$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$
$$\cos(t \mp u) = \cos t \cos u \pm \sin t \sin u$$
$$\sin(t \mp u) = \sin t \cos u \mp \cos t \sin u$$

$$\tan(t \mp u) = \frac{\tan t \mp \tan u}{1 \pm \tan t \tan u}$$

$$\cos t \cdot \cos u = \frac{1}{2}\left[\cos(t+u) + \cos(t-u)\right]$$

$$\sin t \cdot \sin u = \frac{1}{2}\left[\cos(t-u) - \cos(t+u)\right]$$

$$\sin t \cdot \cos u = \frac{1}{2}\left[\sin(t+u) + \sin(t-u)\right]$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$= 1 - 2\sin^2 t$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$

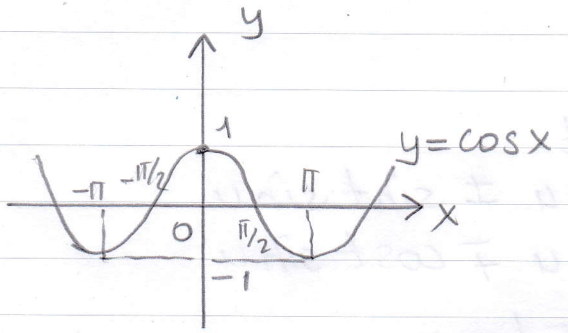
$$\sin t \mp \sin u = 2 \sin \frac{t \mp u}{2} \cos \frac{t \pm u}{2}$$

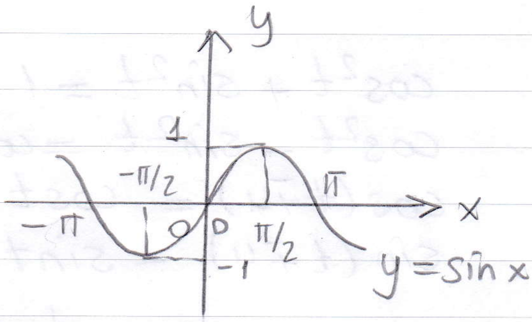
$$\cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

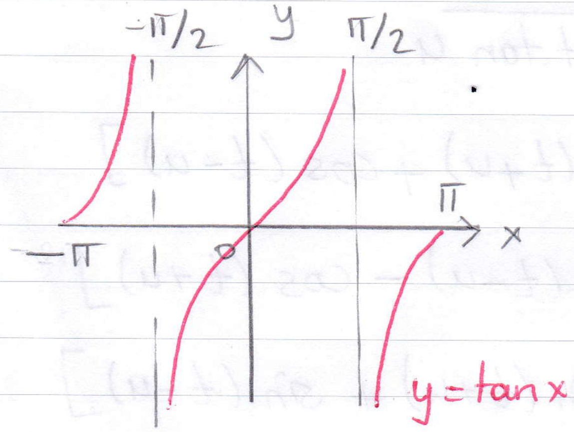
$$\cos t - \cos u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{u-t}{2}$$

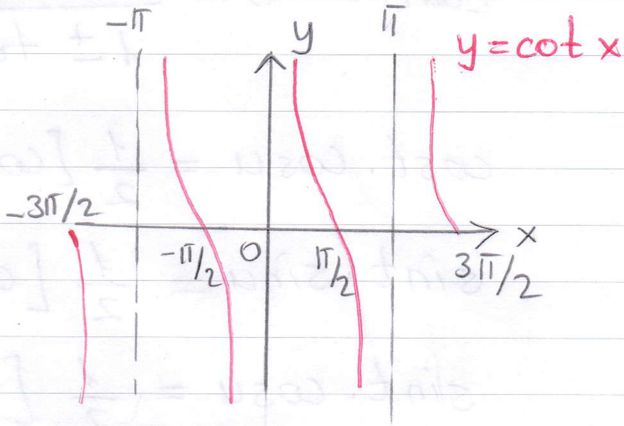
$$\tan^2 t = \sec^2 t - 1$$
$$\cot an^2 t = \csc^2 t - 1$$

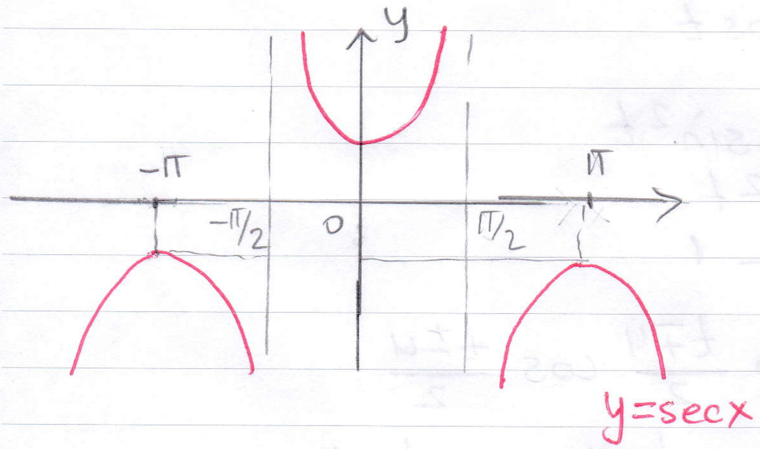
$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \qquad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

