Reel Sayılar Kümesinin Tamlığı ile İlgili Bazı Prensipler.

Tanım 41. $a \in \mathbb{R}$ noktası ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sayısı verilsin. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$ açık aralığına a noktasının ε-komşuluğu denir ve $U_\varepsilon(a)$ ile gösterilir. $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ kümesine de a'nın delinmiş ε-komşuluğu denir ve $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ ile gösterilir.

Örneğin, $U_{\frac{1}{2}}(0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\mathring{U}_{\frac{1}{2}}(0) = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

dır.

Tanım 42. $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ noktası verilsin. a'nın her $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ komşuluğunda E kümesinin en az bir elemanı varsa a noktasına E kümesinin bir limit (yığılma) noktası denir.

Örneğin; $E = [0,1]$ kümesinin her noktası $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$ kümelerinin bir limit noktasıdır. Tanımdan ve bu örnekten görüldüğü gibi bir kümenin limit noktası kümenin kendisine ait olmayabilir.

$\mathbb{R}$'nin her noktası $\mathbb{Q}$'nun bir limit noktasıdır.

$E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin yalnızca bir $0 \in \mathbb{R}$ limit noktası vardır.

Eğer, $a \in \mathbb{R}$ noktası E'nin bir limit noktası ise, her $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ komşuluğunda E'nin sonsuz sayıda elemanı vardır.

Tanım 43. $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.

(a) Eğer, $a \in E$ ve $U_\varepsilon(a) \subset E$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa a'ya E'nin bir iç noktası denir. E'nin tüm iç noktalarının kümesine E'nin içi denir ve E^{o} ile gösterilir.

(b) Eğer, $E^{o} = E$ ise E'ye $\mathbb{R}$'de bir açık küme denir.

Örnek.

(a) $a \in \mathbb{R}$ noktasının her $U_\varepsilon(a)$ komşuluğu bir açık kümedir. Gerçekten, herhangi $x \in U_\varepsilon(a)$ noktası verildiğinde $\delta = \varepsilon - |x-a| > 0$ sayısı ve $\forall y \in U_\delta(x)$ elemanı için

$$|y-a| \le |y-x| + |x-a| < \delta + |x-a| = \varepsilon$$

olduğundan $y \in U_\varepsilon(a)$ olur. Bu ise $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$ demektir.

(b) $\mathbb{R}$ içindeki her (a,b) $(a,b \in \mathbb{R})$ aralığı açık kümedir. Gerçekten, $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ve $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ olmak üzere $(a,b) = U_\varepsilon(x_0)$ yazabiliriz.

Tanım 44. $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.

(a) Eğer, E kümesinin her limit noktası E'nin bir elemanı ise, E'ye $\mathbb{R}$ de kapalı bir küme denir. Başka bir ifade ile, eğer $E^c = \mathbb{R} \setminus E$ kümesi bir açık küme ise, E'ye kapalı küme denir. E'nin limit noktalarının kümesi E' ile gösterilir.

(b) Eğer, $a \in E$ ve a noktası E nin bir limit noktası değilse, a'ya E'nin bir izole (yalıtık) noktası adı verilir.

Her $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığı kapalı kümedir. Çünkü, $[a,b]$ nin tümleyeni olan $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ kümesi iki açık kümenin birleşimi olmak üzere açık kümedir.

$a=2$ noktası $E = [-1,1] \cup \{2\}$ kümesinin izole noktasıdır. Gerçekten her $0<\delta<1/2$ sayısı için $E \cap U_\delta(2) = \{2\}$ olduğundan $2 \in E$ noktası E'nin limit noktası olamaz.

Tanım 45- Tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan her f fonksiyonuna dizi adı verilir. O halde, bir dizi $f: \mathbb{N} \to X$ şeklinde bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f: n \to x_n = f(n) \in X$ yazılabilir. $x_n = f(n) \in X$ elemanına dizinin genel terimi (veya n. terimi) adı verilir ve bu dizi kısaca (x_n) ile gösterilir. $X \subset \mathbb{R}$ durumunda $f: n \to x_n = f(n) \in X$ dizisine reel sayı dizisi adı verilir.

