değişken olduğu durumlarda 2. mertebeden diferansiyelini bulunuz.

x bağımsız $\to$ $dy = -2x \sin x^2\, dx$

$$d^2y = -2\sin x^2\, (dx)^2 - 4x^2 \cos x^2\, (dx)^2$$

x bağımlı $\to$ $dy = -2x \sin x^2\, dx$

$$d^2y = -2\sin x^2\, dx^2 - 4x^2 \cos x^2\, dx^2 - 2x \sin x^2\, d^2x$$

DİFERANSİYEL HESABIN ESAS TEOREMLERİ-

Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, X üzerinde tanımlı $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilmiş olsun.

Tanım 83- Eğer, $\forall x \in U(x_0) \cap X$ için $f(x) \leq f(x_0)$ (veya $f(x) \geq f(x_0)$) olacak şekilde x_0 noktasının bir $U(x_0)$ komşuluğu varsa x_0 noktasına f'nin Lokal (yerel) maksimum (veya minimum) noktası denir.

Tanım 84- Eğer, $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ için $f(x) < f(x_0)$ (veya $f(x) > f(x_0)$) olacak şekilde x_0 noktasının bir $\overset{\circ}{U}(x_0)$ delinmiş komşuluğu varsa x_0 noktasına f in kesin Lokal (yerel) maksimum (veya minimum) noktası denir.

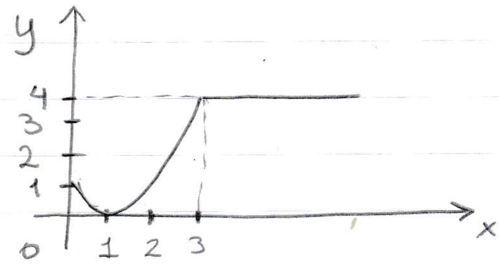
Tanım 85- Lokal minimum ve maksimum noktalarına Lokal ekstremum noktaları, fonksiyonun bu noktalardaki değerlerine de fonksiyonun Lokal ekstremumları (veya Lokal ekstrem değerleri) denir.

Örnek- $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & , \ 0 \leq x < 3 \text{ ise} \\ 4 & , \ x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

Bu fonksiyon için



$x=0$ noktası Lokal maksimum, $x=1$ noktası Lokal minimum, $x=3$ noktası Lokal maksimum, $x>3$ noktaları hem Lokal maksimum hem de Lokal minimum noktalarıdır. $[3, \infty)$ üzerinde fonksiyon sabit bir fonksiyondur.

$f(0) = 1$, $f(3) = 4$, $f(1) = 0$

Tanım 86- $x_0 \in X$ noktası X üzerinde tanımlı $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ekstremum noktası olsun. Eğer, $x_0 \in X$ noktası hem $X_- = \{x \in X : x < x_0\}$ kümesinin, hem de $X_+ = \{x \in X : x > x_0\}$ kümesinin limit noktası ise, x_0 a iç ekstremum noktası denir. Örneğin $x=0$ noktası verilen örnek için fonksiyonun iç ekstremum noktası değildir.

Tanım 87- Eğer, her $x \in X$ için $f(x) \leq f(p)$ $(f(x) \geq f(q))$ olacak şekilde bir $p \in X$ $(q \in X)$ noktası varsa, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu p (q) noktasında mutlak maksimuma (minimuma) sahiptir denir. Örneğin verilen örnekteki $x=1$ noktası fonksiyonun mutlak minimum noktası, $x \geq 3$ noktaları da mutlak maksimum noktalarıdır.

Teorem 42 (Fermat Teoremi)

$x_0 \in X$ noktası $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir iç ekstremum noktası olsun. Eğer, f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilen ise, $f'(x_0) = 0$ 'dır.

İSPAT-

Teoremin ispatını x_0 bir iç maksimum nokta olduğu durumda yapalım. Bu durumda, x_0 noktasının her $x \in U(x_0) \cap X$ için $f(x) \leq f(x_0)$ (veya $f(x) - f(x_0) \leq 0$) olacak şekilde bir $U(x_0)$ komşuluğu vardır. O zaman, $x < x_0$ (veya $x - x_0 < 0$) olacak şekilde her $x \in U(x_0) \cap X$ için

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (\circ)$$

ve $x > x_0$ (veya $x - x_0 > 0$) olacak şekilde her $x \in U(x_0) \cap X$ için

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (\circ\circ)$$

olur. f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilen olduğundan $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ dir. Buna göre,

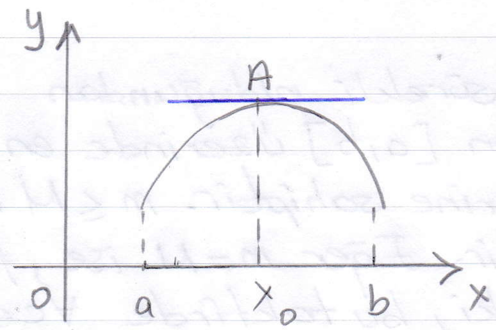
$x \to x_0^-$ iken (•) ve $x \to x_0^+$ iken (••) 'dan sırasıyla

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) \geq 0 \quad , \quad f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

bulunur. Bu ise, $f'(x_0) = 0$ olması demektir.

Fermat teoreminin geometrik yorumu.

$x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında bir yerel ekstremuma sahip ise, $A(x_0, f(x_0))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x-eksenine paralel olur.



NOT. Fermat teoreminin karşıtı genel olarak doğru değildir. Örneğin, $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ $f(x) = (x-2)^3$ fonksiyonu için, $f'(2) = 0$ 'dır. fakat $x = 2$ noktası fonksiyonun bir iç ekstremum noktası değildir.