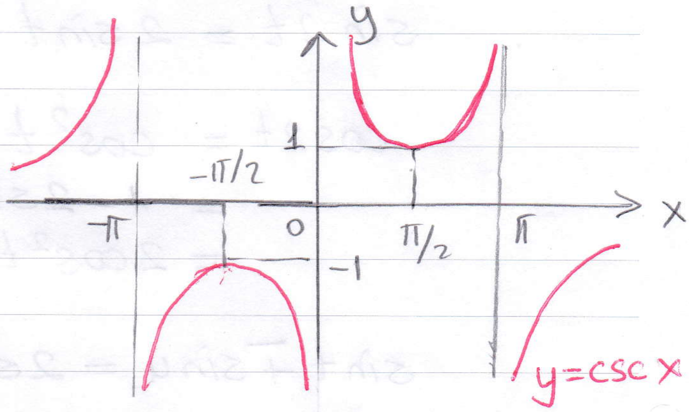












• Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

$f: \mathbb{R} \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu örten fakat birebir olmadığından onun bütün $\mathbb{R}$ de tek değerli ters fonksiyonu yoktur. Bu fonksiyonun $[0,\pi]$ aralığına kısıtlaması olan $\cos|_{[0,\pi]} = g : [0,\pi] \to [-1,1]$

fonksiyonu birebir ve örten olduğundan bu fonksiyonun $g^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arccosinüs (kısaca arccos yazılır) fonksiyonu adı verilir.

$y = \arccos x \Longleftrightarrow \cos y = x$ ve $y \in [0, \pi]$ yazılır.

Benzer şekilde arcsinüs, arctanjant, arccotanjant, arcsekant ve arccosecant fonksiyonları tanımlanır.

$y = \arcsin x \Longleftrightarrow \sin y = x \qquad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

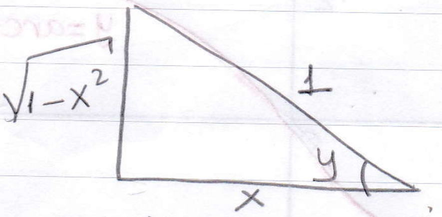
$y = \arctan x \Longleftrightarrow \tan y = x \qquad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \operatorname{arccot} x \Longleftrightarrow \cot y = x \qquad y \in (0, \pi)$

$y = \operatorname{arcsec} x \Longleftrightarrow \sec y = x \qquad |y| \geq 1$

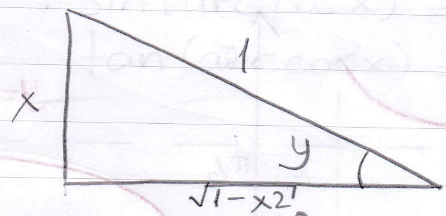
$y = \operatorname{arccosec} x \Longleftrightarrow \operatorname{cosec} y = x \qquad |y| \geq 1$

$\cos(\arccos x) = x$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
$\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



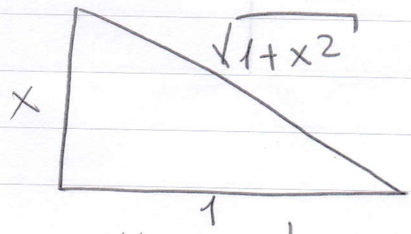
$y = \arccos x$
$\Rightarrow x = \cos y$

$\sin(\arcsin x) = x$
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$



$y = \arcsin x$
$\Rightarrow x = \sin y$

$\tan(\arctan x) = x$
$\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$



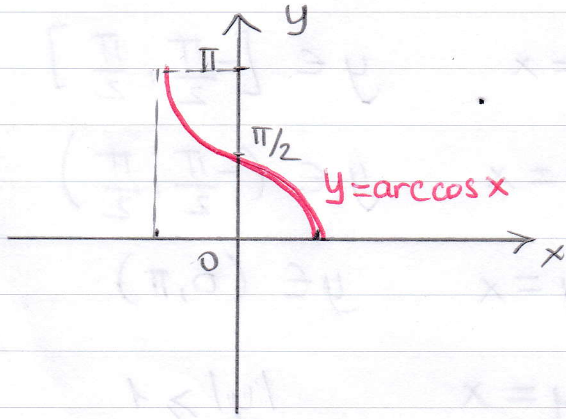
$y = \arctan x$
$\Rightarrow x = \tan y$

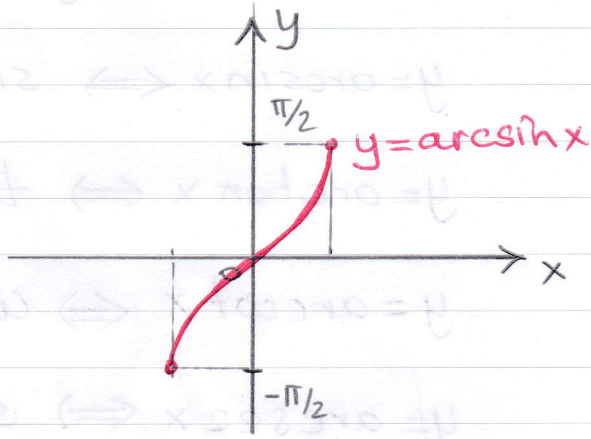
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $\qquad$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

