Ör/ $z=f(x,y)=x^2+3xy+y+1$
fonksiyonunun $(4,-5)$ noktasında

$\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ türevlerini bulunuz.

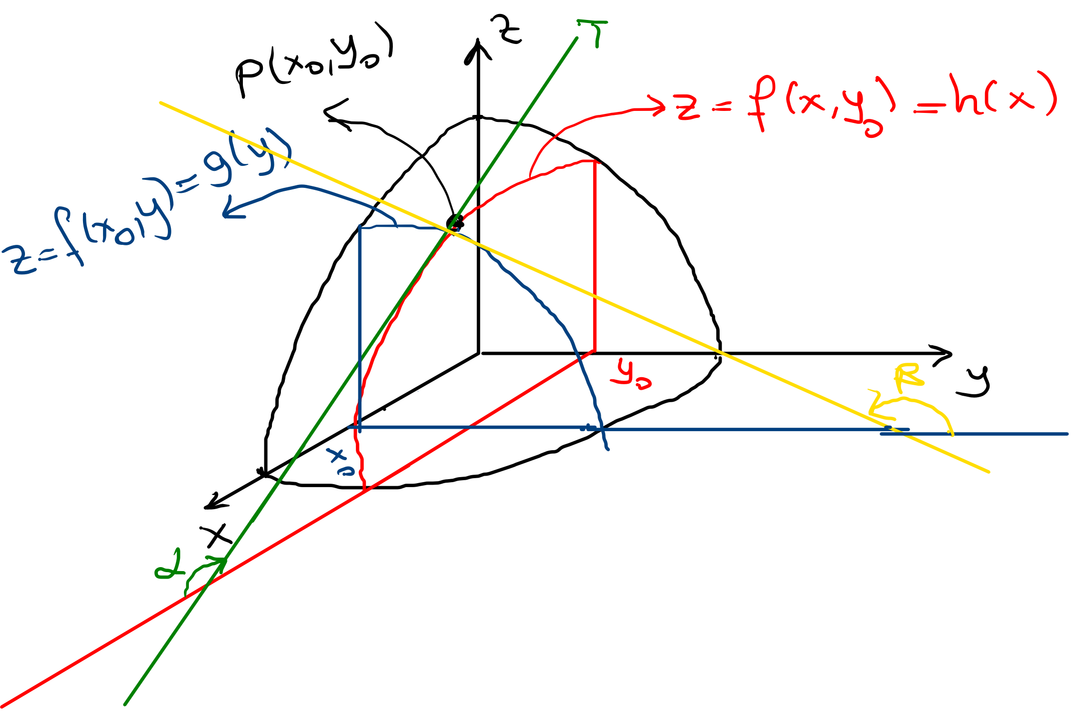
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3x+1$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(4,-5)}=8-15=-7 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(4,-5)}=12+1=13$$

Ör/ $u(x,y,z)=\dfrac{2xy}{1+xz+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial z}=?$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-x\cdot 2xy}{(1+xz+y^2)^2}=\frac{-2x^2y}{(1+xz+y^2)^2}$$

Kısmi türevin geometrik anlamı

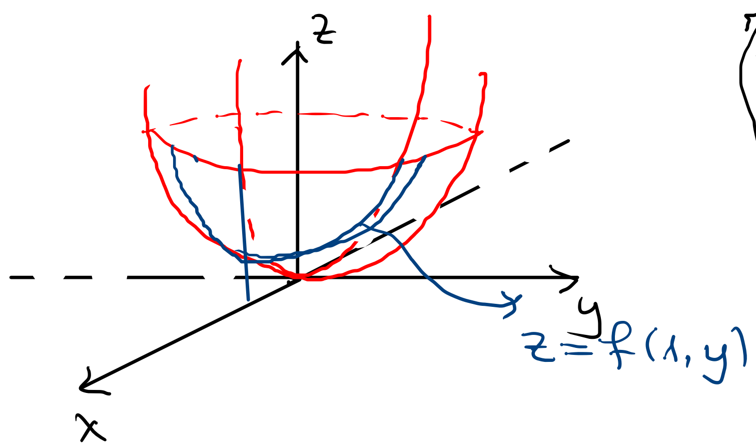


$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dh}{dx} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\tan\alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dg}{dy} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\tan\beta$$

$z=f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonu üç boyutlu uzayda bir S yüzeyi gösterir. Bu yüzey üzerindeki bir nokta $P(x,y,z)$ olsun. Bu yüzey denkleminde $y=y_0$ alarak y değişkenini sabit yaparsak elde edilen $z=f(x,y_0)=h(x)$ tek değişkenli fonksiyonu S yüzeyi üzerinde P noktasından geçen oxz düzlemine paralel olan bir eğrinin denklemidir. Benzer şekilde $x=x_0$ alarak x değişkenini sabit yaparsak elde edilen $z=f(x_0,y)=g(y)$ tek değişkenli fonksiyonu da S yüzeyi üzerinde P noktasından geçen ve oyz düzlemine paralel olan bir eğrinin denklemi olacaktır. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri sırasıyla $z=f(x,y_0)=h(x)$ ve $z=f(x_0,y)=g(y)$ eğrilerinin P noktasındaki türevleri olduğundan, bu kısmi türevlerin geometrik anlamları, bu eğrilerin P noktasındaki teğetlerinin eğimi olur.

