



MAT1320-Linear Cebir

Ders Notları

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Mehmet E. KÖROĞLU

Bahar 2020

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ, MATEMATİK BÖLÜMÜ

mkoroglu@yildiz.edu.tr

1. Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n\} \subset V$ olsun.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız,

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız,
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise, yani; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörleri V uzayını geriyorsa;

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız,
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise, yani; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörleri V uzayını geriyorsa;

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız,
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise, yani; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörleri V uzayını geriyorsa;

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ kümesine V 'nin bir **tabanı** denir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız,
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise, yani; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörleri V uzayını geriyorsa;

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ kümesine V 'nin bir **tabanı** denir.

Not: Bir vektör uzayının farklı iki tabanı aynı sayıda eleman içerir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız,
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise, yani; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörleri V uzayını geriyorsa;

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ kümesine V 'nin bir **tabanı** denir.

Not: Bir vektör uzayının farklı iki tabanı aynı sayıda eleman içerir.

Definition

$\mathcal{B} \subset V$ bir taban olsun. $\mathcal{B}$ kümesinin eleman sayısına V vektör uzayının **boyutu** denir ve $\text{boy}(V)$ veya $\dim(V)$ ile gösterilir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Definition

V bir reel vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ lineer bağımsız,
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise, yani; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektörleri V uzayını geriyorsa;

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ kümesine V 'nin bir **tabanı** denir.

Not: Bir vektör uzayının farklı iki tabanı aynı sayıda eleman içerir.

Definition

$\mathcal{B} \subset V$ bir taban olsun. $\mathcal{B}$ kümesinin eleman sayısına V vektör uzayının **boyutu** denir ve $\text{boy}(V)$ veya $\dim(V)$ ile gösterilir. Eğer $\mathcal{B}$ kümesi sonlu sayıda eleman içeriyorsa, V vektör uzayına **sonlu boyutlu**, aksi halde **sonsuz boyutlu** vektör uzayı denir.

Example

1. $\mathcal{B} = \{1\} \subset V = \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ ve $\dim(V) = 1$.

Example

1. $\mathcal{B} = \{1\} \subset V = \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ ve $\dim(V) = 1$.
2. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^2$ için $\mathbb{R}^2 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 2$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

1. $\mathcal{B} = \{1\} \subset V = \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ ve $\dim(V) = 1$.
2. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^2$ için $\mathbb{R}^2 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 2$.
3. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^3$ için $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 3$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

1. $\mathcal{B} = \{1\} \subset V = \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ ve $\dim(V) = 1$.
2. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^2$ için $\mathbb{R}^2 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 2$.
3. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^3$ için $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 3$.
4. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^n$ için $\mathbb{R}^n = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = n$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

1. $\mathcal{B} = \{1\} \subset V = \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ ve $\dim(V) = 1$.
2. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^2$ için $\mathbb{R}^2 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 2$.
3. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^3$ için $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 3$.
4. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^n$ için $\mathbb{R}^n = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = n$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

1. $\mathcal{B} = \{1\} \subset V = \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ ve $\dim(V) = 1$.
2. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^2$ için $\mathbb{R}^2 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 2$.
3. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^3$ için $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = 3$.
4. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\} \subset V = \mathbb{R}^n$ için $\mathbb{R}^n = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(V) = n$.

Not: Yukarıdaki örnekte verilen vektör uzayları sonlu vektör uzayı örnekleridir.

Example

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V =$
 $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ için $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$.

Example

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V =$
 $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ için $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$.
2. $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \subset V =$
 $\mathcal{P}_{n-1}(x) = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ için
 $\mathcal{P}_{n-1}(x) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{P}_{n-1}(x)) = n$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ için $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$.
2. $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \subset V = \mathcal{P}_{n-1}(x) = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ için $\mathcal{P}_{n-1}(x) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{P}_{n-1}(x)) = n$.
3. $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots\} \subset V = \mathcal{P}(x) = \{\text{tüm polinomların kümesi}\}$ için $\mathcal{P}(x) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{P}(x)) = \infty$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V =$
 $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ için $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$.
2. $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \subset V =$
 $\mathcal{P}_{n-1}(x) = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ için
 $\mathcal{P}_{n-1}(x) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve $\dim(\mathcal{P}_{n-1}(x)) = n$.
3. $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots\} \subset V = \mathcal{P}(x) =$
{tüm polinomların kümesi} için $\mathcal{P}(x) = \langle \mathcal{B} \rangle$ ve
 $\dim(\mathcal{P}(x)) = \infty$.
4. $V = \{\vec{0}\}$ vektör uzayı için $V = \langle \vec{0} \rangle$ ve $\dim(V) = 0$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{ \vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2, 0), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0, 1), \vec{\mathbf{v}}_3 = (1, 2, 1) \}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Lineer bağımsızlık: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Lineer bağımsızlık: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Lineer bağımsızlık: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Lineer bağımsızlık: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Lineer bağımsızlık: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Lineer bağımsızlık: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (2, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Lineer bağımsızlık: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