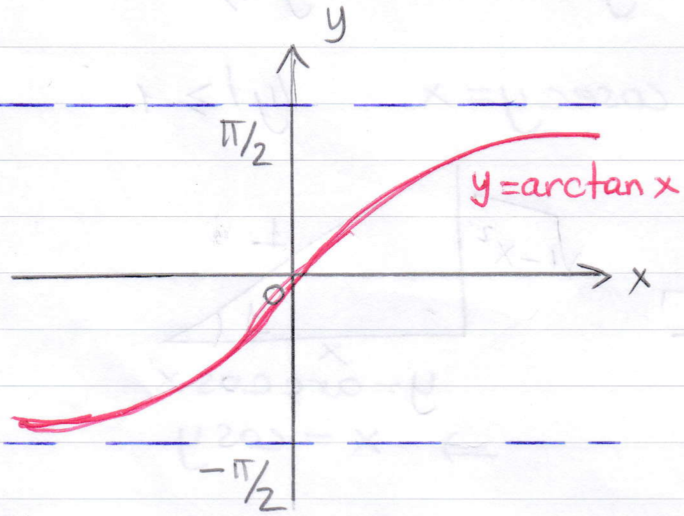
$\arctan(-x) = -\arctan x$

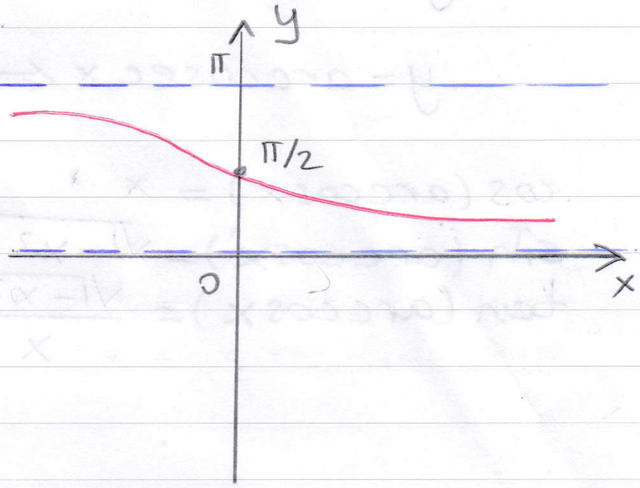
$\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

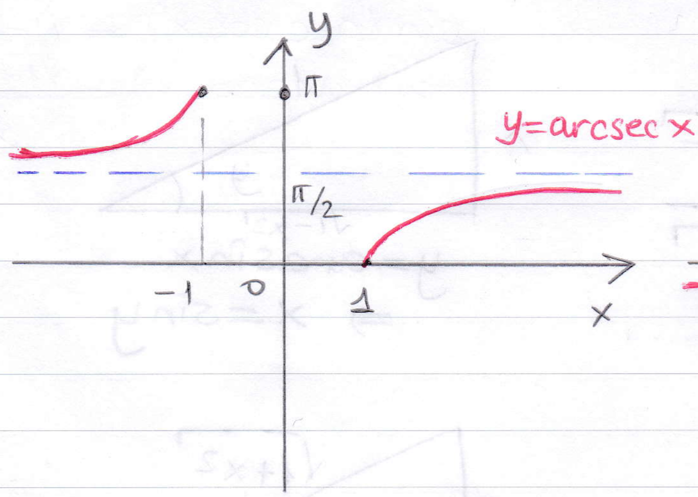
$\operatorname{arccsc} x = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

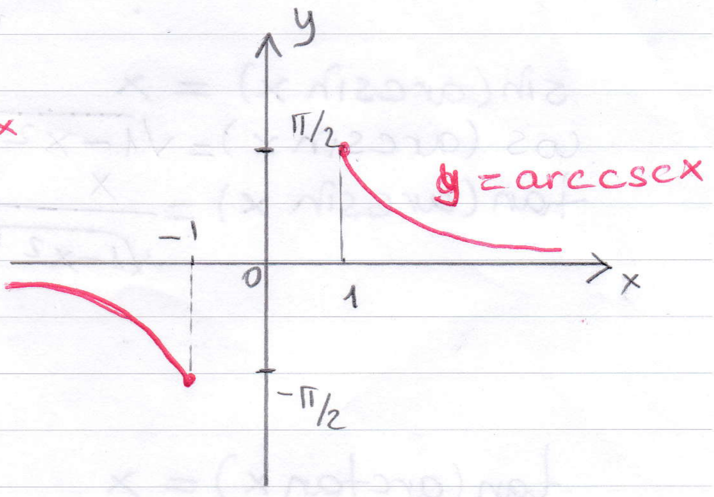












• Hiperbolik Fonksiyonlar

Gerçel doğru üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon bir çift fonksiyonla bir tek fonksiyonun toplamı olarak (tek bir şekilde) ifade edilebilir. Hiperbolik fonksiyonlar $\cosh x$ ve $\sinh x$ toplamı e^x üstel fonksiyon olan sırasıyla çift ve tek fonksiyonlardır.

• $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \longrightarrow$ hiperbolik cosinüs

$D(\cosh x) = \mathbb{R} \qquad R(\cosh x) = [1, +\infty)$

• $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \longrightarrow$ hiperbolik sinüs

$D(\sinh x) = \mathbb{R} \qquad R(\sinh x) = \mathbb{R}$

• $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \longrightarrow$ hiperbolik tanjant

$D(\tanh x) = \mathbb{R} \qquad R(\tanh x) = (-1, 1)$

• $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \longrightarrow$ hiperbolik cotanjant

$D(\coth x) = \mathbb{R} - \{0\} \qquad R(\coth x) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için
$$\cosh(-x) = \cosh x$$
$$\sinh(-x) = -\sinh x$$
$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $\quad \coth(-x) = -\coth x$

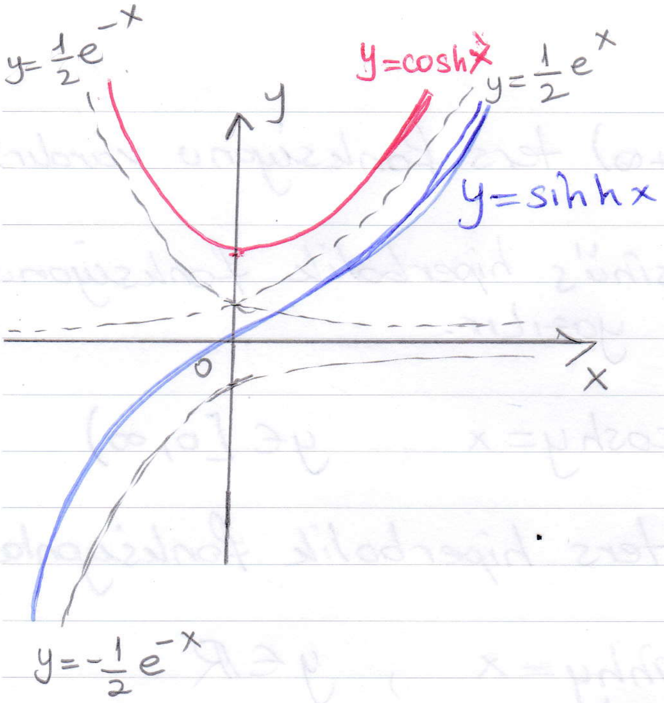
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

