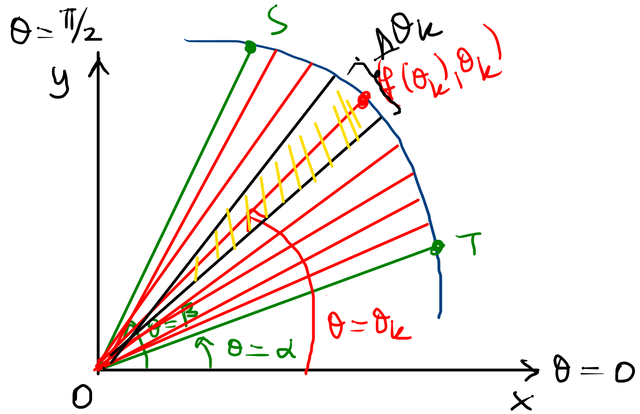
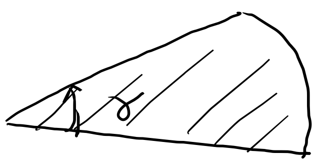
Kutupsal koordinatlarda alanlar ve uzunluklar





$\pi r^2 \cdot \frac{\gamma}{2\pi}$

TOS bölgesinin $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ ışınları ve $r=f(\theta)$ eğrisi ile sınırlı olduğunu kabul edelim. Bölgeye n tane üst üste binmeyen tabanları TOS açısının bir P bölünüşünün üzerinde olan pervane şekilli dairesel kesitle yaklaşımda bulunuruz. Bir kesitin yarıçapı $r_k = f(\theta_k)$ ve radyan olarak ölçülen merkez açısı $\Delta\theta_k$ dır. Dolayısıyla,

Bir kesitin alanı $\quad A_k = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 \Delta\theta_k$

şeklinde bulunur. TOS bölgesinin alanı ise yaklaşık olarak $\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k)]^2 \Delta\theta_k$ şeklinde hesaplanır. Eğer f sürekli ise o zaman P bölünüşünün normu sıfıra yaklaşırken bu yaklaşımların iyileşmesini bekleriz.

$$\|P\| = \max_{1\le k\le n} \Delta\theta_k$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k)]^2 \Delta\theta_k \Rightarrow \boxed{A = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta}$$

veya $\|P\|\to 0$ veya $\max_{1\le k\le n} \Delta\theta_k \to 0$ veya $\|P\|\to 0$ veya $\max_{1\le k\le n} \Delta\theta_k$

$r=f(\theta)$ $\alpha\le\theta\le\beta$ eğrisi ile orjin arasındaki bölgenin alanını veren integral

Ör/ $r = f(\theta) = 2(1+\cos\theta)$ kardioidiyle çevrili alanı hesaplayınız. $D(f)\big| = [-\pi, \pi]$

$D(f(\theta)) = \mathbb{R}$ ancak $\cos\theta$ fonksiyonu periyodik olduğundan $f(\theta)$ da periyodiktir ve $\cos\theta$'nın periyodu olan 2π'ye eşit uzunlukta bir aralıkta inceleme yapmak uygun olacaktır.

- $\theta \to -\theta \Rightarrow r = f(-\theta) = 2(1+\cos(-\theta))$
  $= 2(1+\cos\theta)$
  $= r$

Başlangıç ışını (x ekseni) simetri eksenidir.
İnceleme sadece +ve değerler için yapılır.

$[-\pi, \pi] \to [0, \pi]$

- $\theta \to \pi - \theta \Rightarrow r = f(\pi-\theta) = 2[1+\cos(\pi-\theta)]$
  $= 2[1-\cos\theta] \neq r$
  $\neq -r$

- $\theta \to \pi + \theta \Rightarrow r = f(\pi+\theta) = 2[1+\cos(\pi+\theta)]$
  $= 2[1-\cos\theta] \neq r$
  $\neq -r$

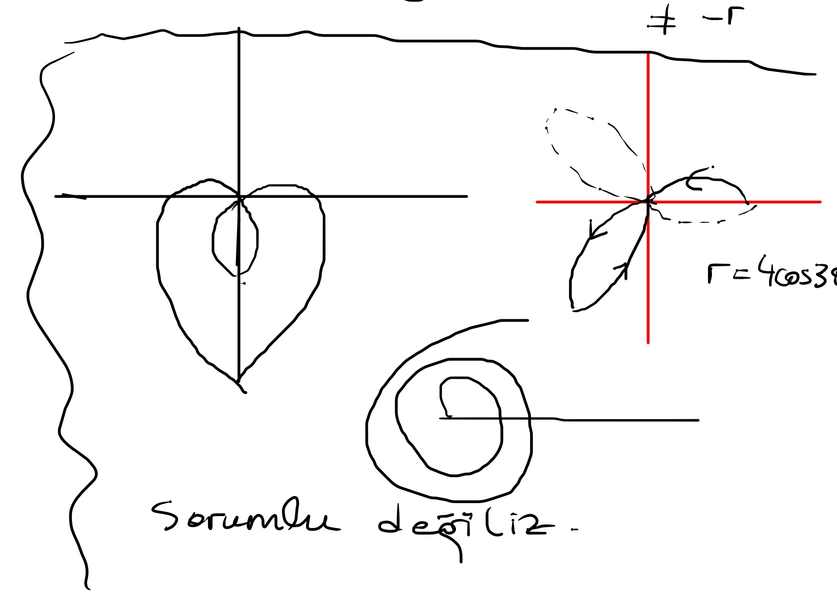
Simetri yok.

