Diferansiyel Denklemler -

$y = f(x)$ bilinmeyen fonksiyonu, x bağımsız değişkeni ve bilinmeyen fonksiyonun sınırlı sayıda herhangi türevleri arasında kurulmuş olan bağıntıya diferansiyel denklem denir. (Adi dif. denklem denir)

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \rightarrow \text{Dif. denklemin genel ifade şekli.}$$

$$F\left(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} = D \Rightarrow F\left(x, y, Dy, D^2y, D^3y, \dots, D^ny\right) = 0$$

Tanım: (Mertebe)

Diferansiyel denklemde görülen en yüksek türev mertebesine denklemin mertebesi denir.

$y' = \sin x \rightarrow$ 1. mertebeden

$y'' + 5y' + 6y = e^x \rightarrow$ 2. mertebeden

Tanım: (Derece)

Dif. denklemde en yüksek mertebeden türevin kuvvetine (üssüne) denklemin derecesi denir. Denklemin derecesi denklem rasyonel halde iken belirlenir.

$y''^2+4y'=0 \rightarrow$ 2. mertebeden 2. dereceden

$y''=\sqrt{1+y'^2} \rightarrow y''^2=1+y'^2 \rightarrow$ 2. mert., 2. der.

$(y'')^{2/3}=1+y' \rightarrow y''^2=(1+y')^3 \rightarrow$ 2. mert., 2. der.

Dif. denklemlerin sınıflandırılması

1) Dif. denklemler şekillerine göre ikiye ayrılırlar

* Adi dif. denklemler

$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$

$y=f(x)$ ör/ $xy'+2y=e^x$

* Kısmi türevli dif. denklemler

$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dots\right)=0$

$z=f(x,y)$ ör/ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (Laplace denk.)

2.) Dif. denklemler mertebelerine göre ikiye ayrılırlar

* Birinci mertebeden dif. denklemler

$$F(x, y, y') = 0$$

Ör/ $y' = x - 8$

$xy' + y = 1$

* ikinci ve daha yüksek mertebeden dif. denklemler

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Ör/ $y''' + 2y'' + y = e^x$

$x^2y'' + 2xy' + y = \ln x$

3) Dif. denklemler lineerliğine göre ikiye ayrılırlar;

Tanım: Eğer bir dif. denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise lineerdir. Aksi taktirde denklem non-lineer (lineer olmayan denk-lemdir.

Lineer

1) $y'' + 5y' + 3y = x^3$

2) $y' + y\tan x = \sin x$

Lineer olmayan

1) $y'' + y'^2 = x$

2) $y''^3 + 3y'^2 + y = 0$

NOT: Her dif. denklem var olan türevlere göre polinom denklem biçiminde yazılamaz

$$y'' + (y')^2 = \ln y'' \rightarrow$$ bu denklemin derecesi tanımlı değildir.

Bir lineer dif. denklem birinci derecedendir ancak bunun tersi doğru değildir.

$$y' = 1 + xy^2 \rightarrow$$ 1. dereceden, lineer olmayan

$$y'' + (\cos x)\, y\, y' = \sin x \rightarrow$$ 1. dereceden, lineer olmayan

4) Dif. denklemler katsayılarına göre ikiye ayrılır

* Sabit katsayılı dif. denk.

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$a, b, c \rightarrow$ birer sabit

Ör/ $y''' - y'' + 5y' + 4y = \frac{1}{2} - e^{2x}$

* Değişken katsayılı dif. denk.

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = f(x)$$

$a(x), b(x)$ ve $c(x) \rightarrow x$ bağımsız değişkeninin birer fonksiyonu

Ör/ $(1+x^2)\, y'' + (1+x)\, y' + y = x$

Diferansiyel denklemlerin oluşması

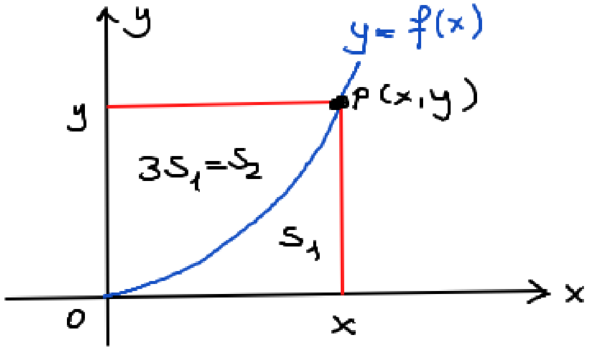
Dif. denklemler birçok bilim dalında ortaya çıkar.

$$y=f(x) \to y'=f'(x)=g(x) \Rightarrow y''=f''(x)=g'(x)=h(x) \Rightarrow \cdots$$

Eğer bu fonksiyonlar arasında bir ilişki kurulabiliyorsa her seferinde yeni bir dif. denklem elde edilir.