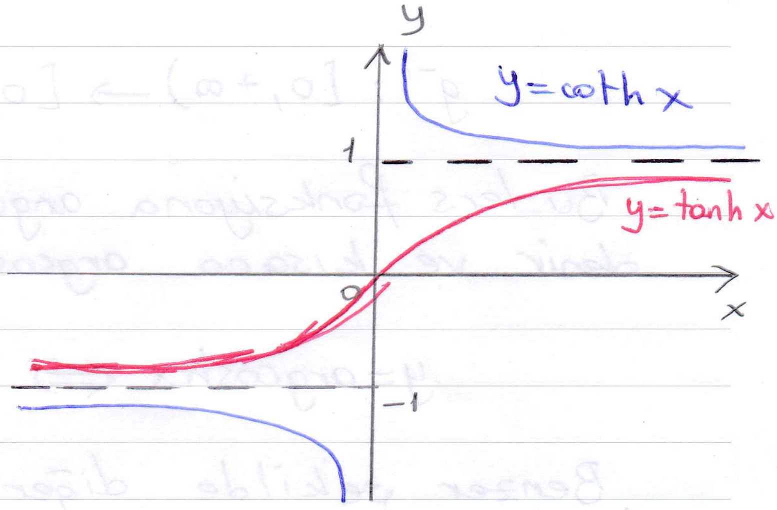
$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x \quad , \quad \coth^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$$
$$\cosh(x+t) = \cosh x \cosh t + \sinh x \sinh t$$
$$\sinh(x+t) = \sinh x \cosh t + \cosh x \sinh t$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\tanh(x+t) = \frac{\tanh x + \tanh t}{1 + \tanh x \tanh t}$$

$$\cosh x \cosh t = \frac{1}{2}\left[\cosh(x+t) + \cosh(x-t)\right]$$
$$\sinh x \sinh t = \frac{1}{2}\left[\cosh(x+t) - \cosh(x-t)\right]$$
$$\sinh x \cosh t = \frac{1}{2}\left[\sinh(x+t) + \sinh(x-t)\right]$$
$$\sinh x + \sinh t = 2\sinh\left(\frac{x+t}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-t}{2}\right)$$
$$\sinh x - \sinh t = 2\sinh\left(\frac{x-t}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+t}{2}\right)$$
$$\cosh x + \cosh t = 2\cosh\left(\frac{x+t}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-t}{2}\right)$$
$$\cosh x - \cosh t = 2\sinh\left(\frac{x+t}{2}\right)\sinh\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

$\cosh t$ ve $\sinh t$'ye hiperbolik fonksiyonlar denmesinin nedeni $(\cosh t, \sinh t)$ noktasının $x^2 - y^2 = 1$ dikdörtgensel hiperbolünün üzerinde olmasıdır.

$\cosh 0 = 1$, $\sinh 0 = 0$ dır.





- Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

$f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $f(x) = \cosh x$ fonksiyonu örten, fakat birebir değildir. Gerçekten $\forall y \in [1, +\infty)$ için

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \quad \text{veya} \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

denkleminin iki tane

$$x_1 = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \qquad x_2 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \quad (1)$$

çözümünün varlığı görülür. Demek ki, $\forall y \in (1, \infty)$ için $\mathbb{R}$ içinde $x_1 \neq x_2$ koşulunu sağlayan (1) noktaları bulunur ki $f(x_1) = f(x_2)$'dir. Bu sebeple f'nin tek değerli ters fonksiyonu yoktur. Bu fonksiyonun $[0, \infty)$ aralığına kısıtlaması olan

$$\cosh x \Big|_{[0,\infty)} = g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

fonksiyonu birebir ve örten olduğundan

$g^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ters fonksiyonu vardır.

Bu ters fonksiyona argcosinüs hiperbolik fonksiyonu denir ve kısaca argcosh yazılır.

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff \cosh y = x \qquad y \in [0, \infty)$$

Benzer şekilde diğer ters hiperbolik fonksiyonlar;

$$y = \operatorname{argsinh} x \iff \sinh y = x \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{argtanh} x \iff \tanh y = x \quad , \quad y \in (-1, 1)$$

$$y = \operatorname{argcoth} x \iff \coth y = x \quad , \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Hiperbolik fonksiyonlar üstel fonksiyon olarak tanımlandıklarından ters hiperbolik fonksiyonların Logaritma fonksiyonu ile tanımlanacağı açıktır.

$$\operatorname{argcosh} x = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \in [1, +\infty)$$

$$\operatorname{argsinh} x = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{argtanh} x = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{argcoth} x = \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Tanım 40: Rasyonel olmayan ve rasyonel dereceli kuvvet fonksiyonlarından sonlu sayıda aritmetik işlem ve bileşik fonksiyon oluşturma kurallarının uygulanması ile elde edilebilen fonksiyonlara irrasyonel fonksiyonlar adı verilir.

Örneğin, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$

$y = \sqrt[3]{x^4 - 2}$, $x \in \mathbb{R}$

$y = \dfrac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^{2/3}+1}}$, $x \in \mathbb{R}$,

$y = \log\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$

irrasyonel fonksiyonlardır.