$\{x_n : n = 1, 2, \cdots\}$ kümesine (x_n) dizisinin değer kümesi denir ve $R(x_n)$ ile gösterilir. Bir dizinin değer kümesi sonlu veya sonsuz bir küme olabilir. Örneğin,

$x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$; $y_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ dizileri için sırası ile

$$R(x_n) = \{-1, 1\}, \quad R(y_n) = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, 2n, \frac{1}{2n+1}, \cdots\right\}$$

dir.

Tanım 46. $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin,

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi üstten sınırlıdır denir. b sayısına da (x_n) dizisinin bir üst sınırı adı verilir.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a \leq x_n$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi alttan sınırlıdır denir. a sayısına da (x_n) dizisinin bir alt sınırı adı verilir.

(c) Hem alttan hem de üstten sınırlı olan bir diziye sınırlı dizi denir.

Başka bir ifade ile, eğer, $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisinin $R(x_n)$ değer kümesi üstten (alttan) sınırlı bir küme ise (x_n) dizisine üstten (alttan) sınırlı dizi adı verilir. $R(x_n)$ kümesi sınırlı ise (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Örneğin,

(a) $x_n = 2 + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi sınırlıdır.

(b) $x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi üstten sınırlıdır.

(c) $x_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisi alttan sınırlıdır.

Tanım 47. $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$, $(x_n \leq x_{n+1})$ ise (x_n) dizisine artan (azalmayan) dizi;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$, $(x_n \geq x_{n+1})$ ise (x_n) dizisine azalan (artmayan) dizi;

(c) Artan veya azalan (azalmayan veya artmayan) bir diziye monoton dizi denir.

Tanım 48. $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. (n_k), $\mathbb{N}$ içinde terimleri $\forall k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ koşulunu sağlayan bir dizi olmak üzere (x_{n_k}) dizisine (x_n) dizisinin alt dizisi denir.

Örneğin, $(2k)$ ve $\left(\frac{1}{2k-1}\right)$ dizileri $\left(n^{(-1)^n}\right)$ dizisinin birer alt dizisidir. Gerçekten $x_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n_k = 2k$ için $x_{n_k} = 2k$ ve $n_k = 2k-1$ için $x_{n_k} = \frac{1}{2k-1}$ olduğu açıktır.

Her bir dizinin sonsuz sayıda alt dizisi vardır.

Tanım 49. $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ sayısı verilmiş olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_\varepsilon$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi a'ya yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{veya} \quad x_n \to a \ (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir.

(x_n) yakınsaktır $\iff \exists a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki, $\forall n > n_\varepsilon$ için $|x_n - a| < \varepsilon$'dur.

(x_n) ıraksaktır $\iff \forall a \in \mathbb{R}$ için $\exists \varepsilon > 0$ öyle ki, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ için $|x_n - a| \geq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n > n_0$ doğal sayısı vardır.

Teorem 7: Monoton artan ve üstten sınırlı her (x_n) reel sayı dizisi yakınsaktır, ayrıca $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup R(x_n)$ dir.

Teorem 8: Monoton azalan ve alttan sınırlı her (x_n) reel sayı dizisi yakınsaktır, ayrıca $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf R(x_n)$ dir.

Tanım 50: $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m > n_\varepsilon$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

$\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir

$\iff \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$, $\forall m > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$ için $|x_n - x_m| < \varepsilon$'dur.

Teorem 9: $\mathbb{R}$ içindeki her yakınsak dizi aynı zamanda bir Cauchy dizisidir.

Teorem 10: Eğer, $\mathbb{R}$ içindeki bir Cauchy dizisinin bir alt dizisi $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsarsa, (x_n) dizisinin kendisi de a'ya yakınsar.