olduğundan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = x$$

$$2x_1 + 2x_3 = y$$

$$x_2 + x_3 = z$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & x \\ 2x_1 + 2x_3 & = & y \\ x_2 + x_3 & = & z \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2x+y-4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2x+y+4z}{4} \end{array} \right)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2x+y-4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2x+y+4z}{4} \end{array} \right)$$

$$\text{olduğundan } x_1 = \frac{2x+y-4z}{4}, x_2 = \frac{2x-y}{4}, x_3 = \frac{-2x+y+4z}{4}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2x+y-4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2x+y+4z}{4} \end{array} \right)$$

olduğundan $x_1 = \frac{2x+y-4z}{4}$, $x_2 = \frac{2x-y}{4}$, $x_3 = \frac{-2x+y+4z}{4}$ ve buradan

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

yazarız.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Germe: Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3$$

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2x+y-4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2x+y+4z}{4} \end{array} \right)$$

olduğundan $x_1 = \frac{2x+y-4z}{4}$, $x_2 = \frac{2x-y}{4}$, $x_3 = \frac{-2x+y+4z}{4}$ ve buradan

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

yazarız. Sonuç olarak, $\mathbb{R}^3 = \langle \mathcal{B} \rangle$ dir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Theorem

V , n -boyutlu vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $\mathcal{B}$ lineer bağımsız küme ise $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ dir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Theorem

V , n -boyutlu vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $\mathcal{B}$ lineer bağımsız küme ise $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ dir.
2. Eğer $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise $\mathcal{B}$ lineer bağımsız kümedir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Theorem

V , n -boyutlu vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $\mathcal{B}$ lineer bağımsız küme ise $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ dir.
2. Eğer $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise $\mathcal{B}$ lineer bağımsız kümedir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Theorem

V , n -boyutlu vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ olsun.
Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer $\mathcal{B}$ lineer bağımsız küme ise $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ dir.
2. Eğer $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ ise $\mathcal{B}$ lineer bağımsız kümedir.

Not: Yani, n -boyutlu bir V vektör uzayında

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$$

kümesinin taban olabilmesi için sadece lineer bağımsız olması veya sadece $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ olması yeterlidir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Yol: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = (0, 0)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2), \vec{v}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Yol: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2) + x_2(2, 0) = (0, 0)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2), \vec{v}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Yol: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2) + x_2(2, 0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Yol: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2) + x_2(2, 0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2), \vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Yol: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2) + x_2(2, 0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2), \vec{v}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Yol: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2) + x_2(2, 0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 2), \vec{v}_2 = (2, 0)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını inceleyiniz.

1. Yol: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2) + x_2(2, 0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

olduğundan $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektörleri lineer bağımsızdır. Aynı zamanda $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ olduğundan $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{R}^2$ olup $\mathcal{B}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayının bir tabanıdır.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. **Yol:** Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x, y) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Yol: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x, y) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

$$(x, y) = x_1(1, 2) + x_2(2, 0)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Yol: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x, y) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

$$(x, y) = x_1(1, 2) + x_2(2, 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x \\ 2x_1 = y \end{cases}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Yol: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x, y) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

$$(x, y) = x_1(1, 2) + x_2(2, 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x \\ 2x_1 = y \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & y \end{array} \right)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Yol: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x, y) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

$$(x, y) = x_1(1, 2) + x_2(2, 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x \\ 2x_1 = y \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \end{array} \right)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Yol: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x, y) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

$$(x, y) = x_1(1, 2) + x_2(2, 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x \\ 2x_1 = y \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \end{array} \right)$$

olduğundan $x_1 = \frac{y}{2}$ ve $x_2 = \frac{2x-y}{4}$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Yol: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x, y) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$$

$$(x, y) = x_1(1, 2) + x_2(2, 0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x \\ 2x_1 = y \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \end{array} \right)$$

olduğundan $x_1 = \frac{y}{2}$ ve $x_2 = \frac{2x-y}{4}$ ve buradan

$$(x, y) = \frac{y}{2}(1, 2) + \left(\frac{2x-y}{4} \right) (2, 0)$$

yazarız.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Yol: Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned}(x, y) &= x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 \\(x, y) &= x_1(1, 2) + x_2(2, 0) \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x \\ 2x_1 = y \end{cases} &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \end{array} \right)\end{aligned}$$

olduğundan $x_1 = \frac{y}{2}$ ve $x_2 = \frac{2x-y}{4}$ ve buradan

$$(x, y) = \frac{y}{2}(1, 2) + \left(\frac{2x-y}{4} \right) (2, 0)$$

yazarız. O halde, $\mathbb{R}^2 = \langle \mathcal{B} \rangle$ olduğundan $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vektörleri lineer bağımsızdır. Sonuç olarak, $\mathcal{B}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayının bir tabanıdır.