Rasyonel ve irrasyonel olmayan elementer fonksiyonlara transandantal fonksiyonlar adı verilir.

Örneğin; üstel, logaritma, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik ve ters hiperbolik fonksiyonlar transandantal fonksiyonlardır.

NOT: Elementer olmayan fonksiyonlar da vardır.

Örneğin; a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n!$ (faktöryel f.)

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ (tam değer f.)
(x sayısından büyük olmayan tam sayıların en büyüğü)

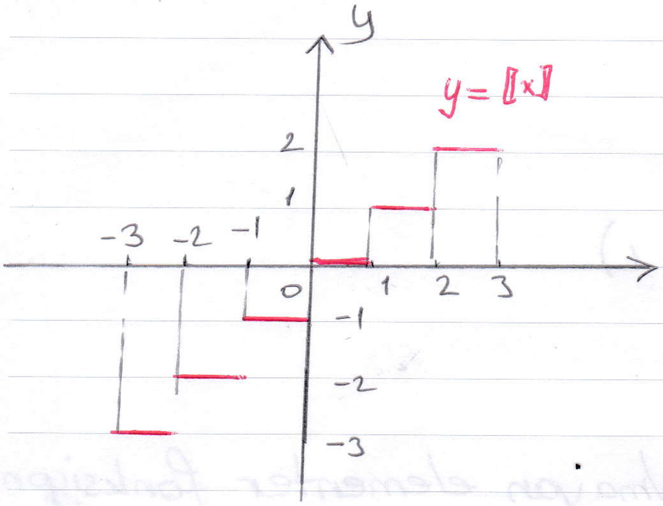
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [\![x]\!]$ (kesir kısım f.)

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \text{ ise} \\ 0, & x=0 \text{ ise} \\ -1, & x<1 \text{ ise} \end{cases}$
(işaret fonk.)

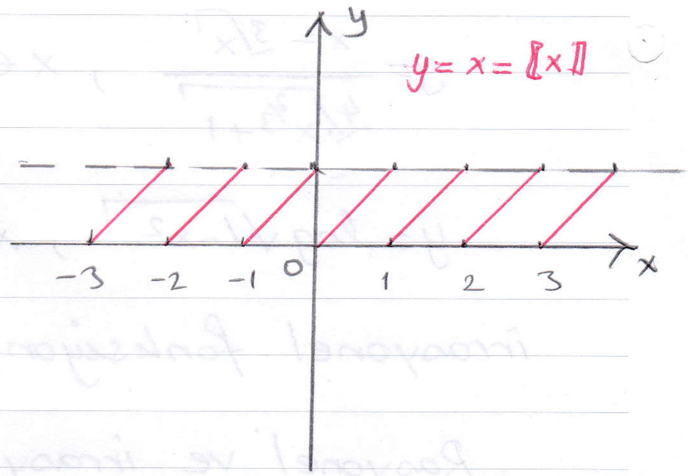
e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \text{ ise}, \\ 0 & x \in \mathbb{I} \text{ ise}, \end{cases}$
(Dirichlet fonk.)

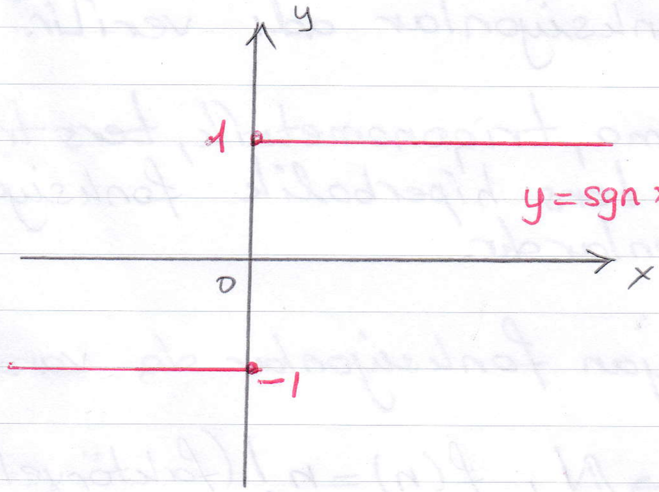
elementer olmayan fonksiyonlardır.



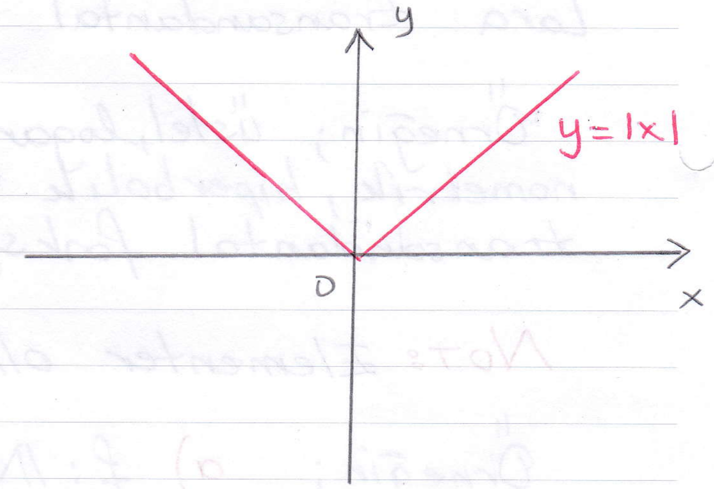
y
y = ⟦x⟧
2
1
-3 -2 -1
0
1 2 3
x
-1
-2
-3



y
y = x − ⟦x⟧
-3 -2 -1 0 1 2 3
x



y
1
y = sgn x
0
x
-1



y
y = |x|
0
x

Çözümlü Problemler.