Fermat teoreminin hipotezindeki x_0 ın bir iç ekstremum noktası olması koşulunun kaldırılamayacağını gösteren bir örnek verelim

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonu için

$$m = \min\{f(x) : x \in [0,1]\} = 0 \;, \; \max\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1,$$

fakat $\forall x \in (0,1)$ için $f'(x) = 1 \neq 0$ ve $f'_+(0) = f'_-(1) = 1 \neq 0$ dır.

Bir fonksiyonun herhangi bir noktada yerel ekstremuma sahip olması fonksiyonun o noktada türevlenebilir olmasını gerektirmez. Örneğin, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x-1|$ fonksiyonu $x=1$ noktasında bir yerel maksimuma sahiptir, fakat fonksiyon bu noktada türevli değildir. (Çünkü $f'_+(1) = -1$ ve $f'_-(1) = 1$ dir)

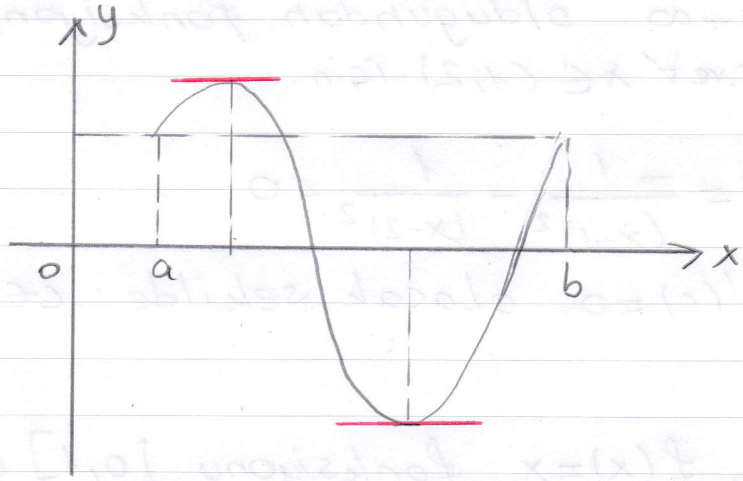
Teorem 43 (Rolle Teoremi)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer, $f(a) = f(b)$ ise, $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İSPAT- f, $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan Weierstrass teoremine göre bu fonksiyon $[a,b]$ üzerinde en küçük m ve en büyük M değerlerine sahiptir. $m \leq M$ olduğundan ya $m = M$ ya da $m < M$'dir. Eğer $m = M$ ise, fonksiyon sabit bir fonksiyon olur ki, bu taktirde $\forall c \in (a,b)$ için $f'(c) = 0$ olacağından teorem açıktır. $m < M$ olsun. $f(a) = f(b)$ olduğundan, fonksiyon m ve M ekstrem değerlerini $[a,b]$'nin bitim noktalarında alamaz. O halde, fonksiyon bu değerlerinden en az birini $[a,b]$'nin bir $c \in (a,b)$ iç noktasında alır. c noktasında fonksiyon türevlenebilen olduğuna göre, Fermat teoremi gereğince $f'(c) = 0$ olur. □

Rolle teoreminin geometrik yorumu:

Teoremdeki koşullar sağlandığında öyle bir $c \in (a,b)$ noktası vardır ki $(c, f(c))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x-eksenine paralel olur.



Rolle teoreminin hipotezindeki koşulların kaldırılamayacağını gösteren örnekler verelim.

1) $f:[-1,1]\to \mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde sürekli, $x\in(0,1]$ için $f'(x)=1$ ve $x\in[-1,0)$ için $f'(x)=-1$ olduğuna göre $x\in[-1,0)\cup(0,1]$ için $f'(x)\neq 0$ dır. ($x=0$'da türeve sahip değil)

$x\in(-1,1)$ için $x=0$'da türev mevcut değildir.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h-0}{h}=-1\\ \neq \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-0}{h}=1\end{array}\right]\ x=0\text{'da türev yok.}$$

2) $f:[1,2]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}, & x\in(1,2)\text{ ise,}\\ 0, & x=1 \text{ ve } x=2 \text{ ise,}\end{cases}$$

fonksiyonu $(1,2)$ üzerinde türevlenebilen ve

$f(1)=f(2)=0$'dır. Ancak $f(1)=f(1^+)=\infty$ ve $f(2)=f(2^-)=-\infty$ olduğundan fonksiyon $[1,2]$ de süreksizdir ve $\forall x\in(1,2)$ için

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}<0$$

olduğundan $f'(c)=0$ olacak şekilde $c\in(1,2)$ noktası yoktur.

3) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli, $(0,1)$ üzerinde türevlenebilen bir fonksiyondur. Ancak $f(0)\neq f(1)$ ve $\forall x\in(0,1)$ için $f'(x)=1$ olduğundan $f'(c)=0$ olacak şekilde $c\in(0,1)$ noktası yoktur.

Teorem 44. (Lagrange Teoremi) (Ortalama Değer Teoremi)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda,

$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ noktası vardır.

