Seriler

Bir kuralla birbirine bağlı sayılar dizisinin bütün terimlerinin toplamından elde edilen ifadeye seri denir.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

Genel terim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Sonsuz terimli seri (Serilerde ilk terimin 1'den başlama zorunluluğu yoktur)

- $$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$$
- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

Gerekli olduğunda toplamın indisini başka bir değerden başlatmak için indisi değişken dönüşümü ile değiştirebiliriz.

$n = m-2$

Ör

- $$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n-1}{2n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$$
- $$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Bir serinin karakteri

Eğer bir serinin, $\{S_n\}$ ile göstereceğimiz ve elemanları

$$
\left.
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}
\right\}
$$

olan kısmi toplamlar dizisi $S \in \mathbb{R}$ gibi bir limite sahip ise yani $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ise serinin yakınsak olduğu söylenir ve $\sum_{n}^{\infty} a_n = S$ yazılır. Eğer kısmi toplamlar dizisi ıraksak ise serinin ıraksak olduğu söylenir. Bir serinin yakınsak veya ıraksak olmasına serinin karakteri denir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{S_1} + a_2}_{S_2} + a_3}_{S_3} + \cdots + a_n}_{S_n} + \cdots$$

NOT: 1°) Sonsuz bir serinin baş tarafından sonlu sayıda terim çıkartmak veya baş tarafına sonlu sayıda terim ilave etmek serinin karakterini değiştirmez.

2°) Sonsuz bir serinin her terimini sıfırdan farklı bir sabit ile çarpmak serinin karakterini değiştirmez.

Geometrik Seriler

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a.r^{n} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n + \dots$$ şeklindeki serilere geometrik seri denir.

a reel sayı

$a \to$ reel sayı $(\in \mathbb{R})$

$r \to$ ortak oran $(\in \mathbb{R})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

$S_1 = a \to$ 1. kısmi toplam

$S_2 = a + ar \to$ 2. kısmi toplam

$S_3 = a + ar + ar^2 \to$ 3. kısmi toplam

$\vdots$

$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \to$ n. kısmi toplam

$\vdots$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = ?$

$\lim\limits_{n\to\infty} [a + ar + \dots + ar^{n-1}]$

Geometrik serinin n. kısmi toplamını hesaplayalım.

$$S_n = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \dots + \cancel{ar^{n-1}}$$

$$- \quad r S_n = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \dots + ar^n$$

$$S_n(1-r) = a - ar^n \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$= \begin{cases} \text{Eğer } |r|<1 \ (-1<r<1) \Rightarrow S = \dfrac{a}{1-r} \text{'dir. Seri yak.} \\ \text{Eğer } |r|>1 \ (r<-1, r>1) \Rightarrow \begin{cases} r>1, a>0 \Rightarrow \infty\text{'a ıraksar} \\ r>1, a<0 \Rightarrow -\infty\text{'a ıraksar} \\ r<-1 \text{ ise limit mevcut değildir. Seri ıraksaktır.} \end{cases} \\ \text{Eğer } r=1 \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} a = n.a \\ \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \infty \ (a>0) \\ -\infty \ (a<0) \end{cases} \\ \text{Eğer } r=-1 \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} a(-1)^{n-1} \\ \quad = a - a + a - a + \dots \\ \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n \to \text{mevcut değil. Seri ıraksaktır.} \end{cases}$

Örnekler -

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ serisinin karakterini belirleyiniz ve yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ r=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ Geometrik seri $\quad |r|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ seri yakınsak

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2$$

2) $\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\cdots$ serisinin karakterini belirleyiniz ve yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\cdots=\pi\left[1-\frac{e}{\pi}+\frac{e^2}{\pi^2}-\frac{e^3}{\pi^3}+\cdots\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\cdot\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}=\underbrace{\frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)}}_{\frac{a}{1-r}}=\frac{\pi^2}{\pi+e}$$

$\left.\begin{array}{l} a=\pi \\ r=\frac{-e}{\pi}\end{array}\right\}$ olan geometrik seri $\quad |r|=\left|\frac{-e}{\pi}\right|=\frac{e}{\pi}<1$

$(e<\pi)$

3) $1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\cdots$ Serisinin karakterini belirleyiniz.

$$1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{1/2}\right)^{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ r=2^{1/2}=\sqrt{2} \end{array}\right\} \text{ olan geometrik seri} \qquad |r|=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}>1 \Rightarrow \text{geo. seri ıraksaktır.}$$

4) $0,16666\ldots=0.1\bar{6}$ ondalık kesrini bir sonsuz toplam şeklinde yazarak toplamı, iki tamsayının oranı şeklinde ifade ediniz.

$$0,16666\ldots=0,1+0,06+0,006+0,0006+\cdots$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots=\frac{1}{10}+\frac{6}{100}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{10}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}=\frac{1}{10}+\frac{\frac{6}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{6}{100}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{10}+\frac{6}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{6}{10^2} \\ r=\frac{1}{10} \end{array}\right\} \text{ olan geometrik seri} \qquad |r|=\frac{1}{10}<1 \Rightarrow \text{geo. seri yak.}$$

Teleskopik Seriler

Eğer bir serinin genel terimi basit kesirlere ayrılarak ifade edilebiliyorsa böyle serilere teleskopik seri denir.

