

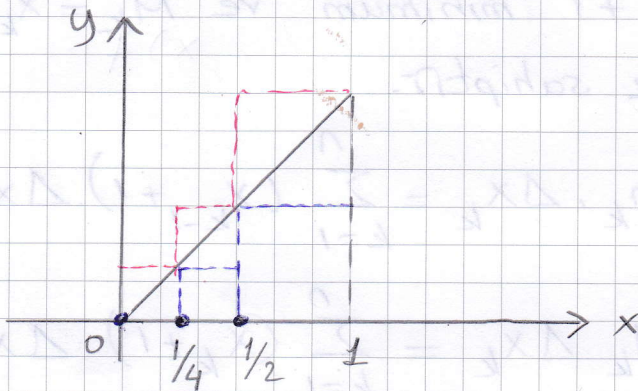
- Uygulama -

- 1) $f(x) = x$ fonksiyonu için $[0, 1]$ aralığının bir bölüntüsünü $P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ şeklinde alıp alt ve üst toplamları bulunuz.

$$[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3]$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{4}, \Delta x_2 = \frac{1}{4}, \Delta x_3 = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} L(f, P) &= f(0) \cdot \Delta x_1 + f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Delta x_2 + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x_3 \\ &= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16} \approx 0,3125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(f, P) &= f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} + f(1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{16} \approx 0,6875 \end{aligned}$$

2) $f(x) = x + 1$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ aralığında $\int_{-1}^3 (x+1) dx$ edilebilir olduğunu gösteriniz ve integralini hesaplayınız.

f , $[-1, 3]$ de sürekli ve pozitiftir. Dolayısıyla bu aralıkta integrali mevcuttur. f sürekli olduğundan bu aralıkta bir maksimum ve bir minimum değere sahiptir. $[1, 3]$ aralığının keyfi bir bölüntüsü için Her bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında f fonksiyonu $m_k = x_{k-1} + 1$ minimum ve $M_k = x_k + 1$ maksimum değerine sahiptir.

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (x_{k-1} + 1) \cdot \Delta x_k$$

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (x_k + 1) \Delta x_k$$

$$\text{ve } a \leq b \text{ için } a \leq \frac{1}{2}(a+b) \leq b$$

olduğundan

~~$L(f, P) \leq U(f, P)$~~

$$(x_{k-1} + 1) \cdot \Delta x_k \leq \frac{1}{2} (x_{k-1} + 1 + x_k + 1) \cdot \Delta x_k \leq (x_k + 1) \cdot \Delta x_k$$

olur. O halde

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n (x_{k-1} + 1) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (x_{k-1} + 1 + x_k + 1) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (x_k + 1) \Delta x_k = U(f, P)$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ olduğundan}$$

$$L(f, P) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_{k-1} + x_k + 2) (x_k - x_{k-1}) \leq \frac{1}{2} (f, P)$$

$$L(f, P) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(x_k^2 - x_{k-1}^2) + 2(x_k - x_{k-1})] \leq U(f, P)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(x_k^2 - x_{k-1}^2) + 2(x_k - x_{k-1})]$$

$$= \frac{1}{2} [(3^2 - (-1)^2) + 2(3 - (-1))]$$

$$= \frac{1}{2} [(9 - 1) + 2(3 + 1)]$$

$$= \frac{1}{2} [8 + 8] = 8$$

$$\text{olduğundan } L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

$\Rightarrow I = 8$ olmalıdır ve dolayısıyla $f(x) = x+1$ fonksiyonu $[-1, 3]$ aralığında integre edilebilir ve de $\int_{-1}^3 (x+1) dx = 8$ dir.

3) $F(x) = \int_0^x [t + 3(1-t)^{1/3}] dt$ fonksiyonunun dönüm noktalarını bulunuz.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x [t + 3(1-t)^{1/3}] dt \right]$$

$$= x + 3(1-x)^{1/3}$$

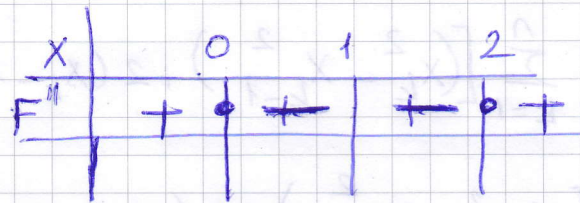
$$F''(x) = 1 - \frac{1}{(1-x)^{2/3}} = \frac{(1-x)^{2/3} - 1}{(1-x)^{2/3}}$$

$$F''(x) = 0 \Rightarrow (1-x)^{2/3} - 1 = 0 \Rightarrow (1-x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0, x = 2, \boxed{x = 1} \rightarrow \text{tekil nokta}$$

$$A(0,0), B(2, F(2)), C(1, F(1))$$

~~x=0 ve~~



$x=0$ ve $x=2$ dönüm noktasıdır.