İSPAT. $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=[f(b)-f(a)].(x-a)-f(x)(b-a)$

fonksiyonunu göz önüne alalım. F fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir ve de $F(a)=F(b)$'dir. O halde Rolle teoremine göre $F'(c)=0$ olacak şekilde $c\in(a,b)$ vardır.

$$F(a)=[f(b)-f(a)](a-a)-f(a)(b-a)$$
$$=-f(a)(b-a)$$

$$F(b) = [f(b)-f(a)](b-a) - f(b)(b-a)$$

$$= -f(a)(b-a) \Rightarrow F(a) = F(b)$$

$$F'(x) = f(b) - f(a) - f'(x)(b-a)$$

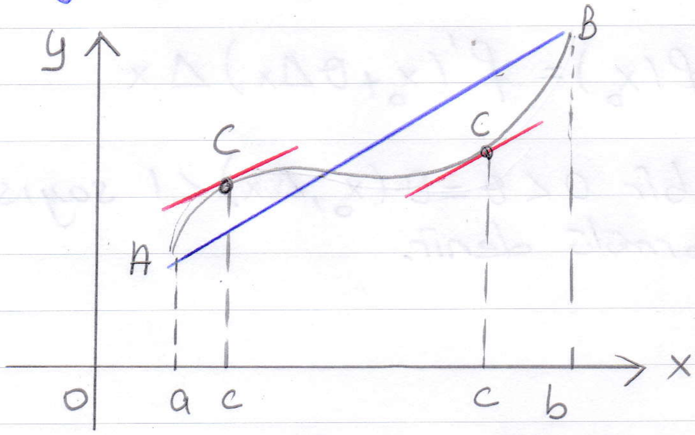
$$\Rightarrow F'(c) = f(b) - f(a) - f'(c)(b-a)$$

$$F'(c) = 0 \Rightarrow \cancel{+}f'(c)(b-a) = \cancel{+}(f(b)-f(a))$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

elde edilir.

Lagrange (O.D.T.) Teoreminin geometrik yorumu:



Teoremdeki koşullar sağlandığında öyle bir $c \in (a,b)$ noktası vardır ki $C(c, f(c))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarından geçen doğruya paralel olur.

ÖRNEK-

$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ fonksiyonu için

$$f(2) - f(0) = 2f'(c)$$

olacak şekilde $c \in (0,2)$ sayısını bulunuz.

Çözüm- $f(2) = 12$, $f(0) = -2$ ve $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$ olduğundan $c \in (0,2)$ sayısı

$$14 = 2(12c^2 - 10c + 1) \quad \text{veya} \quad 12c^2 - 10c - 6 = 0$$

denkleminin bir kökü olmak zorundadır.

$$12c^2 - 10c - 6 = 0 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{97}}{12}$$

dir. $c_1 = \frac{5+\sqrt{97}}{12} \in (0,2)$ fakat $c = \frac{5-\sqrt{97}}{12} \notin (0,2)$

olduğundan c_1 tek nokta olarak bulunur.

Sonuç 1.- (Sonlu Farklar Formülü)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, herhangi $x_0, x_0+\Delta x \in [a,b]$ noktaları için

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

olacak şekilde en az bir $0<\theta=\theta(x_0,\Delta x)<1$ sayısı vardır. Buna sonlu farklar formülü denir.

Sonuç 2.

$\Delta x > 0$ olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$[x_0, x_0+\Delta x] \subset [a,b] \quad ([x_0+\Delta x, x_0] \subset [a,b])$$

üzerinde türevlenebilir olsun. Eğer, f fonksiyonu x_0 da sağdan (soldan) türevlenebiliyorsa

$$f': (x_0, x_0+\Delta x) \to \mathbb{R} \quad (f': (x_0+\Delta x, x_0) \to \mathbb{R})$$

türev fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan (soldan) limiti vardır ve $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ $\left(f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) \right)$ olur.

Uyarı – Bu sonuca göre, eğer, bir $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebiliyorsa $f':(a,b)\to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu (a,b) üzerinde kaldırılabilir ve 1. çeşit süreksizlik noktasına sahip olamaz.

ÖRNEK –

$$f:(-1,1)\to \mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \text{ ise} \\ 0 & x=0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. $f':(-1,1)\to \mathbb{R}$ türev fonksiyonunun $x=0$ noktasında limitinin olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm – Her $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ $f'(x)$ türevinin varlığı ve $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$ olduğu açıktır. $x=0$ noktasında türev tanımı gereğince

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos 1/h}{h}=\lim_{h\to 0} h.\cos\frac{1}{h}$$

$\forall h\neq 0$ için $\left|h.\cos\frac{1}{h}\right|\leq |h|$ olduğundan

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}|h|=0$$ olur. Böylece,

$f':(-1,1)\to \mathbb{R}$ türev fonksiyonu

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Buradan, f' türev fonksiyonunun $x=0$ noktasında hem soldan hem de sağdan limitinin var olmadığı anlaşılır. (Çünkü, $\sin\frac{1}{x}$'in $x=0$ noktasında hem sağdan hem de soldan limiti yoktur)

Sonuç 3.

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda,

i) $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)=0$ ise f, (a,b) üzerinde bir sabit fonksiyondur.

ii) $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)>0$ ($f'(x)\geq 0$) ise f, (a,b) üzerinde artan (azalmayan) bir fonksiyondur.

iii) $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x)<0$ ($f'(x)\leq 0$) ise f, (a,b) üzerinde azalan (artmayan) bir fonksiyondur.

İspat: (i) $x_0 \in (a,b)$ sabit nokta ve $x \in (a,b)$ herhangi bir nokta olsun.

$$[\alpha,\beta] = \begin{cases} [x_0, x], & x_0 < x \text{ ise} \\ [x, x_0], & x < x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

diyelim. $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ olduğu açıktır.

$g:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (f|_{[\alpha,\beta]})(x)$ fonksiyonu

Ortalama değer teoreminin koşullarını sağlar. O halde,

$$g(\beta)-g(\alpha)=g'(\alpha+\theta(\beta-\alpha))(\beta-\alpha)$$

veya

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$$

olacak şekilde bir $\theta\in(0,1)$ sayısı vardır. Buradan, ($\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)=0$ olduğundan dolayı) $f(x)=f(x_0)$, yani x_0 sabit seçildiğinden f bir sabit fonksiyondur.