Ör/ $x=1$ düzlemi $z=x^2+y^2$ paraboloidi ile bir parabolde kesişmektedir. $(1,2,5)$ noktasında parabolün teğetinin eğimini bulunuz.



$z=1+y^2=g(y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dg}{dy}=2y \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2,5)}=2.2=4$$

İki değişkenli fonksiyonlarda ortalama değer teoremi (sonlu artımlar)

$z=f(x,y)$ fonksiyonu ve $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsunlar. D bölgesinde bir $P(a,b)$ noktasını alalım. P noktasının bir δ komşuluğu $(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2 \in D$ ise $x-a=\Delta x$ $y-b=\Delta y$ ve $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$ olmak üzere

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a,b)=f'_x(a+\theta_1\Delta x, b)\cdot\Delta x+f'_y(a+\Delta x, b+\theta_2\Delta x)\Delta y$$

dir.

İSPAT: $\Delta z=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a,b)$

ifadesine $f(a+\Delta x, b)$ değerini ekleyip, çıkaralım.

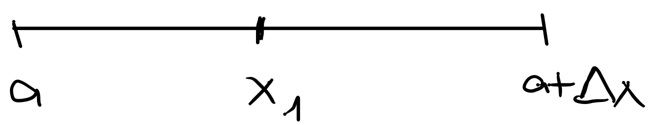
$$\Delta z=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a,b)+f(a+\Delta x,b)-f(a+\Delta x,b)$$

$$=\left[f(a+\Delta x,b)-f(a,b)\right]+\left[f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a+\Delta x,b)\right] \quad (1)$$

Bu eşitlikteki ilk parantez $y=b$ sabit alarak $f(x,b)$ fonksiyonunun $x=a$ noktası civarındaki bir değişimidir. İkinci parantez ise $x=a+\Delta x$ şeklinde sabit alarak $f(a+\Delta x, y)$ fonksiyonunun $y=b$ noktası civarındaki bir değişimdir.

$f(x,b)$ ve $f(a+\Delta x, y)$ tek değişkenli fonksiyonlarına sırasıyla $[a, a+\Delta x]$ ve $[b, b+\Delta y]$ kapalı aralıklarında ortalama değer teoremini uygulayabiliriz.

Çünkü bu fonksiyonlar bu aralıklarda sürekli ve türevleri mevcuttur.



$0 < \theta_1 < 1$

$x_1 = a + \theta_1 \Delta x$

$$\frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x} = f'_x(x_1, b)$$

$$f(a+\Delta x, b) - f(a,b) = f'_x(x_1, b)\,\Delta x$$

$$f(a+\Delta x, b) - f(a,b) = f'_x(a+\theta_1 \Delta x, b)\,\Delta x \qquad (2)$$

$0 < \theta_2 < 1$

$y_1 = b + \theta_2 \Delta y$

$$\frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b)}{\Delta y} = f'_y(a+\Delta x, y_1)$$

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b) = f'_y(a+\Delta x, y_1)\cdot \Delta y$$

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b) = f'_y(a+\Delta x, b+\theta_2 \Delta y)\,\Delta y \qquad (3)$$

(2) ve (3) (1)'de yerine yazılırsa

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = f'_x(a+\theta_1 \Delta x, b) . \Delta x + f'_y(a+\Delta x, b+\theta_2 \Delta y)\Delta y$$

elde edilir. ■

Ör $f(x,y) = x^2+y^2+x^3$ fonksiyonuna $P(1,2)$ noktasında ortalama değer teoremini uygulayınız ve teoremi sağlayan θ_1, θ_2 sayılarını bulunuz.

$$f(1+\Delta x, 2+\Delta y) - f(1,2) = (1+\Delta x)^2 + (2+\Delta y)^2 + (1+\Delta x)^3 - 6$$

$$= \cancel{1} + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + \cancel{4} + 4\Delta y + (\Delta y)^2 + \cancel{1} + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{6}$$

$$= 5\Delta x + 4(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4\Delta y + (\Delta y)^2$$

$$f'_x = 2x + 3x^2 \qquad f'_y = 2y$$

$$f'_x(1+\theta_1\Delta x, 2) = 2(1+\theta_1\Delta x) + 3(1+\theta_1\Delta x)^2 = 2 + 2\theta_1\Delta x + 3(1 + 2\theta_1\Delta x + (\theta_1\Delta x)^2$$

$$= 2 + 2\theta_1\Delta x + 3 + 6\theta_1\Delta x + 3(\theta_1\Delta x)^2$$

$$f'_y(1+\Delta x, 2+\theta_2\Delta y) = 2(2+\theta_2\Delta y) = 4 + 2\theta_2\Delta y$$

$$\Rightarrow \quad 5\Delta x + 4(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4\Delta y + (\Delta y)^2 = \left[2 + 2\theta_1 \Delta x + 3 + 6\theta_1 \Delta x + 3(\theta_1 \Delta x)^2\right]\Delta x$$

