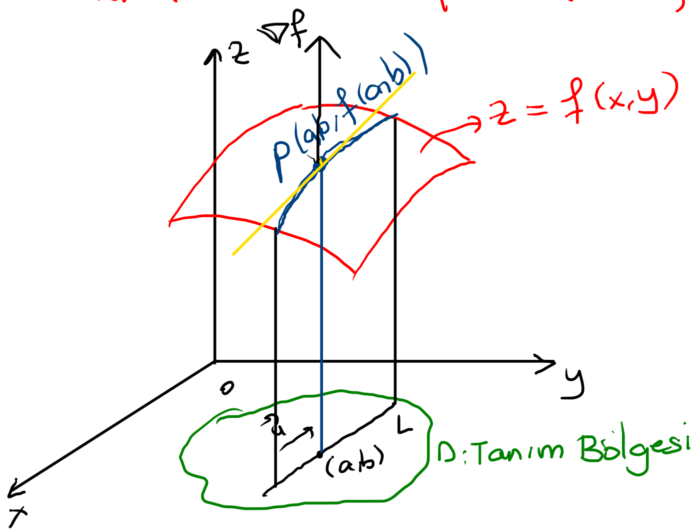
Yönlü Türev (Doğrultu Türevi)



$f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasında $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektörü yönündeki türevi

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu_1, b+tu_2) - f(a,b)}{t} = \frac{d}{dt}\left[f(a+tu_1, b+tu_2)\right]\Big|_{t=0}$$

Ör/ Tanımı kullanarak $(1,2)$ noktasında $f(x,y) = x^2 + xy$ fonksiyonunun $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ birim vektörü yönündeki türevini bulunuz.

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}, 2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left[\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] - 3}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1} + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} + \cancel{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} \cancel{-3}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{5t}{\sqrt{2}} + t^2}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + t\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$z = f(x,y)$

$c = f(x,y)$

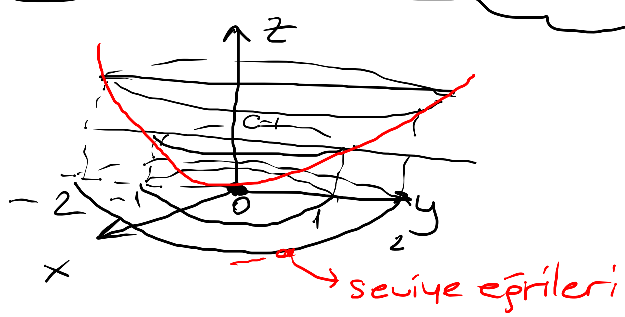
$z = x^2 + y^2$

$c = x^2 + y^2$

$c = 0$

$c = 1$

$c = 2$



Yönlü türevin Gradyen ile hesabı

Eğer f fonksiyonu (a,b) noktasında türevlenebilir ve $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ bir birim vektör ise o zaman f fonksiyonunun (a,b) noktasında u vektörü yönündeki türevi

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}$$

NOT: Birinci mertebe kısmi türevler koordinat eksenleri yönündeki yönlü türevlerdir.

Geometrik özellikler

- $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında gradyen vektör yönünde en hızlı şekilde artar. Artımın maksimum oranı gradyen vektörün modülüne eşittir. $D_{\nabla f} f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$

- $f(x,y)$ fonksiyonu (a,b) noktasında gradyen vektörün ters yönünde en hızlı şekilde azalır. Azalmanın maksimum miktarı yine gradyen vektörün modülüne eşittir. $D_{-\nabla f} f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$

- $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasından geçen düzey eğrisinin teğeti yönündeki değişim oranı sıfırdır.

$$D_{\vec{T}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{T} = 0 \qquad \nabla f \perp \hat{T}$$

↳ Teğet birim vektör.