$r' = f'(\theta) = -2\sin\theta < 0$

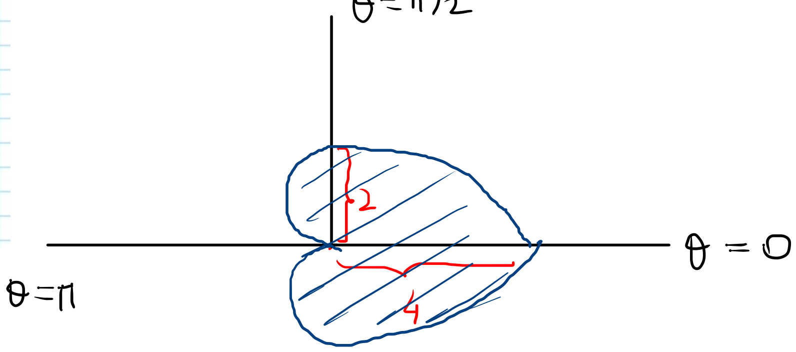
$r = 0 \Rightarrow 2(1+\cos\theta) = 0$
$\cos\theta = -1$
$\theta = \pi$

$\theta = 0 \Rightarrow r = 4$
$\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 2$
$\theta = \pi \Rightarrow r = 0$

θ	0		$\pi/2$		π
r'		$-$		$-$	
r	4	$\to$	2	$\to$	0



θ	0		$\pi/2$		π
r'		$-$		$-$	
r	4	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	0



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[2(1+\cos\theta)\right]^2 d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi} 4\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

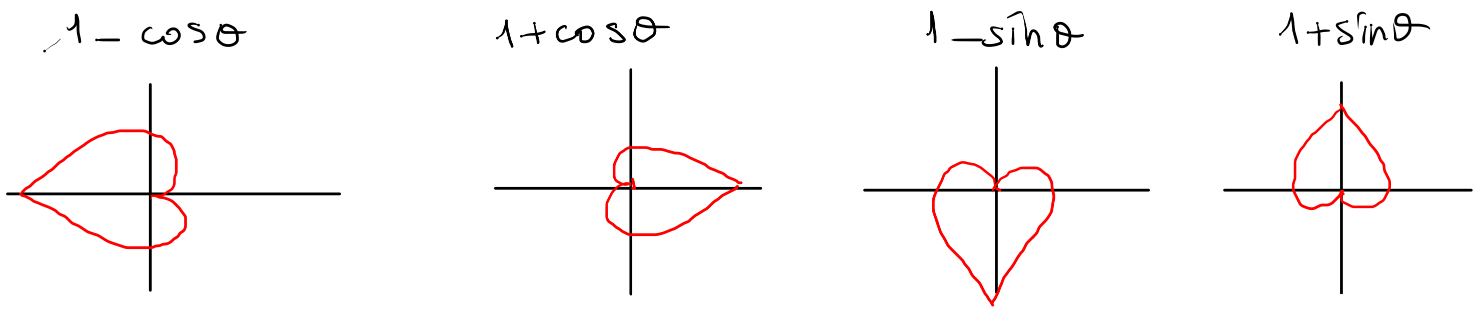
$$= 4\int_0^{\pi} d\theta + 8\int_0^{\pi}\cos\theta \, d\theta + 4\int_0^{\pi}\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 4\theta\Big|_0^{\pi} + 8\sin\theta\Big|_0^{\pi} + 4\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 4(\pi - 0) + 8\left(\cancel{\sin\pi - \sin 0}\right)^{0} + 2\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