Example

$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \mid x + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ verilsin.

Example

$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \mid x + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ verilsin.

1. $\mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} V$ olduğunu gösteriniz.

Example

$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \mid x + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ verilsin.

1. $\mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} V$ olduğunu gösteriniz.
2. $\mathcal{U}$ için bir taban bulunuz.

Example

$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \mid x + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ verilsin.

1. $\mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} V$ olduğunu gösteriniz.
2. $\mathcal{U}$ için bir taban bulunuz.
3. $\dim(\mathcal{U}) = ?$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

1. Alt uzay: Her (x, y, z) , $(a, b, c) \in \mathcal{U}$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow \alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c) = (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c)$$

1. Alt uzay: Her $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathcal{U}$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow \alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c) = (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \Rightarrow \alpha(x + 2z) = 0 \\ a + 2c = 0, \Rightarrow \beta(a + 2c) = 0 \end{cases}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

1. Alt uzay: Her $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathcal{U}$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow \alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c) = (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \Rightarrow \alpha(x + 2z) = 0 \\ a + 2c = 0, \Rightarrow \beta(a + 2c) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha(x + 2z) + \beta(a + 2c) = 0$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

1. Alt uzay: Her $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathcal{U}$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\Rightarrow \alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c) = (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \Rightarrow \alpha(x + 2z) = 0 \\ a + 2c = 0, \Rightarrow \beta(a + 2c) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha(x + 2z) + \beta(a + 2c) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c) \in \mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} V$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Taban: Her $(x, y, z) \in \mathcal{U}$ için $x + 2z = 0 \Rightarrow x = -2z$ olup bu denklem sisteminde 3 bilinmeyen ve bir tane denklem olduğundan $3 - 1 = 2$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Taban: Her $(x, y, z) \in \mathcal{U}$ için $x + 2z = 0 \Rightarrow x = -2z$ olup bu denklem sisteminde 3 bilinmeyen ve bir tane denklem olduğundan $3 - 1 = 2$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ t \\ s \end{bmatrix}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Taban: Her $(x, y, z) \in \mathcal{U}$ için $x + 2z = 0 \Rightarrow x = -2z$ olup bu denklem sisteminde 3 bilinmeyen ve bir tane denklem olduğundan $3 - 1 = 2$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = t \\ z = s \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ t \\ s \end{bmatrix} \\ &= s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Taban: Her $(x, y, z) \in \mathcal{U}$ için $x + 2z = 0 \Rightarrow x = -2z$ olup bu denklem sisteminde 3 bilinmeyen ve bir tane denklem olduğundan $3 - 1 = 2$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = t \\ z = s \end{cases} &\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ t \\ s \end{bmatrix} \\ &= s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vektörleri lineer bağımsızdır ve $\mathcal{U}$ alt uzayını gererler. O halde, $\mathcal{B} = \{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ kümesi $\mathcal{U}$ için bir tabandır.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Taban: Her $(x, y, z) \in \mathcal{U}$ için $x + 2z = 0 \Rightarrow x = -2z$ olup bu denklem sisteminde 3 bilinmeyen ve bir tane denklem olduğundan $3 - 1 = 2$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s \\ t \\ s \end{bmatrix}$$
$$= s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

vektörleri lineer bağımsızdır ve $\mathcal{U}$ alt uzayını gererler. O halde, $\mathcal{B} = \{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ kümesi $\mathcal{U}$ için bir tabandır.

3. Boyut: $\dim(\mathcal{U}) = 2$.

Example

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \text{ verilsin.}$$

Example

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \text{ verilsin.}$$

1. $\mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.

Example

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \text{ verilsin.}$$

1. $\mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.
2. $\mathcal{U}$ için bir taban bulunuz.