(ii) $x_1,x_2\in(a,b)$ ve $x_1<x_2$ olsun. O.D.T'e göre

$$f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(x_1+\theta(x_2-x_1))}_{>0\text{ (hipotez)}}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}>0$$

olacak şekilde bir $0<\theta<1$ sayısı vardır. Buna göre,

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\qquad (x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2))$$

olur.

(iii) $x_1,x_2\in(a,b)$ ve $x_1<x_2$ olsun. O.D.T'e göre

$$f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(x_1+\theta(x_2-x_1))}_{<0\text{(hipotez)}}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}<0$$

olacak şekilde bir $0<\theta<1$ sayısı vardır. Buna göre

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\qquad (x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x))$$

olur.

NOT- (ii) ve (iii) önermelerinin karşıtı genel olarak doğru değildir. Örneğin, $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonu $(-1,1)$ üzerinde artandır, fakat $f'(0)=0$'dır.

Teorem 45- (Cauchy Teoremi) (Genelleştirilmiş O.D.T)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsunlar. Bu durumda,

$$[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)].f'(c)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İSPAT-

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilen iki fonksiyonun farkı şeklinde tanımlı F fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilirdir. Ayrıca

$$F(a) = F(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

olduğuna göre, Rolle teoremi gereğince $F'(c)=0$ veya

$$[f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c) = 0$$ olacak

şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. Bu ise teoremi kanıtlar.

NOT: Genelleştirilmiş ortalama değer teoremindeki g fonksiyonu $g(x)=x$ olarak alındığında ortalama değer teoremi bu teoremin sonucu olarak elde edilir.

Sonuç:

G.O.D.T'nin koşulları sağlansın. Eğer, hem de $\forall x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ ise,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. $0<\theta<1$ olacak şekilde bir θ sayısı için $c = a+\theta(b-a)$ olacağından bu bağıntı

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))}, \quad 0<\theta<1$$

şeklinde yazılabilir.

Çözümlü Problemler-

1) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{x}, & 1 < x < \infty \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ olacak şekilde $c \in (0,2)$ noktasını bulunuz.

Çözüm-

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{3-(1+h)^2}{2} - 1}{h} = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = -1$$

olduğuna göre, f fonksiyonu $x=1$ noktasında türevlenebilirdir.

$f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$ ve

$$f'(x)=\begin{cases} -x , & 0<x\leq 1 \text{ ise} \\ -\frac{1}{x^2} , & 1<x<2 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre,

$$f(2)-f(0)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=2f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad -1=\begin{cases} -2c , & 0<x\leq 1 \text{ ise} \\ -\frac{2}{c^2} & 1<x<2 \text{ ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad c=\frac{1}{2}$ ve $c=\sqrt{2}$ bulunur.

2) $f:(x_0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (x_0,∞) üzerinde türevlenebilir ve

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

ise

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{x}=0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm- $x_n\in(0,\infty)$, $n=1,2,\ldots$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ koşul-larını sağlayan herhangi artan bir (x_n) dizisi veril-sin.

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},$$

$n>n_\varepsilon$ için

$$|f'(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (\cdot)$$

olur. Sabit $n_0 > n_\varepsilon$ ve $\forall n > n_0$ için O.D.T gereğince

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}\right| = |f'(c)| \quad (\circ\circ)$$

olacak şekilde bir $c = c(n_0, n) \in (x_{n_0}, x_n)$ noktası vardır ve $(\circ)$ ve $(\circ\circ)$'dan

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde ederiz.

$$\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}} \cdot \left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right) + \frac{f(x_{n_0})}{x_n}$$

olduğundan

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n} - \left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_n)}{x_n}$$

$$< \frac{f(x_n)}{x_n} + \left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu elde edilir. $\left(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n_0})}{x_n} = f(x_{n_0})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$$

olduğuna göre $n_0 > n_\varepsilon$ ve yeteri kadar büyük $n > n_0$ için

$$-\varepsilon < \frac{f(x_n)}{x_n} < \varepsilon$$

olur. Bu ise $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n} = 0$ dolayısıyla $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$

olması demektir.

3) Eğer, $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilirse ve $f'(x)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sınırlı ise, f fonksiyonu (a,b) üzerinde düzgün sürekli lidir. Gösteriniz.

Çözüm-

f' fonksiyonu (a,b) üzerinde sınırlı olduğuna göre, $\forall x\in(a,b)$ için $|f'(x)|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ sabit sayısı vardır. O halde, herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı için $\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$ şeklinde seçildiğinde

$\forall x_1, x_2\in(a,b)$ için

(O.D.T den)

$$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| = |f'(c)|\,|x_1-x_2|$$

$$\leq M|x_1-x_2|<\varepsilon$$

olduğu elde edilir. Bu ise, f in (a,b) üzerinde düzgün sürekli olması demektir.

4) Aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu gösteriniz

a) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $e^x>1+x$;

b) $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ için $\tan x> x+\frac{x^3}{3}$

Çözüm-

a) $f(x)=e^x$, $g(x)=1+x$ dersek $f(0)=g(0)$ ve

$\forall x\in\mathbb{R}_+$ için $f'(x)=e^x>1=g'(x)$ olduğuna göre

NOT_

$f, g : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

i) f ve g, $[x_0, +\infty)$ üzerinde n. mertebeden türevlenebilirdir,

ii) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

iii) $\forall x \in (x_0, \infty)$ için $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ dir.

koşulları sağlanıyorsa, $\forall x \in (x_0, \infty)$ için $f(x) > g(x)$ dir.