Ör/
$$\left.\begin{aligned} y &= x\sin x = f(x) \\ y' &= \sin x + x\cos x = g(x) \\ y'' &= 2\cos x - x\sin x = h(x) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \to \begin{array}{l} \boxed{xy' - y = x^2\cos x} \\ \boxed{y + y'' = 2\cos x} \end{array}$$

Ör/ Başlangıçtan geçen bir eğrinin herhangi bir $P(x,y)$ noktasından eksenlere paraleller çizerek bir dikdörtgen alan oluşturulsun. Eğri o şekilde seçilmelidir ki dikdörtgenden ayırdığı alan parçalarından biri diğerinin üç katına eşit olsun. Bu eğrinin dif. denklemini oluşturalım.



Dikdörtgenin alanı: $x \cdot y = S_1 + S_2 = 4S_1$

$\cancel{4S_1} = x \cdot y$

$$4\int_0^x f(t)\,dt = x \cdot y$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right] = b'(x) \cdot f(b(x)) - a'(x) \cdot f(a(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left[4\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}[xy]$$

$$4f(x) = y + xy'$$

$$4y = y + xy' \Rightarrow \boxed{xy' - 3y = 0}$$

Eğri Ailesinin Dif. Denklemi

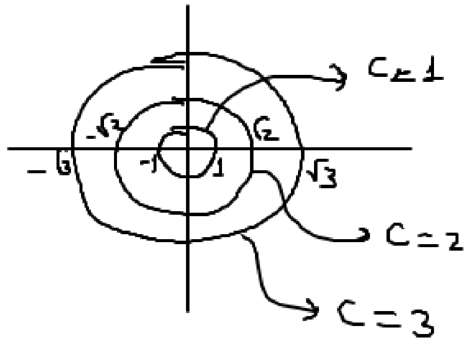
Aynı ortak özellikleri gösteren eğrilerin oluşturduğu topluluklara eğri ailesi denir. Eğri aileleri ifade edilirlerken özelliklerine göre bir ya da daha çok sayıda keyfi parametre kullanılır.

Genel olarak $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n tane keyfi parametre olmak üzere

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

n parametreli eğri ailesini temsil eder.

$$x^2+y^2=c^2$$



$$(x-a)^2+(y-b)^2=1$$

$y=cx^2 \rightarrow$ parabol ailesi

$y=c+x \rightarrow$ doğru ailesi

Bir eğri ailesinin diferansiyel denklemi oluşturulmak isteniyorsa parametre sayısı kadar türev alınır ve oluşan bağıntılar arasından (n parametreli eğri ailesi için n+1 bağıntı oluşur) parametreler yok edilerek eğri ailesinin dif. denklemi elde edilir.

$f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0 \rightarrow$ n kez türev alınır.

Ör/ $x^2+y^2=\underline{\underline{c^2}}$ eğri ailesinin dif-denk. bulunuz.

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y} \quad , \quad yy'+x=0$$

Ör/ $y=x+\underline{\underline{c}}$ eğri ailesinin dif. denk. bulunuz.

$$y'=1$$

Ör/ $y=\underline{\underline{c}}x^2$ eğri ailesinin dif. denk. bulunuz.

$$\left\{\begin{array}{l} y=cx^2 \\ y'=2cx \end{array}\right.$$

$$c=\frac{y}{x^2} \Rightarrow y'=2\frac{yx}{x^2} \Rightarrow y'=\frac{2y}{x} \Rightarrow xy'-2y=0$$

Ör/ $y = \underline{\underline{c_1}} \cos x + \underline{\underline{c_2}} \sin x$ eğri ailesinin dif. denk. bulunuz.

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$
$$y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$$
$$\longrightarrow \quad y'' + y = 0$$

Ör/ $y = \underline{\underline{c_1}} e^{x} + \underline{\underline{c_2}} e^{2x} + \underline{\underline{c_3}} e^{3x}$ eğri ailesinin dif. denk. bulunuz.

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$
$$y' = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x}$$
$$y'' = c_1 e^{x} + 4c_2 e^{2x} + 9c_3 e^{3x}$$
$$y''' = c_1 e^{x} + 8c_2 e^{2x} + 27c_3 e^{3x}$$

$$y''' - y'' = 4c_2 e^{2x} + 18 c_3 e^{3x}$$
$$-\ 4/\ y' - y = c_2 e^{2x} + 2c_3 e^{3x}$$
$$\overline{y''' - y'' - 4y' + 4y = 10 \underline{\underline{c_3}} e^{3x}}$$

n tane parametrenin n+1 tane bağıntı içerisinde bulunması bağıntılar arasında belirli koşullar sağlandığı takdirde lineer bağımlılık ilişkisi bulunması gerektiğini gösterir. Bu koşul,