Example

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \text{ verilsin.}$$

1. $\mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.
2. $\mathcal{U}$ için bir taban bulunuz.
3. $\dim(\mathcal{U}) = ?$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

1. Alt uzay: Her $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & \alpha b + \beta y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(a+b) + \beta(x+y) \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

1. Alt uzay: Her $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & \alpha b + \beta y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(a+b) + \beta(x+y) \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \\ &\Rightarrow \mathcal{U} \underset{\text{a.v.}}{\leq} \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

2. **Taban:** Her $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ için,

2. Taban: Her $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ için,

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Taban: Her $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ için,

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2}$$

olduğundan E_1, E_2 matrisleri lineer bağımsızdır ve $\mathcal{U}$ alt uzayını gererler. O halde, $\mathcal{B} = \{E_1, E_2\}$ kümesi $\mathcal{U}$ için bir tabandır.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

2. Taban: Her $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ için,

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2}$$

olduğundan E_1, E_2 matrisleri lineer bağımsızdır ve $\mathcal{U}$ alt uzayını gererler. O halde, $\mathcal{B} = \{E_1, E_2\}$ kümesi $\mathcal{U}$ için bir tabandır.

3. Boyut: $\dim(\mathcal{U}) = 2$.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Theorem

V , n -boyutlu bir vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, V 'nin bir tabanı olsun. Bu durumda her $\vec{w} \in V$ vektörü

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Proof.

$\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$, n -boyutlu reel V vektör uzayının bir tabanı ve $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ için

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Proof.

$\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \dots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$, n -boyutlu reel V vektör uzayının bir tabanı ve $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ için

$$\vec{\mathbf{w}} = x_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + x_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + \dots + x_n \vec{\mathbf{v}}_n$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Proof.

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, n -boyutlu reel V vektör uzayının bir tabanı ve $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ için

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

$$\vec{w} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Proof.

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, n -boyutlu reel V vektör uzayının bir tabanı ve $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ için

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

$$\vec{w} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n$$

iki farklı yazılış olsun. Taban elemanları lineer bağımsız olduğundan

$$\Rightarrow (x_1 - y_1) \vec{v}_1 + (x_2 - y_2) \vec{v}_2 + \dots + (x_n - y_n) \vec{v}_n = \vec{0}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Proof.

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, n -boyutlu reel V vektör uzayının bir tabanı ve $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ için

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

$$\vec{w} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n$$

iki farklı yazılış olsun. Taban elemanları lineer bağımsız olduğundan

$$\Rightarrow (x_1 - y_1) \vec{v}_1 + (x_2 - y_2) \vec{v}_2 + \dots + (x_n - y_n) \vec{v}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Proof.

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, n -boyutlu reel V vektör uzayının bir tabanı ve $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ için

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

$$\vec{w} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n$$

iki farklı yazılış olsun. Taban elemanları lineer bağımsız olduğundan

$$\Rightarrow (x_1 - y_1) \vec{v}_1 + (x_2 - y_2) \vec{v}_2 + \dots + (x_n - y_n) \vec{v}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$$

elde edilir.



Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörünü

$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ tabanına göre tek türlü olarak ifade edelim.

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörünü

$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ tabanına göre tek türlü olarak ifade edelim. Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörünü

$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ tabanına göre tek türlü olarak ifade edelim. Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(x, y, z) = x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = x$$

$$2x_1 + 2x_3 = y$$

$$x_2 + x_3 = z$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörünü

$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ tabanına göre tek türlü olarak ifade edelim. Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) \\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right)\end{aligned}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörünü

$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ tabanına göre tek türlü olarak ifade edelim. Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) \\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2x+y-4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2x+y+4z}{4} \end{array} \right)\end{aligned}$$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörünü

$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ tabanına göre tek türlü olarak ifade edelim. Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) \\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2x+y-4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2x+y+4z}{4} \end{array} \right)\end{aligned}$$

olduğundan $x_1 = \frac{2x+y-4z}{4}$, $x_2 = \frac{2x-y}{4}$, $x_3 = \frac{-2x+y+4z}{4}$

Vektör Uzayının Tabanı ve Boyutu

Example

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörünü

$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ tabanına göre tek türlü olarak ifade edelim. Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= x_1(1, 2, 0) + x_2(2, 0, 1) + x_3(1, 2, 1) \\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= x \\ 2x_1 + 2x_3 &= y \\ x_2 + x_3 &= z \end{aligned} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2x+y-4z}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2x+y+4z}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

olduğundan $x_1 = \frac{2x+y-4z}{4}$, $x_2 = \frac{2x-y}{4}$, $x_3 = \frac{-2x+y+4z}{4}$ ve buradan

$$(1, 2, 3) = -2 \cdot (1, 2, 0) + 0 \cdot (2, 0, 1) + 3(1, 2, 1)$$

dir.

?