İSPAT_ $F : [x_0, x] \to \mathbb{R}$, $F(t) = f^{(n-1)}(t) - g^{(n-1)}(t)$ $(x_0 < x)$ fonksiyonu için $[x_0, x]$ aralığında O.D.T'nin şartları sağlandığından

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_0, x)$ noktası vardır.

$$F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0, \quad F'(c) = f'(c) - g'(c) > 0$$

ve $x - x_0 > 0$ olduğuna göre, son eşitlikten $\forall x > x_0$ için $F(x) > 0$, yani $\forall x > x_0$ için $f^{(n-1)}(x) > g^{(n-1)}(x)$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $\forall x > x_0$ için

$f^{(n-2)}(x) > g^{(n-2)}(x), \dots, f(x) > g(x)$ olduğu gösterilir.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$ için $f(x) > g(x)$, yani $e^x > 1+x$ elde edilir.

$x<0$ iken $x=-t$ dersek $f(t)=e^{-t}$, $g(t)=1-t$
$t \geq 0$ olduğu açıktır. $f(0)=g(0)$ ve $\forall t>0$ için

$f'(t) = -e^{-t} > -1 = g'(t)$ olduğuna göre $\forall t>0$ için

$f(t) > g(t)$, yani $\forall x \in (-\infty, 0)$ için $e^x > 1+x$ olduğu

anlaşılır.

b) $f(x)=\tan x$, $g(x) = x + \frac{x^3}{3}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ olsun.

$f(0)=g(0)$ ve $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

$g'(x) = 1 + x^2$, $\tan^2 x > x^2$ olduğuna göre,

$f'(x) > g'(x)$ olduğu açıktır. O halde (not)'a göre

$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ için $f(x) > g(x)$'dir.

5) O.D.T'den yararlanarak $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ için

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm-

O.D.T gereğince $f(x) = \arctan x$ ise

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = (\arctan x)'\Big|_{x=c} (x_2 - x_1)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır. arctanx fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde artan ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$0 \leq (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

dir. Buna göre $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 < x_2$ için

$$0 \leq \arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1) \leq x_2 - x_1$$

olduğu anlaşılır.

Teorem 46 (Darboux Teoremi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda, $f'(x)$ fonksiyonu $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

İspat. İspatı iki kısımda görelim.

a) $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, örneğin $f'(a) > 0$ ve $f'(b) < 0$ olsun. ($f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ 'da olabilir)

f, $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan, bu fonksiyon $[a,b]$ üzerinde süreklidir. O halde Weierstrass 2 teoremi gereğince

$$f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ noktası vardır. $c \in [a,b]$ olduğunu görelim.

- $0 < f'(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow \exists \delta > 0 \; (0 < \delta < b-a)$

$\forall h \in (0,\delta)$ için

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0 \Rightarrow \forall h \in (0,\delta)$$

için $f(a+h)-f(a)>0$ olduğu açıktır. Buna göre, f, $[a,a+\delta]$ aralığında artandır yani $c \neq a$'dır. Benzer şekilde $c \neq b$ olduğu gösterilir. Demek ki $c \in (a,b)$'dir. O zaman Fermat teoremi gereğince $f'(c)=0$'dır.

b) Şimdi teoremi genel durumda, yani herhangi $f'(a)$ ve $f'(b)$ değerleri için ispatlayalım.

$f'(a) > f'(b)$ olsun ($f'(a) < f'(b)$ olduğunda ispat benzer şekilde yapılır).

$A \in (f'(a), f'(b))$ olmak üzere

$F:[a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - Ax$ fonksiyonunu göz önüne alalım. F'in $[a,b]$ üzerinde türevlenebilir ($\forall x \in [a,b]$ için $F'(x) = f'(x) - A$) ve

$$F'(a) = f'(a) - A < 0, \quad F'(b) = f'(b) - A > 0$$

olduğu açıktır. O halde (a)'ya göre $F'(c)=0$ yani

$f'(c) = A$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktasının mevcut olduğu anlaşılır.

TAYLOR FORMÜLÜ-

$(a,b)\subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde $(n+1)$. mertebeden türevlenebilen $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $x_0\in(a,b)$ noktası verilmiş olsun. Taylor formülü yardımıyla

$$f(x_0),\ f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$$

değerlerine ve $f^{(n+1)}:(a,b)\to \mathbb{R}$ türev fonksiyonunun x_0 ın herhangi bir $U(x_0)$ komşuluğundaki belirli özelliklerine göre $f(x)$ fonksiyonu $U(x_0)$ civarında istenildiği kadar küçük hata ile Taylor polinomları adı verilen özel polinomlarla ifade edilebilir.

$a_0, a_1, \dots, a_n$ ler herhangi reel sayılar olmak üzere n. dereceden

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad \text{polinomunun}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

şeklinde de yazılabileceğini Leibnitz formülünü incelerken görmüştük. x_0 herhangi bir reel sayı olmak üzere bu polinom,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

şeklinde de gösterilebilir. Bu son eşitliğe $P_n(x)$ polinomunun $(x-x_0)$ ın kuvvetlerine göre Taylor formülü denir. x'in kuvvetlerine göre olan bir önceki eşitliğe de Mclaurin formülü denir. $x_0\in(a,b)$ noktasında n. mertebeden türevlenebilen $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda,

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

polinomuna f in $(x-x_0)$ ın kuvvetlerine göre n. dereceden Taylor polinomu denir ve $T_n(x)$ (veya $T_n(f;x)$) ile gösterilir. $\forall k=0,1,\ldots,n$ için $T_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$, dolayısıyla, f fonksiyonu n. dereceden bir polinom ise $f(x)=T_n(x)$ olduğu açıktır. Genel durumda ise, $f(x)\neq T_n(x)$ yani $f(x)-T_n(x)\neq 0$ olur. $r_n(x_0,x)=f(x)-T_n(x)$ büyüklüğüne

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x_0;x)$$

Taylor formülünün n. kalan terimi denir. Bu durumda yaptığımız yaklaşımın iyi değerlendirilmesi amacıyla $r_n(x_0;x)$ kalan terimi için gerekli formüllerin bulunması önem taşımaktadır.