Teorem 19. $\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_n)'nin bir Cauchy dizisi olmasıdır. (Bu özelliğe Cauchy yakınsaklık kriteri denir)

Lemma 1 (Bolzano - Weierstrass Prensibi)

$\mathbb{R}$'nin sınırlı ve sonsuz elemanlı her alt kümesinin en az bir limit noktası vardır.

- Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

- LİMİT -

Birçok kavramlar (süreklilik, türev, integral v.s) ve yöntemler limit kavramına dayanmaktadır.

Reel Sayı Dizileri

Yakınsaklık, Iraksaklık ve Yakınsak Dizilerin Temel Özellikleri

Reel sayı dizisinin limiti ve buna bağlı bazı tanımları ve sonuçları inceledik. Verdiğimiz reel sayı dizilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığına ilişkin bazı tanımları tekrar ele alalım.

Tanım 51. $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisi a'ya yakınsıyor (veya (x_n) dizisinin limiti a dır) denir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{veya} \quad x_n \to a \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir. Yakınsak olmayan diziye ıraksaktır denir. Yani

(x_n) dizisi yakınsaktır $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \varepsilon$.

(x_n) dizisi ıraksaktır $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ için $\exists \varepsilon > 0$ öyleki $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ için $|x_n - a| \geq \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ sayısı vardır.

$\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ için $x \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$ olduğundan Tanım 51'e denk olan aşağıdaki tanımı da verebiliriz.

Tanım 52. a) (x_n) dizisi yakınsaktır $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ için (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri a noktasının $U_\varepsilon(a)$ komşuluğu içindedir.

b) (x_n) dizisi ıraksaktır $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ öyle ki (x_n) dizisinin sonsuz sayıdaki terimleri a noktasının $U_\varepsilon(a)$ komşuluğu dışındadır. (veya $\mathbb{R} \setminus U_\varepsilon(a)$ içindedir)

Örnek 1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm. Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için ε'na bağlı $\forall n > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$\left| \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısının bulunabileceğini göstermemiz gerekir. Buna göre,

$$\left|\frac{2n+1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{1}{3(3n+1)}\right| = \frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük (genel olarak herhangi) bir doğal sayının alınması yeterlidir.

$$\frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon \iff 3n+1 > \frac{1}{3\varepsilon} \iff 3n > \frac{1}{3\varepsilon}-1 \iff n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right)$$

dir. Eğer, $n_\varepsilon = \left[\!\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right)\right]\!\right]$ dersek her $n > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için ($\varepsilon > \frac{1}{12}$ iken $n_\varepsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$\left|\frac{2n+1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

olur. Buradan, istenen eşitliğin doğru olduğu elde edilir.

Örnek 2. $q \in \mathbb{R}$, $|q|<1$ için $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: Eğer $q=0$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q^n = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olur. $0<|q|<1$ olsun.

$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n$ olduğundan, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $n > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|q|^n < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısının seçilmesi yeterlidir. $0<a<1$ olmak üzere $y = \log_a x$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalan olduğundan

$$|q|^n < \varepsilon \Rightarrow \log_{|q|}(|q|^n) > \log_{|q|}\varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \log_{|q|}\varepsilon$$

bulunur. Buradan da $n_\varepsilon = [\![\log_{|q|} \varepsilon]\!]$ dersek, $\forall n > n_\varepsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için ($\varepsilon \le |q|$ için $n_\varepsilon = 0$ olduğundan, $\forall n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) için) $|q|^n < \varepsilon$ olur. Tanım 51 e göre de $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ elde edilir.

Örnek 3. n. terimi $x_n = n^{(-1)^n}$ şeklinde verilen

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \ldots, 2k, \frac{1}{2k+1}, \ldots$$

dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Herhangi $a \neq 0$ sayısı x_n dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ olmak üzere (x_n) dizisinin $\frac{1}{2k+1} < \frac{|a|}{2}$ olacak şekilde bütün terimleri $a \neq 0$ noktasının $U_\varepsilon(a)$ komşuluğu dışında bulunmaktadır.