Örnekler

1) $f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktasında

a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

$z = f(x,y)$

b) $\vec{v} = \vec{j} - 2\vec{i}$

c) $\vec{s} = 3i$

d) $\vec{t} = \vec{i} + \vec{j}$

vektörleri yönlerindeki türevini bulunuz.

$$\nabla f(x,y) = (2y^3 + 2xy^2)\vec{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\vec{j}$$

$$\nabla f(0,1) = 2\vec{i} + 4\vec{j}.$$

$$|\nabla f(0,1)| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

a) $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{\vec{i}}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

$$D_{\vec{u}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \nabla f(0,1) \cdot \vec{\hat{u}}$$

$$= (2\vec{i} + 4\vec{j})\left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = |\nabla f|$$

b) $\hat{\vec{v}} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{j}-2\vec{i}}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{\vec{j}}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}$

$$D_{\vec{v}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \nabla f(0,1) \cdot \hat{\vec{v}}$$

$$= (2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \left(\frac{\vec{j}}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}\right)$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = 0$$

c) $\vec{s} = 3\vec{i}$ $\quad \hat{s} = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \dfrac{3\vec{i}}{\sqrt{9}} = \vec{i}$

$$D_{\vec{s}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \nabla f(0,1) \cdot \hat{s}$$

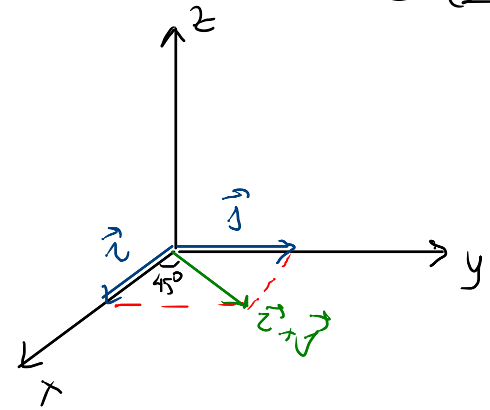
$$= (2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \vec{i}$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

d) $\vec{t} = \vec{i} + \vec{j}$ $\quad \hat{t} = \dfrac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$

$$D_{\vec{t}} f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \nabla f(0,1) \cdot \hat{t}$$

$$= (2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$



2) $f(x,y) = x \cdot e^{y} + \cos(xy)$ fonksiyonunun $(2,0)$ noktasında $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevini hesaplayınız.

$$\nabla f(x,y) = [e^{y} - y\sin(xy)]\,\vec{i} + [x e^{y} - x\sin(xy)]\,\vec{j}$$

$$\nabla f(2,0) = [1-0]\,\vec{i} + [2-0]\,\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$D_{\vec{v}} f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= (\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot \frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{\sqrt{9+16}} = \frac{3-8}{5} = -1$$

NOT

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u} = |\nabla f(a,b)| \underbrace{|\vec{u}|}_{=1} \cdot \cos\theta = |\nabla f(a,b)| \cdot \cos\theta$$

$\vec{u}$ → birim vektör

3) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasında türevinin

a) en çok artan
b) en çok azalan
c) sıfır değişiminin

} yönlerini bulunuz.

$\nabla f(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \nabla f(1,1) = \vec{i} + \vec{j}$

a) $\vec{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{|\vec{i}+\vec{j}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

b) $\vec{v} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-(\vec{i}+\vec{j})}{|\vec{i}+\vec{j}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

c) $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} \to \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \frac{-\vec{s}}{|\vec{s}|} \Rightarrow \underbrace{D_{\vec{s}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \left(\mp \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}\right)}_{=0}$

$\vec{t} = -\vec{i} + \vec{j} \to \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|}, \frac{-\vec{t}}{|\vec{t}|} \Rightarrow \underbrace{D_{\vec{t}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \left(\mp \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|}\right)}_{=0}$

4) **NOT:** Düzlemdeki bir yön kutupsal bir açıyla belirlenebilir. Eksenin pozitif yönüyle θ açısı yapan yön $u_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ birim vektörüne karşılık gelir.

$f(x,y) = x^2+2x+3y^2$ fonksiyonunun $\theta=\frac{\pi}{3}$ yönündeki türevinin $(1,\sqrt{3})$ noktasındaki değerini bulunuz.