Teorem 47-

I, bitim noktaları x_0 ve x olan kapalı bir aralık olmak üzere

$f: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlansın:

a) f, I üzerinde n. mertebeden türevlenebilirdir,

b) $f^{(n)}\in C(I)$ 'dır.

c) $f^{(n)}$ türev fonksiyonu $\overset{\circ}{I}=I\setminus\{x_0,x\}$ açık aralığı üzerinde türevlenebilirdir.

Bu durumda, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde türevlenebilen ve $\forall t\in\overset{\circ}{I}$ için $\varphi'(t)\neq 0$ koşullarını sağlayan her $\varphi\in C(I)$ fonksiyonu için

$$r_n(x_0;x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(c_n)\,n!}\,f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^n$$

olacak şekilde bir $c\in I^{\circ}$ noktası vardır.

İSPAT_ Teoremin ispatını $x_0<x$ durumunda yapalım. $t\in[x_0,x]$ ve

$$q_n(t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

olmak üzere $F:[x_0,x]\to\mathbb{R}$, $F(t)=f(x)-q_n(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teoremin koşulları gereğince F, $[x_0,x]$ üzerinde sürekli ve (x_0,x) üzerinde türevlenebilirdir, ayrıca, $\forall t\in(x_0,x)$ için

$$F'(t)=[f(x)-q_n(t)]'_t=-q_n'(t)$$

$$=-\Big[f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$
$$-f'(t)-2\frac{f''(t)}{2!}(x-t)-\dots-n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}\Big]$$
$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

olur. F ve φ fonksiyonları için $[x_0,x]$ üzerinde G.O.D.T'nin koşulları sağlandığına göre

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{F'(c)}{\varphi'(c)}$$

olacak şekilde bir $c\in(x_0,x)$ noktası vardır.

$$F(x)-F(x_0)=f(x)-q_n(x)-[f(x_0)-q_n(x_0)]$$
$$=0-r_n(x_0;x)$$
ve
$$F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

olduğuna göre, buradan
$$r_n(x_0;x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(c)\,n!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^n$$
bağıntısının doğru olduğu anlaşılır. $x<x_0$ durumunda teoremin ispatı benzer şekilde yapılır.

Sonuç 1.

$\varphi(t)=x-t$ alınırsa;
$$r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)$$
bulunur. Bu formüle n. kalan terimin Cauchy formu denir.

Sonuç 2.

$\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$ alınırsa;
$$r_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\ (x-x_0)^{n+1}$$

bulunur. Bu formüle de n. kalan terimin Lagrange formu denir.

NOT. $c\in I \Leftrightarrow \exists\, 0<\theta<1 \ni c=x_0+\theta(x-x_0)$ olacağından bu formlar

$$r_n(x) = \frac{(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}$$

ve

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}$$

şeklinde yazılabilir.

ÖRNEKLER -

1) Aşağıdaki fonksiyonların Mclaurin (veya x in kuvvetlerine göre Taylor) formüllerini bulunuz.

a) $f(x) = a^x \quad (a>0,\ a \neq 1)$

b) $f(x) = \sin x$

c) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = \ln(1+x)$

e) $f(x) = e^x$

f) $f(x) = \cosh x$

g) $f(x) = \sinh x$

h) $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Çözüm.

a) $f(x) = a^x \quad (a>0,\ a\neq 1) \quad \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = a^x \ln a \quad \rightarrow f'(0) = \ln a$

$f''(x) = a^x \ln^2 a \quad \rightarrow f''(0) = \ln^2 a$

$f'''(x) = a^x \ln^3 a \quad \rightarrow f'''(0) = \ln^3 a$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = a^x \ln^k a \quad \rightarrow f^{(k)}(\theta x) = a^{\theta x} \ln^k a$

$(k=0,1,\dots)$

$$\Rightarrow a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \dots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + r_n(0;x)$$

$$r_n(0;x) = \frac{a^{\theta x}\ln^{n+1} a}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1$$

b) $f(x) = \sin x \quad \rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad \rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad \rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ çift} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}, & k \text{ tek} \end{cases}$

$$f^{(k)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + \frac{k\pi}{2}\right) \quad (k=1,2,\dots)$$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n+1}(0;x)$$

$$r_{2n+1}(0;x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot \sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] \quad , 0<\theta<1$$

c) $f(x) = \cos x \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \longrightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \longrightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \longrightarrow f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 1$

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \longrightarrow f^{(k)}(0) = \cos\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & k \text{ çift} \\ 0 & k \text{ tek} \end{cases}$$

$$f^{(k)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad (k=1,2,\dots)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + r_{2n}(0;x)$$

$$r_{2n}(0;x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\left(\theta x + 2n\frac{\pi}{2}\right) \quad , 0<\theta<1$$

d) $f(x) = \ln(1+x) \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2} \longrightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \longrightarrow f'''(0) = 2.1$