$a = 0$ noktasıda (x_n) dizisinin bir Limiti oLamaz. Çünkü, $a = 0$ noktasının, örneğin $U_1(0)$ komşuluğunun dışında (x_n) dizisinin sonsuz sayıda terimleri (çift indisli terimleri) bulunmaktadır. Tanım 52 (b) gereğince (x_n) dizisi ıraksaktır.

Tanım 53: $\mathbb{R}$ içinde (x_n) ve (y_n) dizileri verilmiş olsun. $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ olduğunda $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisine sırası ile (x_n) ve (y_n) dizilerinin toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü denir ve $(x_n) + (y_n)$, $(x_n) - (y_n)$, $(x_n)(y_n)$, $\frac{(x_n)}{(y_n)}$ şeklinde gösterilir.

Yakınsak dizilerin aşağıdaki özelliklerini verebiliriz.

Teorem 12.

(1) $\mathbb{R}$ içinde yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır.

(2) $\mathbb{R}$ içinde yakınsak her dizi sınırlıdır.

(3) $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ ve $a \neq 0$ ise, $\forall n > n_a$ için $|z_n| > \frac{|a|}{2}$ olacak şekilde $n_a \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(4) $\mathbb{R}$ içinde (x_n) ve (y_n) dizileri yakınsak ve

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ ise

$(x_n \mp y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ ve $b \neq 0$ ise $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizileri de

yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} (x_n \mp y_n) = a \mp b$

$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a.b$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ 'dir.

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$

(veya $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$) için

$a_n \leq b_n$ ise $a \leq b$ dir.

(6) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$

(veya $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$) için

$a_n \leq c_n \leq b_n$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ dır. (Sandaviç Teoremi)

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ve $a<b$ ise, $\forall n > n_0$ $(n\in\mathbb{N})$ için $a_n < b_n$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ dır.

NOT: (2), (4) ve (8) özelliklerinin tersi genelde doğru değildir.

Gerçekten (2) durumunda n. terimi $x_n = \frac{1}{2}[1+(-1)^n]$ şeklinde verilen (x_n) dizisi sınırlıdır. Çünkü $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0 \leq x_n \leq 1$ dir. Fakat bu dizi ıraksaktır.

(4) durumunda n. terimi $x_n = (-1)^n$ ve $y_n = (-1)^{n-1}$ şeklinde verilen ıraksak (x_n) ve (y_n) dizileri için

$$x_n + y_n = 0, \quad x_n - y_n = 2, \quad x_n \cdot y_n = \frac{x_n}{y_n} = -1$$

olduğundan elde edilen bu diziler yakınsaktır.

(8) durumunda ise $x_n = (-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$ ıraksak dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ dir.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+7n}{4n^2-1}$ limitini bulunuz.

$$x_n = \frac{3n^2+7n}{4n^2-1} = \frac{\cancel{n^2}(3+\frac{7}{n})}{\cancel{n^2}(4-\frac{1}{n^2})} = \frac{3+\frac{7}{n}}{4-\frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+7/n}{4-1/n^2} = \frac{3}{4}$$

Ör/ $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\forall n \geq 6$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$0 < \left(\frac{3}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğin sol ve sağ tarafındaki dizilerin limitleri sıfır olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Sandaviç Teoremine göre $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^n} = 0$ 'dır.

Ör/ $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$ limitini hesaplayınız.

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{(\sqrt{n^2+n} + n)}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})} + n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n}$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right]}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Ör/ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu gösteriniz.

$\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$ alalım. O halde $\alpha_n \geq 0$ ve $\forall n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n$$
$$\geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

dir. $\forall n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için $n-1 \geq \frac{n}{2}$ olduğundan, son eşitsizlikten $n \geq \frac{n^2\alpha_n^2}{4}$ dolayısıyla $0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$ olduğu görülür. Buna göre $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+\alpha_n) = 1$$

bulunur.