$\vec{u}_\theta = \cos\frac{\pi}{3}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{3}\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ $\qquad \nabla f(x,y) = (2x+2)\vec{i} + 6y\vec{j} \Rightarrow \nabla f(1,\sqrt{3}) = 4\vec{i} + 6\sqrt{3}\vec{j}$

$D_{\vec{u}_\theta} f(1,\sqrt{3}) = \nabla f(1,\sqrt{3}) \cdot \vec{u}_\theta = (4\vec{i}+6\sqrt{3}\vec{j}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) = 2+9 = 11$

5) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ fonksiyonu için $\qquad u = x^2+y^2+z^2$

a) $\nabla f(x,y,z) = ?$

$\nabla f(1,-1,2) = ?$

b) f'in $(1,-1,2)$ noktasındaki maksimum artış oranını bulunuz.

c) $x^2+y^2+z^2=6$ küresinin $(1,-1,2)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

d) f'in $(1,-1,2)$'de, bu noktadan $(3,1,1)$ noktasına doğru ölçülen yöndeki değişim oranını bulunuz.

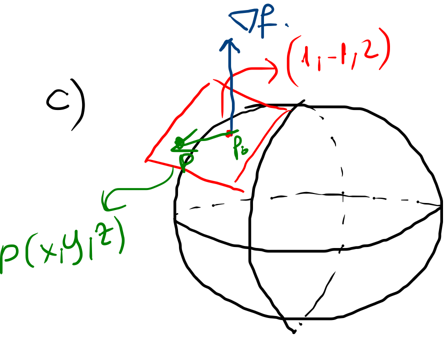
a) $\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

$\nabla f(1,-1,2) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $D_{\nabla f} f(1,-1,2) = |\nabla f(1,-1,2)|$

$= \sqrt{4+4+16}$

$= 2\sqrt{6}$

c) 

$$\vec{P_0P} = (x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-2)\vec{k}$$

$$\nabla f \perp \vec{P_0P} \Rightarrow \nabla f(1,-1,2)\cdot \vec{P_0P} = 0 \Rightarrow (2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})\left[(x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + (z-2)\vec{k}\right] = 0$$

$$2(x-1) - 2(y+1) + 4(z-2) = 0$$

$$2x - 2y + 4z = 12$$

d) $\vec{u} : (1,-1,2) \to (3,1,1)$

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$D_{\vec{u}} f(1,-1,2) = \nabla f(1,-1,2) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$= (2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot \frac{(2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4-4-4}{3} = \frac{-4}{3}$$

6) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z$ fonksiyonunun $M(1,2,0)$ noktasını $N(2,4,2)$ noktasına birleştiren $\vec{MN}$ vektörü yönündeki doğrultu türevinin M noktasındaki değerini bulunuz.

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\nabla f(1,2,0) = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{MN} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

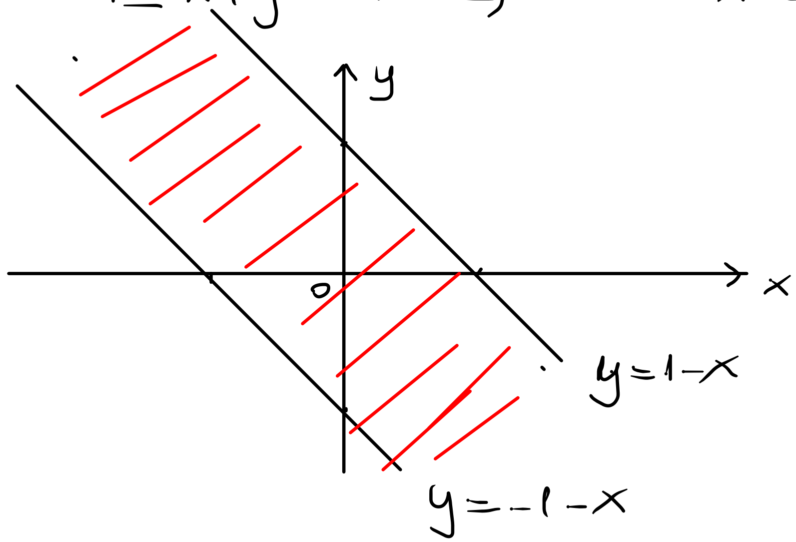
$$D_{\vec{MN}} f(1,2,0) = \nabla f(1,2,0) \cdot \frac{\vec{MN}}{|\vec{MN}|} = (2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}}$$