$f^{(4)}(x) = -3.2(1+x)^{-4} \longrightarrow f^{(4)}(0) = -3.2.1$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k} \rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$f^{(k)}(\theta x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+\theta x)^{-k} \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(0;x)$$

$$r_n(0;x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot (1+\theta x)^{-n-1} \cdot x^{n+1}$$

e) $f(x) = e^x$ a) şıkkından yararlanarak direkt yazabiliriz.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(0;x)$$

$$r_n(0;x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1} \qquad 0<\theta<1$$

f) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ olduğundan

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(0;x)$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + r_n(0;-x)$$

$$\Rightarrow \cosh x = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(0;x)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + r_n(0;-x)\right]$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+2}(0;x)$$

$$r_{2n+2}(0;x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cosh(\theta x) \qquad 0<\theta<1$$

g) $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ olduğundan $\cosh x$'e

benzer şekilde

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n+1}(0;x)$$

$$r_{2n+1}(0;x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cosh(\theta x) \qquad 0<\theta<1$$

dir.

h) $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad \rightarrow f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad \rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \rightarrow$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

$f^{(k)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+\theta x)^{\alpha-k} \qquad (k=1,2,\cdots)$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n+1)]}{n!}x^n + r_n(0;x)$$

$$r_n(0;x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}\,x^{n+1} \qquad 0<\theta<1$$

2) $\sqrt{26}$ yı hesaplamak için 2. dereceden Taylor polinomunu kullanınız.

Çözüm. $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=\dfrac{-1}{4\sqrt{x^3}}$
$(x_0=25)$

$$T_2(x)=f(25)+\frac{f'(25)}{1!}(x-25)+\frac{f''(25)}{2!}(x-25)^2$$

$$f(25)=5, \quad f'(25)=\frac{1}{10}, \quad f''(25)=\frac{-1}{500}$$

$$\Rightarrow T_2(x)=5+\frac{(x-25)}{10}-\frac{(x-25)^2}{1000}$$

$$f(26)\cong T_2(26)=5+\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=5.099$$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ limitini hesaplayınız.

$$x=t+1 \Rightarrow x\to 1 \quad t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{(t+1)^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\cdots}{t^2+2t+\cancel{1}-\cancel{1}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}\left[1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}-\cdots\right]}{\cancel{t}\,[t+2]}$$

$$=\frac{1}{2}$$

L' Hôpital Kuralları

$[0/0]$ şeklindeki belirsizlikleri basit cebirsel yöntemlerle hesaplayabiliriz. Bu daha çok ortak çarpanları kısaltmak suretiyle yapılır. Bunun dışında, eğer uygun polinomlar bulunabilir veya kolaylıkla hesaplanabilir ise o zaman Taylor polinomları metodu da kullanılabilir.

Şimdi ise $[0/0]$ ve $[\infty/\infty]$ tipindeki belirsizlikleri hesaplamak için l' Hopital Kuralı adı verilen üçüncü bir metot vereceğiz. Belirsiz şekillerin diğer tipleri ise genelde cebirsel işlemler kullanılarak ya da logaritmalar alınarak $[0/0]$ veya $[\infty/\infty]$ şeklindeki belirsizliklere dönüştürülerek hesaplanır.

Teorem 48 (Birinci l'Hôpital Kuralı):

f ve g fonksiyonlarının (a,b) aralığında türevlenebilir ve orada $g'(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca

(i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ ve

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (burada L sonlu bir sayı veya ∞ veya $-\infty$ olabilir),

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ 'dir.}$$

Benzer sonuçlar, $\lim\limits_{x\to b^-}$ veya $\lim\limits_{x\to c}$, burada $a<c<b$, için de sağlanır. Ayrıca $a=-\infty$ ve $b=\infty$ 'da olabilir.

__İspat:__

Önce, a'nın sonlu olması durumunda, ispatı $\lim\limits_{x\to a^+}$ için yapalım.

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & a<x<b \\ 0, & x=a \end{cases} \quad \text{ve} \quad G(x)=\begin{cases} g(x), & a<x<b \\ 0, & x=a \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. O zaman F ve G fonksiyonları (a,b) 'deki her x için $[a,x]$ aralığında sürekli ve (a,x) aralığında türevlenebilirdirler.

Genelleştirilmiş O.D.T. 'ne göre,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

olacak şekilde bir $c\in(a,x)$ sayısı vardır.

$a<c<x$ olduğundan,

$x\to a^+$ olması, $c\to a^+$ 'yı gerektirir, dolayısıyla

$$\boxed{\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = L}$$ elde edilir.

Benzer şekilde, b'nin sonlu olması halinde,

$\lim\limits_{x\to b^-}$ durumu için ispat yapılır.

$a=-\infty$ veya $b=\infty$ durumu ise $x=\frac{1}{t}$ değişken dönüşümü yapılarak, yukarıdaki ilk iki durumun sonucu kullanılarak ispatlanır: Gerçekten de,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

önceki durum

elde edilir.

Örnek: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$ 'i tekrar hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$ //

Örnek: $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm:
$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{e^x - 1 - x} \left[\frac{0}{0}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 2\sin 2x}{e^x - 1} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4\cos 2x}{e^x} = \frac{-1+4}{1} = 3$ //

NOT: Yukarıdaki örnekte l'Hôpital kuralını 3 kez uyguladık ki bu aslında, daha önce Taylor metodu hesaplarken yazdığımız, 3. derece polinomlara karşılık gelmektedir.

Örnek (a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos^2 x} = ?$ (b) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = ?$

Çözüm: (a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos^2 x} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-2\cos x \cdot \sin x} = -\infty$

(b) Burada l'Hôpital kuralını kullanamayız, çünkü bu bir belirsizlik değildir.

$x\to 1^+$ iken paydo sıfıra yaklaşır, fakat pay sıfıra yaklaşmaz.
Her $x>1$ iken $\ln x>0$ old. dan, direkt olarak $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \infty$ elde ederiz.
Eğer burada l'Hôpital kuralını uygulasaydık, $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} x = 1$
yanlış sonucunu elde ederdik.