Bazı önemli Limitler

1) Eğer $x>0$ ise $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$

2) Eğer $|x|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

3) Her $\alpha>0$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

4) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

6) $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

7) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

8) $a>1$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$

$a>1$ ve $p \in \mathbb{N}$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^p} = \infty$

Sonsuz küçük ve Sonsuz Büyük Diziler

Tanım 54: $\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisinin limiti sıfır ise, (x_n) dizisine sonsuz küçük bir dizi adı verilir.

Tanım 55- $\mathbb{R}$ içinde bir (x_n) dizisi verilsin.

(a) Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n| > \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine sonsuz büyük bir dizi denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{veya} \quad x_n \to \infty \ (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir.

(b) Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n > n_\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $x_n > \varepsilon$ $(x_n < -\varepsilon)$ olacak şekilde ε'na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisinin limiti $+\infty$ $(-\infty)$ dur denir.

Teorem 13. $a \in \mathbb{R}$ sayısının (x_n) dizisinin limiti olması için gerek ve yeter koşul terimleri $\alpha_n = x_n - a$, $(n \in \mathbb{N})$ şeklinde tanımlanan (α_n) dizisinin sonsuz küçük bir dizi olmasıdır.

Teorem 14. (Sonsuz küçük ve sonsuz büyük dizilerin özellikleri)

(a) Sonlu sayıdaki sonsuz küçük dizilerin cebirsel toplamı bir sonsuz küçük dizidir.

(b) Bir sonsuz küçük dizinin bir sınırlı dizi ile çarpımı bir sonsuz küçük dizidir.

(c) Sonlu sayıdaki sonsuz küçük dizilerin çarpımı bir sonsuz küçük dizidir.

(d) Eğer, (x_n) bir sonsuz küçük dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq 0$ ise $\left(\frac{1}{x^n}\right)$ dizisi bir sonsuz büyük dizidir

Eğer, (x_n) bir sonsuz büyük dizi ise $\left(\frac{1}{x^n}\right)$ dizisi bir sonsuz küçük dizidir.

Ör/ $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere (q^n) dizisinin $|q|<1$ durumunda sonsuz küçük ve $|q|>1$ durumunda ise sonsuz büyük bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Az önce $|q|<1$ durumunda $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ olduğunu ve dolayısıyla (q^n) dizisinin sonsuz küçük bir dizi olduğunu göstermiştik.

Şimdi $|q|>1$ olsun. Bu durumda (q^n) dizisi için $\forall \varepsilon>0$ sayısı verildiğinde $\forall n>n_\varepsilon$ $(n\in\mathbb{N})$ için $|q^n|>\varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısının var olduğunu göstermemiz gerekir.

$a>1$ olmak üzere $y=\log_a x$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde artan olduğundan

$$|q^n| = |q|^n > \varepsilon \Rightarrow \log_{|q|}(|q|^n) > \log_{|q|}\varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \log_{|q|}\varepsilon$$

bulunur. O halde $n_\varepsilon = [\![\log_{|q|}\varepsilon]\!]$ dersek $\forall n>n_\varepsilon$ $(n\in\mathbb{N})$ için ($0<\varepsilon\le|q|$ için $n_\varepsilon=0$ olduğundan, $\forall n\geq 1$ $(n\in\mathbb{N})$ için) $|q^n|>\varepsilon$ olur. Tanım 55 gereğince $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ olduğu elde edilir.

Ör/ n. terimi $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, $z_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $t_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ ve $s_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ şeklinde verilen (x_n), (y_n), (z_n), (t_n) ve (s_n)'in birer sonsuz küçük dizi olduğunu gösteriniz.

Gerçekten, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall n > n_\varepsilon = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!]$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n| < \varepsilon$, $|y_n| < \varepsilon$, $|z_n| < \varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon = [\![\frac{3}{\varepsilon}]\!]$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|t_n| < \varepsilon$ ve $\forall n > n_\varepsilon = [\![\frac{2}{\varepsilon}]\!]$ $(n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| < \varepsilon$ olduğu görülür.