1) Aşağıda tanımlanan $f:[-1,1] \to [0,1]$ fonksiyonlarından hangisi birebir, örten ve birebir örtendir:

a) $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ c) 2^{x-1}

Çözüm:

a) $y=1$ için $\cos\frac{\pi x}{2} = 1$ denkleminin bir tek $x=0 \in [-1,1]$ çözümü ve $\forall y \in [-1,1)$ için $\cos\frac{\pi x}{2} = y$ denkleminin $[-1,1]$ aralığı içinde iki tane

$$x_1 = -\frac{2}{\pi}\arccos y \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{2}{\pi}\arccos y$$

çözümü bulunduğundan, $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$; $[-1,1] \to [0,1]$ fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\cos\frac{\pi x_1}{2} = \cos\frac{\pi x_2}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi x_1}{2} - \cos\frac{\pi x_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{4}(x_1+x_2)\sin\frac{\pi}{4}(x_1-x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}(x_1+x_2) = 0 \quad \checkmark$$

$$\sin\frac{\pi}{4}(x_1-x_2) = 0$$

$$\frac{\pi}{4}(x_1+x_2) = 0 \qquad \frac{\pi}{4}(x_1-x_2) = 0$$

$$x_1 = -x_2 \qquad x_1 = x_2$$

birebir değil

b) $\forall y \in [0,1]$ için $\frac{1}{2}(x+1)=y$ denkleminin $[-1,1]$ aralığı içinde bir tek $x=2y-1$ çözümü bulunduğundan, $f(x)=\frac{1}{2}(x+1):[-1,1]\to[0,1]$ fonksiyonu birebir örtendir.

c) $y\in[0,1]$ olsun. $y\in[\frac{1}{4},1]$ için $2^{x-1}=y$ denkleminin bir tek $x=1+\log_2 y \in [-1,1]$ çözümü bulunur.

$\forall x\in[-1,1]$ için $\frac{1}{4}\leq 2^{x-1}\leq 1$ olduğundan $y\in[0,\frac{1}{4})$ için $2^{x-1}=y$ denkleminin $[-1,1]$ içinde çözümü yoktur. O halde, $f(x)=2^{x-1}:[-1,1]\to[0,1]$ fonksiyonu birebirdir fakat örten değildir.

2)
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & -1\leq x<0 \text{ ise,} \\ \sin^2 x & 0\leq x\leq \pi \text{ ise,} \\ \dfrac{x-1}{x+1} & x<x\leq 5 \text{ ise,} \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$ ve $f(4)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm:
$$f(-\tfrac{1}{2})=(-\tfrac{1}{2})^2+(-\tfrac{1}{2})+1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1$$
$$=\frac{3}{4}$$

$$f(0)=\sin^2 0=0$$

$$f(4)=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$$

3) $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi/2]$ fonksiyonu için

$$f(2x)=2f(x)\sqrt{1-[f(x)]^2}$$

denkleminin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: $f(2x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ olduğundan

$$f(2x) = 2\sin x \sqrt{1-\sin^2 x}$$
$$= 2 f(x) \sqrt{1-[f(x)]^2}$$

bulunur.

4) $f(1+2x) = \sin x - x^3 + \tan \frac{x-1}{2} + 1$ olduğuna göre $f(x)$'i bulunuz.

Çözüm:

$1+2x = u \Rightarrow \quad x = \frac{u-1}{2} \quad \therefore x-1 = \frac{u-3}{2}$

$$\Rightarrow f(u) = \sin\left(\frac{u-1}{2}\right) - \left(\frac{u-1}{2}\right)^3 + \frac{u-3}{4} + 1 \quad \text{bulunur.}$$

5) Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \log \frac{x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \arccos x - \arcsin(3-x)$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$

d) $f(x) = (|x|-x)\sqrt{-\sin^2 \pi x}$

Çözüm:

(a) $D(\sqrt{9-x^2}) = \{x : 9-x^2 \geq 0\} = [-3, 3]$

$$D\left(\log \frac{x+1}{x-2}\right) = \left\{x : \frac{x+1}{x-2} > 0\right\}$$

$$= \{x : (x+1 > 0,\ x-2 > 0) \vee (x+1 < 0,\ x-2 < 0)\}$$

olduğundan

$$D(f) = [-3,3] \cap ((-\infty,-1) \cup (2,+\infty))$$

$$= [-3,-1) \cup (2,3]$$

elde edilir.

b) $D(\arccos x) = \{x : -1 \leq x \leq 1\} = [-1,1]$

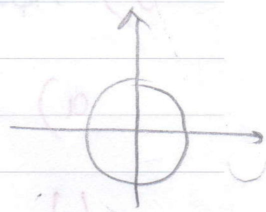
$$D(\arcsin(3-x)) = \{x : -1 \leq 3-x \leq 1\}$$

$$= \{x : -4 \leq -x \leq -2\}$$

$$= \{x : 2 \leq x \leq 4\}$$

$D(f) = [-1,1] \cap [2,4] = \emptyset$ olur.

c) $D\left(\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}\right) = \left\{x : \cos x - \frac{1}{2} \geq 0\right\}$



$$= \left\{x : \cos x \geq \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \left\{x : -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{6-35x-6x^2}}\right) = \{x : 6-35x-6x^2 > 0\}$$

$$= \left\{x : -6 < x < \frac{1}{6}\right\} = \left(-6, \frac{1}{6}\right)$$

$\Rightarrow$

$$D(f) = \left(-6, \frac{1}{6}\right) \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]\right)$$

$$= \left(-6, -\frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

d) $\forall x \in [0,\infty)$ için $|x|-x=0$ dır. Dolayısıyla, $f(x)=0$ olacağından $[0,+\infty) \subset D(f)$ olduğu görülür. $D(f)$ tanım bölgesine negatif x'lerden yalnızca $\sin^2 \pi x = 0$ denklemini sağlayanlar yani $x=k;\ k=-1,-2,\ldots$ noktaları aittir. Böylece,

$$D(f)=\{x:\ x=-1,-2,\ldots\}\cup[0,\infty)$$

olduğu elde edilir.