$$\left.\begin{aligned} y - c_1e^{x} - c_2e^{2x} - c_3e^{3x} &= 0 \\ y' - c_1e^{x} - 2c_2e^{2x} - 3c_3e^{3x} &= 0 \\ y'' - c_1e^{x} - 4c_2e^{2x} - 9c_3e^{3x} &= 0 \\ y''' - c_1e^{x} - 8c_2e^{2x} - 27c_3e^{3x} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

homojen sisteminin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} y & -e^{x} & -e^{2x} & -e^{3x} \\ y' & -e^{x} & -2e^{2x} & -3e^{3x} \\ y'' & -e^{x} & -4e^{2x} & -9e^{3x} \\ y''' & -e^{x} & -8e^{2x} & -27e^{3x} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -e^{6x}\begin{vmatrix} y & 1 & 1 & 1 \\ y' & 1 & 2 & 3 \\ y'' & 1 & 4 & 9 \\ y''' & 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 & 1 \\ y' & 1 & 2 & 3 \\ y'' & 1 & 4 & 9 \\ y''' & 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} H_{21}(-1) \\ H_{31}(-1) \\ \\ H_{41}(-1) \end{array} \begin{vmatrix} y & 1 & 1 & 1 \\ y'-y & 0 & 1 & 2 \\ y''-y & 0 & 3 & 8 \\ y''-y & 0 & 7 & 26 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} y'-y & 1 & 2 \\ y''-y & 3 & 8 \\ y'''-y & 7 & 26 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} H_{21}(-3) \\ H_{31}(-7) \end{array} \begin{vmatrix} y'-y & 1 & 2 \\ y''-y-3y'+3y & 0 & 2 \\ y'''-y-7y'+7y & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} y''-y-3y'+3y & 2 \\ y'''-y-7y'+7y & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$12y'' - 12y - 36y' + 36y - 2y''' + 2y + 14y' - 14y = 0$$

$$-2y''' + 12y'' - 22y' + 12y = 0$$

$$\boxed{y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0}$$

Diferansiyel Denklemin Çözümleri

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ diferansiyel denklemini özdeş olarak sağlayan fonksiyona dif. denklemin çözümü denir.

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ y' &= \varphi'(x) \\ y'' &= \varphi''(x) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \varphi^{(n)}(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

ise $\varphi(x)$ dif. denk'in bir çözümüdür.

$\varphi(x)$'in grafiğine integral eğrisi denir.

Üç tip çözüm vardır.

1. Genel çözüm

Diferansiyel denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi parametre (sabit) bulunduran bir fonksiyon denklemi sağlıyorsa buna dif. denklemin genel çözümü denir. Genel çözüm eğrisi bir eğri ailesi tanımlar.

2. Özel çözüm

Genel çözümdeki parametrelere (sabitlere) özel değerler vermek suretiyle elde edilen çözümlerdir. Başka bir deyişle dif. denklem ile birlikte verilmiş olan başlangıç şartlarına bağlı olarak bulunacak çözümlere özel çözüm denir. Özel çözüm eğrisi genel çözümün gösterdiği eğri ailesinin bir üyesini tanımlar.

3. Tekil çözüm

Dif. denklemin çözümü olduğu halde genel çözümden elde edilmesi mümkün olmayan çözümlere tekil (singüler) çözüm denir.

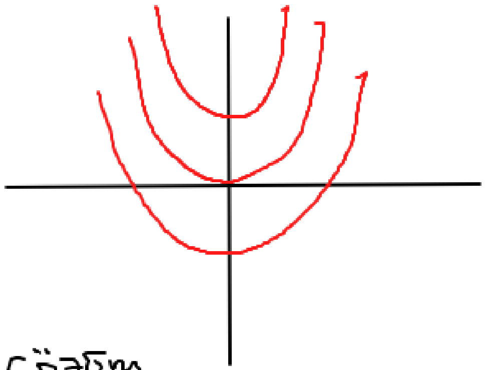
ör/ $y = xy' + y' - y'^2$ dif. denkleminin genel çözümü; $y = cx + c - c^2$

özel çözümü; $(c=1)$ $y = x$

tekil çözümü, $y = \dfrac{(x+1)^2}{4}$

Ör/ $y'=2x \Rightarrow y=x^2+c \to$ Genel çözüm

$c=0 \Rightarrow y=x^2 \to$ özel çözüm



$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+c \\ y=cx+c-c^2 \end{array}\right\} \longrightarrow y=f(x,c) \to \text{açık çözüm}$$

$x^2+y^2=c^2 \to f(x,y,c)=0 \to$ kapalı çözüm.