– BELİRSİZ İFADELER –

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ olmak üzere $\frac{(x_n)}{(y_n)}$ $(y_n \neq 0, n \in \mathbb{N})$

a) yakınsak
b) sınırlı fakat ıraksak
c) sonsuz küçük
d) sonsuz büyük

olacak şekilde (x_n) ve (y_n) dizileri için örnekler verelim.

(1) $x_n = \frac{a}{n}$ $(a \neq 0)$, $y_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri için $\frac{x_n}{y_n} = a \Rightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi yakınsaktır ve limiti a'dır.

(2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri için $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sınırlıdır, fakat ıraksaktır.

(3) $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri

için $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sonsuz küçüktür.

(4) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ sonsuz küçük dizileri

için $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n \cdot n \Rightarrow \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi sonsuz büyüktür.

Böylece, eğer, (x_n) ve (y_n) birer sonsuz küçük diziler ise, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi $\frac{0}{0}$ şeklinde belirsiz ifade oluşturur denir.

Benzer şekilde

(1) Eğer, (x_n) ve (y_n) birer sonsuz büyük diziler ise, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi $\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde;

(2) Eğer, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ (veya $\mp\infty$) ise $(x_n \cdot y_n)$ dizisinin yakınsaklık karakteri üzerine birşey söylenemez. O halde, $(x_n \cdot y_n)$ dizisi $0.\infty$ şeklinde

(3) Eğer, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ (veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$) ise, $(x_n + y_n)$

dizisinin karakteri üzerine kesin bir şey söylenemez. O halde, (x_n+y_n) dizisi $\infty-\infty$ şeklinde belirsiz ifade oluşturur denir.

Ör/ $x_n=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ $(n\in\mathbb{N})$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}-\cancel{n}+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{2}=1$$

Ör/ $x_n=\dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$ $(n\in\mathbb{N})$ dizisinin limitini bulunuz.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $\quad 1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ve $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^3=\infty \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\infty$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n.n(1+\frac{1}{n}).n(2+\frac{1}{n})}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Örn/ $x_n = \frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1\right)$ $(n\in\mathbb{N})$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1\right)$$

$$\overset{0.\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}-1}{\frac{3}{n^3}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1}{\frac{3}{n^3}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}+1\right)}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1}+\cancel{\frac{3}{n^3}}-\cancel{1}}{\cancel{\frac{3}{n^3}}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}+1\right.}$$

$$= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

Ör/ $0<\alpha<1$ için $\lim_{n\to\infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$ olduğunu gösteriniz.

$x_n = (n+1)^\alpha$ $(n\in\mathbb{N})$ ve $y_n = n^\alpha$ $(n\in\mathbb{N})$ dizileri için

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ olduğundan, $(n+1)^\alpha - n^\alpha = x_n - y_n$

$n\in\mathbb{N}$ dizisi için $\infty - \infty$ şeklinde belirsizlik söz konusudur.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$0<(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right] < n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$= \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

yazabiliriz. O halde $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = 0$ olduğundan

(gerçekten $\forall\varepsilon>0$ için $\forall n > n_\varepsilon = [\![\varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}]\!]$ $(n\in\mathbb{N})$ için $0<\frac{1}{n^{1-\alpha}}<\varepsilon$ dur.)

7. özellik gereğince $\lim_{n\to\infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$

bulunur.

Teorem 15. (Stolz)

$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, (y_n) artan bir dizi ve

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ limiti varsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \text{ 'dir.}$$

Ör/ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!}{(n+1)!} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Stolz teoreminde $x_n = 1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!$ ve

$y_n = (n+1)!$ alırsak $x_n - x_{n-1} = n.n!$ $\quad y_n - y_{n-1} = (n+1)! - n!$
$= n.n!$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n.n!}{n.n!} = 1$$

olduğu görülür.