6) $y=f(u)$ fonksiyonunun tanım bölgesi $(0,1)$ olduğunda

a) $f(x^2)$ b) $f(\ln^2 x)$ c) $f\left(\frac{[\![x]\!]}{x}\right)$

fonksiyonlarının tanım bölgelerini bulunuz.

Çözüm:

a) $D(f(x^2))=\{x:\ 0<x^2<1\}=(-1,0)\cup(0,1)$

b) $D(f(\ln^2 x))=\{x:\ 0<\ln^2 x<1\}$

$=\{x:\ 0<|\ln x|<1\}$

$=\left(\frac{1}{e},1\right)\cup(1,e)$

c) $D\left(f\left(\frac{[\![x]\!]}{x}\right)\right)=\left\{x:\ 0<\frac{[\![x]\!]}{x}<1\right\}$

$x=n\in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ noktaları için $\frac{[\![x]\!]}{x}=1$ 'dir.

$x\in \mathbb{R}_+\setminus \mathbb{N}$ noktaları için $0<\frac{[\![x]\!]}{x}<1$ ve

$x\in \mathbb{R}_-\setminus \mathbb{N}_-$ $(\mathbb{N}_-=\{-n:\ n\in\mathbb{N}\})$ noktaları için

$\frac{[\![x]\!]}{x} > 1$ olduğu açıktır. O halde

$$D(f(\ln^2 x)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (n, n+1) \text{ olur.}$$

7) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f o g)(x)$ ve $(g o f)(x)$ fonksiyonlarını ve tanım bölgelerini bulunuz.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = 10^x$, $g(x) = \log x$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \infty) \text{ ise} \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \infty) \text{ ise} \\ x^2, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise,} \end{cases}$

Çözüm.

a) $(f o g)(x) = f[g(x)]$

$$= [g(x)]^2 = (\sqrt{x})^2 = x \Rightarrow D(f o g) = [0, \infty)$$

$(g o f)(x) = g[f(x)]$

$$= \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow D(g o f) = \mathbb{R}$$

b) $(f o g)(x) = f[g(x)]$

$$= 10^{g(x)} = 10^{\log x} = x \qquad D(f o g) = \mathbb{R}_+$$

$(g o f)(x) = g[f(x)]$

$$= \log f(x) = \log 10^x = x \qquad D(g o f) = \mathbb{R}$$

c) $\forall x \in [0,\infty)$ için $g(x)=0$ olduğundan, $f[g(x)]=0$, $x \in [0,\infty)$ elde edilir.

$\forall x \in (-\infty,0)$ için $g(x)=x^2 \neq 0$ olduğundan $f[g(x)]=g(x)=x^2$, $x \in (-\infty,0)$ elde edilir.

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0, & x \in [0,\infty) \text{ ise} \\ x^2, & x \in (-\infty,0) \text{ ise} \end{cases} \qquad D(f\circ g)=\mathbb{R}$$

Benzer şekilde $g[f(x)]=0$ ve $D(g\circ f)=\mathbb{R}$ dir.

8) Aşağıda verilen fonksiyonların çift olup olmadığını gösteriniz.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$, b) $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$

c) $f(x)=|10-x|-|10+x|$

Çözüm: a) $f(-x)=\dfrac{-x-1}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x-1}{x^2+1}=-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right) \begin{array}{l} \neq -f(x) \\ \neq f(x) \end{array}$

ne tek, ne çifttir.

b) $f(-x)=\log_2(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_2(-x+\sqrt{x^2+1})$

$$-x+\sqrt{x^2+1}=\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f(-x)=\log_2\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\log_2(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

olduğundan $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ fonksiyonu tektir.

c) $f(-x)=|10-(-x)|-|10+(-x)|=|10+x|-|10-x|$

$$=-\left[\,|10-x|-|10+x|\,\right]$$
$$=-f(x)$$

olduğundan tektir.

9) $f(x)=x^3+x^2-3\sin x$, $x\in[0,\infty)$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ üzerinde öyle genişletiniz ki, elde edilen fonksiyon tek olsun.

Çözüm: $x<0$ olsun. O halde, $-x>0$ ve

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)^2-3\sin(-x)$$

dir. $f(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde genişlemesinin tekliği istenildiğinden $x<0$ için

$$f(x)=-f(-x)=x^3-x^2-3\sin x$$

denklemi sağlanmalıdır. O halde istenen fonksiyon

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2-3\sin x & x\geq 0 \text{ ise} \\ x^3-x^2-3\sin x & x<0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçimindedir.

10) $f(x)=\sin x^2$ fonksiyonu periyodik değildir. Gösteriniz.

Çözüm: Önermenin doğruluğunu olmayana ergi yöntemi ile göstereceğiz.

$f(x)=\sin x^2$ fonksiyonunun $T>0$ periyotlu bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

O halde, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x^2 = \sin (x+T)^2 \qquad (2)$$

denklemi sağlanmaktadır. $x=0$ durumunda buradan $\sin T^2 = 0$ dır ve dolayısıyla $T^2 = n\pi$ veya $T = \sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, \ldots$ bulunur. T'nin bu değerini (2)'de yerine yazarsak $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$(3) \qquad \sin x^2 = \sin (x + \sqrt{n\pi})^2 = \sin (x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi)$$

denkleminin sağlandığı elde edilir. m herhangi bir tam sayı olmak üzere

$$2x_0\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2m\pi$$

olacak şekilde bir x_0 sayısı seçelim. (Bu x_0 sayısı

$$x_0 \neq \frac{2m\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

biçiminde seçilebilir)

Seçilen x_0 sayısı için

$$\sin x_0^2 \neq \sin (x_0^2 + 2x_0\sqrt{n\pi} + n\pi)$$

dir. Bu son ifade (3) ile çeliştiğinden kabulümüzün doğru olmadığı görülür. Demek ki, verilen fonksiyon periyodik değildir.