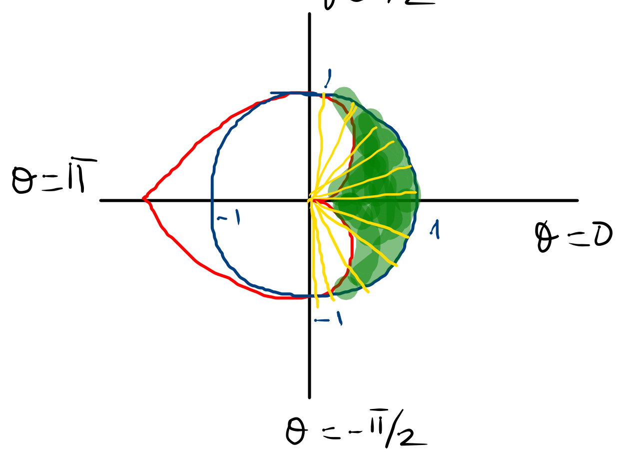
$$= 4\pi + 2\left[\pi + \cancel{\frac{1}{2}\sin 2\pi}^{\,0}\right]$$

$$= 6\pi \ br^2$$



4

Ör/ $r=1$ çemberinin içinde ve $r=1-\cos\theta$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[1^2-(1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$A=\int_0^{\pi/2}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+2\cos\theta-\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta-\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\left[\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$=2\left[\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\sin0\right]-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{0}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\underbrace{\sin0}_{0}\right)\right]$$

$$=2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=2-\frac{\pi}{4}\ \text{br}^2$$

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left(r_2^2-r_1^2\right)d\theta$$ } iki eğri arasındaki alan

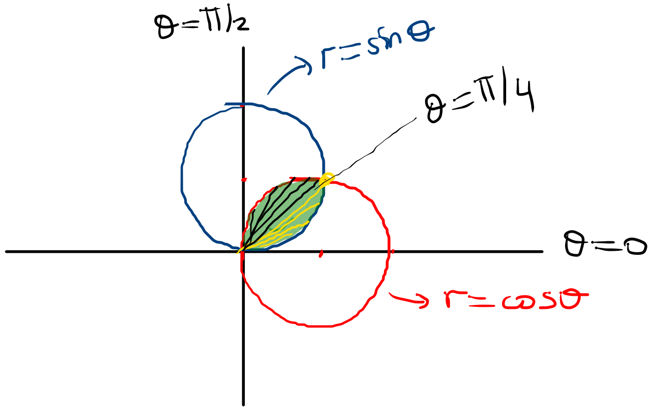
Ör/ $r=\cos\theta$, $r=\sin\theta$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$r=2a\cos\theta$, $r=2a\sin\theta$ } Çember

$2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$a \to$ yarıçapı.

Bu eğriler yarıçapları $\frac{1}{2}$ olan, orjinden geçen ve sırasıyla merkezleri x-ekseni (başlangıç ışını), y-ekseni ($\theta=\frac{\pi}{2}$ doğrusu) üzerinde olan çemberlerdir.



$$\sin\theta=\cos\theta$$

$$\tan\theta=1$$

$$\theta=\pi/4$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sin\theta)^2\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\cos2\theta\,d\theta+\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta+\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\theta}{4}\Big|_0^{\pi/4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_0^{\pi/4}+\frac{\theta}{4}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cancel{\sin0}^{\,0}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{16}\right)+\frac{1}{8}\left(\cancel{\sin\pi}^{\,0}-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=\frac{\pi-2}{8}\ \text{br}^2$$

Kutupsal eğrinin uzunluğu

$r=f(\theta)$ $\alpha \le \theta \le \beta$ eğrisinin uzunluğu için kutupsal koordinat formülü

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad \alpha \le \theta \le \beta \qquad \frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

$$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

parametrizasyonundan yararlanılarak

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2 + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2\cos^2\theta - \cancel{2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta\sin\theta} + [f(\theta)]^2\sin^2\theta + [f'(\theta)]^2\sin^2\theta + \cancel{2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta} + [f(\theta)]^2\cos^2\theta}\, d\theta$$

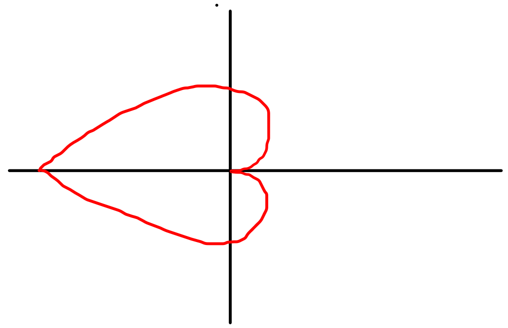
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\theta$$

elde edilir.

Ör/ $r = 1 - \cos\theta$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$r' = \sin\theta$



$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

$1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta$

$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$\frac{s}{2} = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos\theta}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= -2 \cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} \Rightarrow \frac{s}{2} = -4\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0} - \cos 0\right)$$

$$\frac{s}{2} = 4 \Rightarrow s = 8 \text{ br}$$

Ör/ $r = 1$ çemberinin uzunluğunu bulunuz.

$r' = 0$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + 1^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi \text{ br}$$