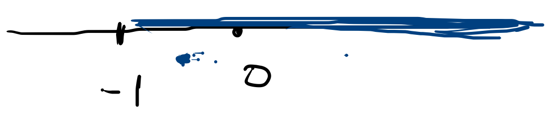
$$= \frac{24}{3} = 8$$

Uygulama

1) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup düzlemde gösteriniz.

$-1 \le x+y \le 1 \Rightarrow -1-x \le y \le 1-x$





2) $z = \ln(1+xy)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup düzlemde gösteriniz.

$1+xy>0 \Rightarrow xy>-1$

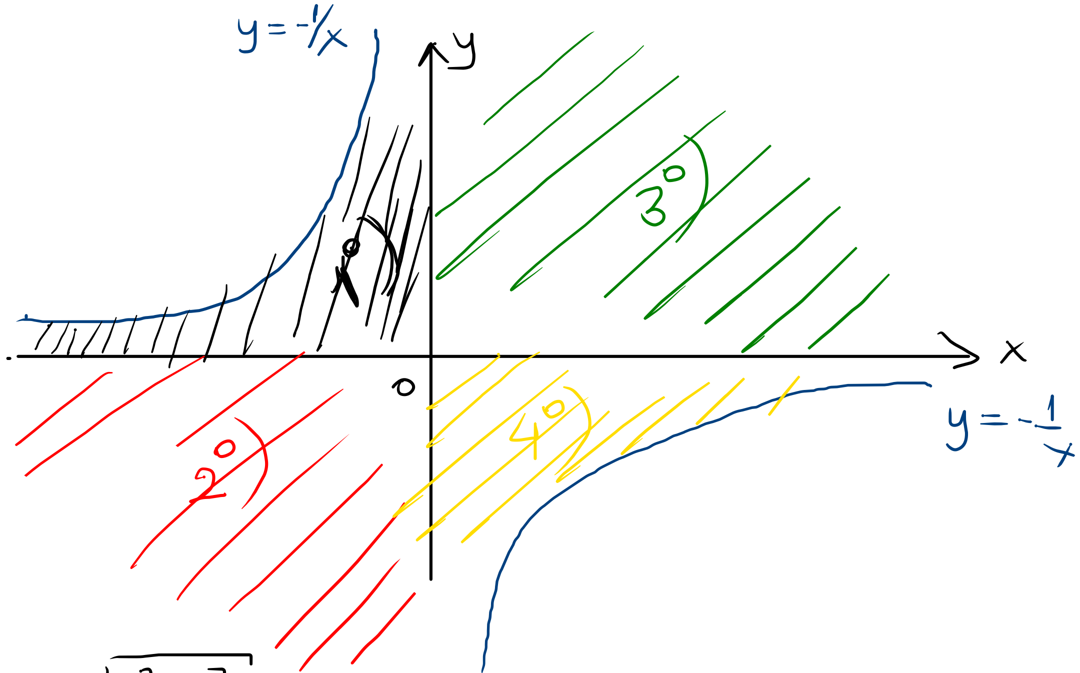
$y > -\frac{1}{x}$

1°) $x<0,\ y>0 \quad xy>-1$

2°) $x<0;\ y<0 \quad x.y>-1$

3°) $x>0,\ y>0\ ,\ x.y>-1$

4°) $x>0\ ,\ y<0\ ,\ xy>-1$



3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu sürekli midir?

$f(0,0) = \frac{1}{2}$ Tanımlı.

$x^2+y^2 = u^2 \qquad u \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2} = f(0,0)$$ sürekli.