11) Aşağıda verilen önermenin doğru olduğunu gösteriniz.

Önerme: Eğer, $x=f(t)$, $[\alpha,\beta]$ üzerinde artan ve $y=F(x)$, $[f(\alpha),f(\beta)]$ üzerinde azalan ise $y=F(f(t))$, $[\alpha,\beta]$ üzerinde azalandır.

Çözüm.

$t_1,t_2 \in [\alpha,\beta]$, $t_1<t_2$ olsun. Eğer f, $[\alpha,\beta]$ üzerinde artan, F ise, $[f(\alpha),f(\beta)]$ üzerinde azalan ise

$$t_1<t_2 \Rightarrow f(t_1)<f(t_2) \Rightarrow F(f(t_1))>F(f(t_2))$$

olur. O halde, $y=F(f(t))$, $[\alpha,\beta]$ üzerinde azalandır.

12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{2}-3$ fonksiyonunun f^{-1} tersini bulunuz.

Çözüm: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır. Tanım gereği;

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}[f(x)]=x$$

olacağından

$$f^{-1}\left(\frac{x}{2}-3\right)=x$$

dır. Bu eşitlikte $\frac{x}{2}-3=y$ alınırsa;

$$f^{-1}(y)=2y+6$$

elde edilir. O halde f'nin tersi $f^{-1}(x)=2x+6$

şeklinde tanımlanan $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur.

13) $f: \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$, $f(x) = 2x - x^2$ fonksiyonunun eğer, varsa tersini bulunuz.

Çözüm: $f: \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$ fonksiyonu örten fakat, birebir değildir. Buna göre tek değerli tersi yoktur. Şimdi f fonksiyonunun $(-\infty, 1]$ ve $[1, \infty)$ aralıklarına olan $g = f|_{(-\infty,1]}$ ve $h = f|_{[1,\infty)}$ kısıtlamalarını gözönüne alalım. $g: (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$ fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan, g^{-1} tersi vardır. Tanım gereği,

$$(g^{-1} o g)(x) = g^{-1}[g(x)] = x$$

olduğundan $g^{-1}(2x - x^2) = x$ 'tir. Bu eşitlikte $2x - x^2 = y$ ($x = 1 - \sqrt{1-y}$ olacaktır) alınırsa;

$$f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1-y}$$

elde edilir. O halde g fonksiyonunun tersi $g^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ şeklinde tanımlanan $g^{-1}: (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$ fonksiyonudur.

Benzer şekilde $h: [1, \infty) \to (-\infty, 1]$ fonksiyonunun tersi $h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$ şeklinde tanımlanan $h^{-1}: (-\infty, 1] \to [1, \infty)$ fonksiyonu olduğu anlaşılır.

14) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olduğundan f, $\mathbb{R}$ üzerinde alttan sınırlıdır. f in $\mathbb{R}$ üzerinde üstten sınırlı olduğunu gösterelim.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $(1-x^2)^2 \geq 0$ olduğundan, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $1+x^4 \geq 2x^2$ veya $1 \geq \dfrac{2x^2}{1+x^4}$ eşitsizliği sağlanır.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $1+x^4 \geq 1$ olduğundan

$$\frac{x^2+1}{1+x^4} = \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^4} \leq \frac{x^2}{1+x^4} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

olur. Böylece $\forall x \in \mathbb{R}$ için $0 < \dfrac{x^2+1}{1+x^4} \leq \dfrac{3}{2}$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu ise, f'nin $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı olması demektir.

NOT: $E \subset \mathbb{R}$ kümesi ve E üzerinde sınırlı $f: E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$m(f) = m_E(f) = \inf\{f(x) : x \in E\}$$

$$M(f) = M_E(f) = \sup\{f(x) : x \in E\}$$

sayılarına f nin E üzerinde sırasıyla infimumu (ebas) ve supremumu (eküs) denir.

15) $f: [0,\infty) \to [0,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonunun infimumunu ve supremumunu bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in [0,\infty)$ için $0 \leq f(x) < 1$ yani $R(f) = [0,1)$ olduğu ve dolayısıyla, f'nin $(0,\infty)$ üzerinde sınırlı olduğu görülür. sup ve inf özellik lerine göre f'nin $[0,\infty)$ üzerinde sonlu infimumu ve supremumu vardır.

$\forall x \in [0,\infty)$ için $f(x) > 0$ ve hem de $f(0) = 0$ olduğundan

$$m(f) = \inf\left\{\frac{x}{x+1} : x \in [0,\infty)\right\} = 0$$

dır. Şimdi

$$M(f) = \sup\left\{\frac{x}{x+1} : x \in [0,\infty)\right\} = 1$$

olduğunu görelim.

$\forall x \in [0,\infty)$ için $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} < 1$ 'dir ve

$0 < \forall \varepsilon < \frac{1}{2}$ için $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < x_\varepsilon$ koşullarını sağlayan

$x_\varepsilon \in (1,\infty)$ noktası için

$$f(x_\varepsilon) = \frac{x_\varepsilon}{x_\varepsilon + 1} > 1 - \varepsilon$$

olur. O halde, supremumun karakteristik özellikleri dolayısıyla $M(f) = 1$ 'dir.

$m(f) = 0 \in R(f)$, $f(0) = 0$ ve $M(f) \notin R(f)$ olduğundan f, $[0,\infty)$ üzerinde mutlak minimuma sahip fakat mutlak maksimum değerine sahip değildir.