$$+ \left[4 + 2\theta_2 \Delta y\right]\cdot \Delta y$$

$$\cancel{5\Delta x} + 4(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4\Delta y + (\Delta y)^2 = \cancel{2\Delta x} + 2\theta_1(\Delta x)^2 + \cancel{3\Delta x} + 6\theta_1(\Delta x)^2 + 3\theta_1^2(\Delta x)^3$$

$$+ 4\Delta y + 2\theta_2(\Delta y)^2$$

$$\Delta x\left[4\Delta x + (\Delta x)^2\right] + \Delta y\left[4 + \Delta y\right] = \Delta x\left[8\theta_1 \Delta x + 3\theta_1^2(\Delta x)^2\right] + \Delta y\left[4 + 2\theta_2 \Delta y\right]$$

$$8\theta_1 \Delta x + 3\theta_1^2(\Delta x)^2 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$3(\Delta x)^2\theta_1^2 + 8\theta_1\Delta x - \left[4\Delta x + (\Delta x)^2\right] = 0$$

$$\theta_1 = \frac{-8\Delta x \mp \sqrt{64(\Delta x)^2 + 12(\Delta x)^2\left[4\Delta x + (\Delta x)^2\right]}}{6(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{-2 \mp \sqrt{16 + 3\left(4\Delta x + (\Delta x)^2\right)}}{3\Delta x} \Rightarrow$$

$$\cancel{4} + \Delta y = \cancel{4} + 2\theta_2 \Delta y$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{1}{2}$$

$0 < \theta_1 < 1$ olduğundan

$$\theta_1 = \frac{-2 + \sqrt{16 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2}}{3\Delta x}$$

Kısmi Türevler ve Süreklilik

Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasında türeve sahip ise bu noktada fonksiyon süreklidir. Ancak bu özellik kısmi türevler için geçerli değildir. Yani $z=f(x,y)$ fonksiyonunun $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri bir (a,b) noktasında mevcut olsa bile fonksiyon bu noktada sürekli olmayabilir.

Ör/

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(0,0)=0$ noktasında fonksiyonun kısmi türevlere sahip ama süreksiz olduğunu gösterelim.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$f(0,0)=0$ ✓

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}k}{\cancel{x^2}(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2}$$

k'nın her farklı değeri için sonuç değişeceğinden fonk. (0,0)'da limite sahip değildir. Dolayısıyla süreksizdir.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler

Çok değişkenli fonksiyonların kısmi türevleri de yine aynı değişkenlerin birer fonksiyonu olacaklarından bunların da kısmi türevleri alınabilir.

$$z = f(x,y)$$

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$
  - $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = f'''_{xxy}(x,y)$
  - $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = f'''_{xyy}(x,y)$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$
  - $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{yxx}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = f'''_{yxy}(x,y)$
  - $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f'''_{yyx}(x,y)$
    - $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = f'''_{yyy}(x,y)$

Ör/ $u=\ln\frac{x^2+y^2}{z}-z\arctan\frac{y}{x}$ $\qquad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{2x}{z}}{\frac{x^2+y^2}{z}}-z\cdot\frac{\left(-\frac{y}{x^2}\right)}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{yz}{x^2+y^2}=\frac{2x+yz}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{y(x^2+y^2)-0.(2x+yz)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Ör/ $z=y^2+xy\ln(xy)\Rightarrow y.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(xy)+xy.\frac{y}{xy}=y\ln(xy)+y=\boxed{y.[\ln(xy)+1]}\rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y.\frac{y}{xy}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x\ln(xy)+xy\frac{x}{xy}=2y+x[\ln(xy)+1]\rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[\ln(xy)+1]+\cancel{x}.\frac{y}{\cancel{xy}}$$

$$=\ln(xy)+2$$

$$y\cdot\left[\ln(xy)+2\right]-x\cdot\frac{y}{x}=y\ln(xy)+2y-y$$

$$=y\ln(xy)+y$$

$$=y\left[\ln(xy)+1\right]=\frac{\partial z}{\partial x}$$

Ör/ $f(x,y)=x^3y^4$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^4\rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=12x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3\rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12x^2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^3y^2$$

Ör/ $f(x,y)=x\cos y+e^xy$ fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos y+ye^x\rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x\sin y+e^x\rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\cos y$$

Ör) $f(x,y,z)=e^{x-2y+3z}$ fonksiyonunun $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y^2}$ türevlerini bulunuz.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2e^{x-2y+3z} \to \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4e^{x-2y+3z} \longrightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y^2}=12e^{x-2y+3z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2e^{x-2y+3z} \to \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}=-6e^{x-2y+3z} \longrightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}=12e^{x-2y+3z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=3e^{x-2y+3z} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=-6e^{x-2y+3z} \longrightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}=12e^{x-2y+3z}$$

Son üç örnekte karışık türevler aynı değişkenlere göre fakat farklı sırada alınmalarına karşın birbirlerine eşittirler. Bu bir tesadüf değildir. Schwarz Teoremi ile açıklanabilir.

Schwarz Teoremi (Karışık Türevlerin Eşitliği)