Ör/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$1 \equiv A(n+1) + B.n$$

$$1 \equiv (A+B)n + A$$

$$A+B=0$$

$$A=1 \Rightarrow B=-1$$

$$S_n = \left[1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right] + \cdots + \left[\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Ör/ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-3n^2+2n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-3n^2+2n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-3n+2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)(n-1)}$$

$$\frac{1}{n(n-2)(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2} + \frac{C}{n-1} \Rightarrow 1 \equiv A(n^2-3n+2) + B(n^2-n) + C(n^2-2n)$$

$$1 \equiv (A+B+C)n^2 + (-3A-B-2C)n + 2A$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$-3A - B - 2C = 0$$

$$\underbrace{A + B + C = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} -B - 2C = \frac{3}{2} \\ B + C = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -C = 1 \\ C = -1 \\ B = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$
$$-3A - B - 2C = 0$$
$$\underbrace{A + B + C = 0}$$
$$\left.\begin{array}{l} -B - 2C = \frac{3}{2} \\ B + C = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -C = 1 \\ C = -1 \\ B = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\frac{1}{n(n-2)(n-1)} = \frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n-2} - \frac{1}{n-1}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right] = \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n-2} - \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right] - \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right]\right\}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}} - 1\right)\right] + \left[\left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{2}}\right)\right] + \dots + \left[\left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n-2}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-3}}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n-2}}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

Ör/ $\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x} = \int_\alpha^\beta \frac{du}{u(u+1)} = \int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right] du = \ln|u-1| - \ln|u| \Big|$$

$$= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) \Big|_n^{n+1}$$

$$= \left[\ln e^{n+1} - \ln(1+e^{n+1})\right] - \left[\ln(e^n) - \ln(1+e^n)\right]$$

$$= n+1 - \ln(1+e^{n+1}) - n + \ln(1+e^n)$$

$$= 1 + \ln(1+e^n) - \ln(1+e^{n+1})$$

$1+e^x = u \Rightarrow e^x = u-1$

$e^x\, dx = du$

$dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u-1}$

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$

$1 \equiv A(u-1) + Bu$

$A+B=0$

$-A = 1 \Rightarrow A=-1$

$B=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \ln(1+e^n) - \ln(1+e^{n+1})\right]$$

$$S_n = \left[1 + \overbrace{\ln(1+1)}^{\ln 2} - \cancel{\ln(1+e)}\right] + \left[1 + \cancel{\ln(1+e)} - \cancel{\ln(1+e^2)}\right]$$

$$+ \left[1 + \cancel{\ln(1+e^2)} - \cancel{\ln(1+e^3)}\right] + \cdots + \left[1 + \cancel{\ln(1+e^{n-1})} - \cancel{\ln(1+e^n)}\right]$$

$$+ \left[1 + \cancel{\ln(1+e^n)} - \ln(1+e^{n+1})\right]$$

$$= (n+1)\cdot 1 + \ln 2 - \ln(1+e^{n+1}) = n + (1+\ln 2) - \ln(1+e^{n+1})$$

$$= n + (1+\ln 2) - \ln(1+e^{n+1})$$

$$= \ln e^n + (1+\ln 2) - \ln(1+e^{n+1})$$

$$= 1+\ln 2 + \ln\left[\frac{e^n}{e^{n+1}+1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\ln 2+\ln\left(\frac{e^n}{e^{n+1}+1}\right)\right]$$

$$= 1+\ln 2 + \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{e^n}{e^{n+1}+1}\right)$$

$$= 1+\ln 2 + \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}(e+e^{-n})}\right)$$

$$= 1+\ln 2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= 1+\ln 2 - 1$$

$$= \ln 2$$

Harmonik Seri

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine Harmonik seri denir.

Serinin karakteri ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots > \underbrace{1+\frac{1}{2}+\overbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}^{1/2}+\overbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}^{1/2}+\cdots}_{1+n\cdot\frac{1}{2}=S_{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \to \infty$$