Örnek : $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = ?$

Çözüm : Buradaki belirsizlik $[\infty - \infty]$ formundadır, dolayısıyla l'Hôpital uygulanamaz. Fakat $[\frac{0}{0}]$ şekline getirilebilir:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) [\infty-\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = -\frac{0}{2} = 0$$

$[\frac{\infty}{\infty}]$ şeklindeki belirsizlikler için de l'Hôpital kuralının bir versiyonu vardır.

Teorem 49 (İkinci L' Hôpital Kuralı):

f ve g fonksiyonları (a,b) aralığında türevlenebilir ve orada $g'(x) \neq 0$ olsun. Ayrıca

(i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \mp\infty$ ve

(ii) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (burada L sonlu bir sayı veya ∞ veya $-\infty$ olabilir),

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ 'dir.}$$

Benzer sonuçlar, $\lim_{x\to b^-}$ ve $\lim_{x\to c}$, burada $a<c<b$, için de sağlandığı gibi $a=-\infty$ ve $b=\infty$ 'da olabilir.

NOT: [0/0] veya [∞/∞] tipinde olmayan belirsizlikler hesaplamak için l'Hôpital kuralı kullanılmaz. Bu tür girişimler genellikle yanlış sonuçlara götürür.

Diğer taraftan, ikinci l'Hôpital kuralı [a/∞] şeklindeki belirsizliklere uygulanabilir, fakat bunu yapmanın anlamı yoktur, çünkü açıkça limitin 0 olduğu görülüyor.

NOT: Eğer $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mevcut değilse $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ hakkında birşey söylenemez. Başka teknikler kullanılabilir.

Örneğin, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{1}$ mevcut olmamasına karşın, sıkıştırma Teoreminden, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ olduğu görülür.

Örnek (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{e^x}\right) = ?$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^a \ln x) = ?$ (burada $a>0$)

Çözüm: (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$ //

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a \ln x \;[0.(-\infty)] = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a}} \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^a}{-a} = 0$ //

NOT: $[0^0]$, $[\infty^0]$ ve $[1^\infty]$ tipindeki belirsizlikleri ele almanın en kolay yolu verilen ifadelerde logaritma almaktır.

Aşağıdaki iki örnek bu tekniği gösterir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$'i hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \Rightarrow [0^0]$ belirsizliği verir.

$y = x^x$ olsun. O zaman

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ 'dır. (Bir önceki örneğin (b) şıkkına göre)

O halde

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$ olur.

Örnek $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{x} = ?$

Çözüm : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{x}$; $[1^{\infty}]$ belirsizliği vardır.

$y=\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{x}$ olsun. O zaman

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right) \quad [\infty \cdot 0]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sin 3/x}\left(\cos\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cos\frac{3}{x}}{1+\sin\frac{3}{x}} = 3 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} y = e^{3} \text{ olur.}$$

Çözümlü Problemler-

1) L'Hospital kuralından faydalanarak aşağıdaki limitleri bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$ $(\beta\neq 0)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln \cot x)^{\tan x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Çözüm-

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^4-6x+7}{4x^3-5} = \dfrac{6}{-1} = -6$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{-\cancel{2/\pi}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\frac{2}{\pi}}\arccos x}}{\dfrac{1}{1+x}}$

$= -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)} = \dfrac{-1}{\pi/2}$

$= \dfrac{-2}{\pi}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha-1}{x^\beta-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{e^x-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\tan x}{\tan x(e^x-1)}$

$\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\tan x}{x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+\tan^2 x)}{2x}$

($x\to 0$ iken $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ ve $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ olduğundan $\tan x\sim x$ ve $e^x-1\sim x$ alınabilir.)

$\overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\tan x(1+\tan^2 x)}{2} = \frac{1}{2}$ dir.

e) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x-1} = 0^0$ B.Ş $\Rightarrow$ $y=\lim_{x\to 0^+} x^{x^x-1}$

$\ln y = \lim_{x\to 0^+}(x^x-1)\ln x$

$\overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}(e^{x\ln x}-1).\ln x$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{x\ln x}-1)}{x\ln x}x\ln^2 x$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\lim_{x\to 0^+}x\ln^2 x$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{x\ln x}\lim_{x\to 0^+}x.\ln^2 x$

$=\lim_{x\to 0^+}x\ln^2 x$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{1/x}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x.1/x}{-1/x^2}$

$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0$ B.Ş

$y=\lim_{x\to 0^+} x^x$

$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln x$

$\overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$

$\overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}$

$=\lim_{x\to 0} -x$

$=0 \Rightarrow y=e^0=1$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1 \Rightarrow e^x-1\sim x$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1 \Rightarrow e^{x\ln x}-1\sim x\ln x$

$$= \lim_{x\to 0^+} -2\,\frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} (-2)\cdot \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

$\Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$ olur.

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln \cot x)^{\tan x} = \infty^0$ B.Ş.

$$y = \lim_{x\to 0^+} \left[\ln(\cot x)\right]^{\tan x}$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+} \tan x \cdot \ln\left[\ln(\cot x)\right]$$

$$\overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left[\ln(\cot x)\right]}{\cot x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\cot x))'}{(\ln\cot x)(1+\cot^2 x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cancel{1+\cot^2 x}}{\cot x}}{\ln(\cot x)\cancel{(1+\cot^2 x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cot x \cdot \ln(\cot x)}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

$\ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1.$

g) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$ B.Ş.

$$y = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x\cos x}$$

$$= -1/2 \Rightarrow$$

$$\ln y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = e^{-1/2}$$