$y'=-\frac{x}{y} \Rightarrow yy'+x=0$

$y=x^3+\underbrace{A+B+C}_{=C_1} \Rightarrow y=x^3+C_1 \to$ 1. mertebeden bir dif. denk.'in genel çözümüdür.

$y=\ln\frac{Ax}{B}=\ln A+\ln x-\ln B=\ln x+\underbrace{\ln A-\ln B}_{C_1}=\ln x+C_1 \to$ 1. mertebeden bir dif. denk.'in genel çözümüdür.

Tanım: (Başlangıç Değer Problemi)

n. mertebeden

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

dif. denklemi ve bağımsız değişkenin tek bir x_0 değeri için

$$y(x_0) = y_1$$

$$y'(x_0) = y_2$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_n$$

ek koşulları ile oluşturulan probleme başlangıç değer problemi denir.

Başlangıç değer problemi, genel çözümden mertebeye eşit sayıda verilen ek koşullar yardımıyla özel çözüm bulma problemidir.

Ör/ $y' = x \qquad y(0) = 2$ başlangıç değer prob. çözünüz.

$$y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 = 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{2} + 2}$$

Ör/ $y'' = e^x \qquad y(0) = 0 \, , \, y'(0) = 2$ B.D.P'ni çözünüz.

$$y'' = e^x \Rightarrow y' = e^x + c_1 \Rightarrow y = e^x + c_1 x + c_2 \Rightarrow y' = e^x + c_1$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = e^0 + 0 . c_1 + c_2 \qquad y'(0) = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y' = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow c_2 = -1 \qquad 2 = e^0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^x + x - 1}$$

Birinci mertebeden diferansiyel denklemler

$F(x,y,y')=0$ veya $y'=f(x,y)$ veya

$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ formundaki denklemlerdir.

Bu denklemlerin genel çözümü $y=\varphi(x,C)$ veya $G(x,y,C)=0$ şeklindedir.

Birinci mertebeden dif. denklemlerin çözümü için genel bir yöntem yoktur. Özel kurallar vardır.

1) Değişkenlerine Ayrılabilir denklemler.

$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ diferansiyel denklemi $f(x)\,dx+g(y)\,dy=0$ şeklinde ifade edilebiliyorsa bu denkleme değişkenlerine ayrılabilir dif. denk. denir. Denklem bu aşamada terim terim integre edilerek istenen çözüm elde edilir.

$$\int f(x)\,dx+\int g(y)\,dy=\int 0 \Rightarrow \boxed{F(x)+G(y)=C}$$

Ör/ $x^2y\,dx-(1-x)\,dy=0$ dif. denk.'nin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{x^2 \cancel{y}\,dx}{\cancel{y}\cdot(1-x)}-\frac{\cancel{(1-x)}\,dy}{y\cdot\cancel{(1-x)}}=\frac{0}{y\cdot(1-x)}$$

($y\neq 0$, $1-x\neq 0$ olmak üzere)

$$\Rightarrow \int\frac{x^2}{1-x}\,dx-\int\frac{dy}{y}=\int 0 \Rightarrow \int\left[-x-1+\frac{1}{1-x}\right]dx-\int\frac{dy}{y}=\int 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 1-x \\ \hline -x^2+x & -x-1 \\ x & \\ -x+1 & \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{-\frac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|-\ln|y|=C} \rightarrow F(x,y,c)=0$$

Ör/ $dy+e^{x+y}dx=0$ dif. denk.'nin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{e^y}+\frac{e^x\cdot \cancel{e^y}\,dx}{\cancel{e^y}}=\frac{0}{e^y} \Rightarrow \int e^{-y}\,dy+\int e^x\,dx=\int 0 \Rightarrow \boxed{-e^{-y}+e^x=C} \rightarrow F(x,y,c)=0$$

Ör/ $y' + e^x \cdot y = e^x \cdot y^2$ dif. denk.nin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = e^x y^2 - e^x y \Rightarrow y' = e^x (y^2 - y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cdot y(y-1)$$ $(y \neq 0, y-1 \neq 0)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int e^x \, dx$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$A = -1$

$B = 1$

$$\Rightarrow \int \left[\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right] dy = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow -\ln|y| + \ln|y-1| = e^x + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = e^x + c}$$

Ör/ Herhangi bir noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}}$ olan ve $A(2,0)$ noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.

$$y' = \frac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}} \qquad (1+y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx \Rightarrow \boxed{\ln|1+y| = -\sqrt{5-x^2} + C} \quad \text{Genel çözüm.}$$

$5-x^2 = u$

$-2x\,dx = du$

$x\,dx = -\frac{du}{2}$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{-\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = -\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C$$

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ x=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln|1+0| = -\sqrt{5-4} + C$$

$$0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln|1+y| = 1 - \sqrt{5-x^2}}$$

istenen özel çözüm.

2) Homojen diferansiyel denklemler