$x=1$ dönüm noktası değildir.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \int_0^{x^2} \frac{e^t - 1}{1 - \sqrt{2 - e^t}} = 0 \cdot \infty \text{ B.S.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{e^t - 1}{1 - \sqrt{2 - e^t}}}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{e^{x^2} - 1}{1 - \sqrt{2 - e^{x^2}}} \right) \cdot 2x}{2x} \quad \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \sqrt{2 - e^{x^2}}} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) [\cancel{\sqrt{2 - e^{x^2}}} + \sqrt{2 - e^{x^2}}]}{1 - (2 - e^{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(e^{x^2} - 1)} [1 + \sqrt{2 - e^{x^2}}]}{\cancel{(e^{x^2} - 1)}}$$

$$= 2$$

$$5) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + 3 \tan x}} = \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3} \sqrt{u} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}$$

$$1 + 3 \tan x = u$$

$$\frac{3}{\cos^2 x} dx = du$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

$$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u=4$$

$$6) \int \frac{(4x+2) \ln(x^2+x)}{x^2+x} dx = \int \frac{2(x+1) \ln(x^2+x)}{x^2+x} dx$$

$$\ln(x^2+x) = u$$

$$\frac{2x+1}{x^2+x} dx = du$$

$$= \int u du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C$$

$$7) \int \arctan \sqrt{x} dx = x \arctan \sqrt{x} - \int x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$u = \arctan \sqrt{x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$dx = dv$$

$$x = v$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{t \cdot 2t dt}{1+t^2}$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - t + \arctan t$$

$$= x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$$

$$8) \int_1^e \frac{\arcsin(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 \arcsin u du$$

$$\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 0$$

$$x = e \Rightarrow u = 1$$

$$\arcsin u = t$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = dt$$

$$du = ds$$

$$u = s$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \arcsin u \, du = u \arcsin u \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$$

$$= (\arcsin 1 - 0 \cdot \arcsin 0) + \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$$

$$= u \arcsin u \Big|_0^1 + \int_1^0 \frac{a \, da}{a}$$

$$= (1 \arcsin 1 - 0 \cdot \arcsin 0) + a \Big|_1^0$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + (0 - 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$1-u^2=a^2$$

$$-2u \, du = 2a \, da$$

$$-u \, du = a \, da$$

$$u=0 \Rightarrow a=1$$

$$u=1 \Rightarrow a=0$$

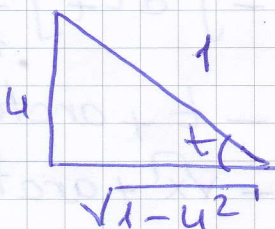
$$g) \int \frac{\sqrt{1-\ln^2 x}}{x} \, dx = \int \sqrt{1-u^2} \, du$$

$$\ln x = u$$

$$\frac{dx}{x} = du$$

$$u = \sin t$$

$$du = \cos t \, dt$$



$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt$$

$$= \int \cos^2 t \, dt$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t \, dt$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + c$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c$$

$$= \arcsin u + \frac{1}{2} u \cdot \sqrt{1-u^2} + c$$

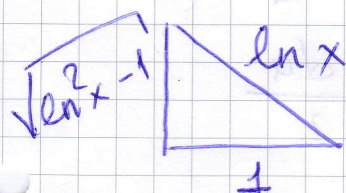
$$= \arcsin(\ln x) + \frac{1}{2} \ln x \sqrt{1-\ln^2 x} + c$$

$$10) \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x - 1}} = ? \quad (x > 1)$$

$$\ln x = \sec t$$

$$\frac{dx}{x} = \sec t \tan t \, dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x - 1}} = \int \frac{\sec t \tan t \, dt}{\sqrt{\sec^2 t - 1}}$$



$$= \int \frac{\sec t \cancel{\tan t}}{\cancel{\tan t}} dt$$

$$= \ln |\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln |\ln x + \sqrt{\ln^2 x - 1}| + C$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{-15-8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+4)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$x+4=u$$

$$dx=du$$

$$= \int \arcsin u + C$$

$$= \arcsin(x+4) + C$$

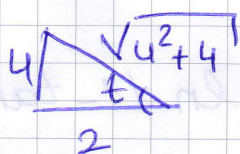
$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}$$

$$x+1=u$$

$$dx=du$$

$$u=2 \tan t$$

$$du=2 \sec^2 t \, dt$$



$$= \int \frac{2 \sec^2 t \, dt}{2 \sec t}$$

$$= \int \sec t \, dt$$

$$= \ln |\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+4}}{2} + \frac{u}{2} \right| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{u^2+4} + u}{2} \right| + C$$

$$= \ln |\sqrt{u^2+4} + u| + C$$

$$= \ln \sqrt{x^2 + 2x + 5} + (x+1) + C$$

$$13) \int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx = \int \frac{e^{2x} \cdot e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$$

$$e^x = u$$

$$e^x dx = du$$

$$= \int \frac{u^2 \cdot du}{u^2 - 3u + 2}$$

$$\begin{array}{r} u^2 \overline{) u^2 - 3u + 2} \\ \underline{-u^2 + 3u - 2} \\ 3u - 2 \end{array}$$

$$= \int \left[1 + \frac{3u-2}{u^2-3u+2} \right] du$$

$$= \int du + \int \frac{(3u-2) du}{u^2-3u+2}$$

$$= \int du + \int \frac{3u-2}{(u-2)(u-1)} du$$

$$\frac{3u-2}{(u-2)(u-1)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u-1}$$

$$= \int du + \int \left[\frac{4}{u-2} - \frac{1}{u-1} \right] du$$

$$= u + 4 \ln|u-2| - \ln|u-1| + C$$

$$A = 4$$

$$B = -1$$

$$= e^x + 4 \ln|e^x - 2| - \ln|e^x - 1| + C$$

$$= e^x + \ln \left[\frac{(e^x - 2)^4}{e^x - 1} \right] + C$$

$$14) \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2} du}{1 - \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = u$$

$$= 2 \int \frac{du}{1+u^2-2u+1-u^2}$$

$$= \int \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u| + C$$

$$= -\ln|1 - \tan \frac{x}{2}| + C$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

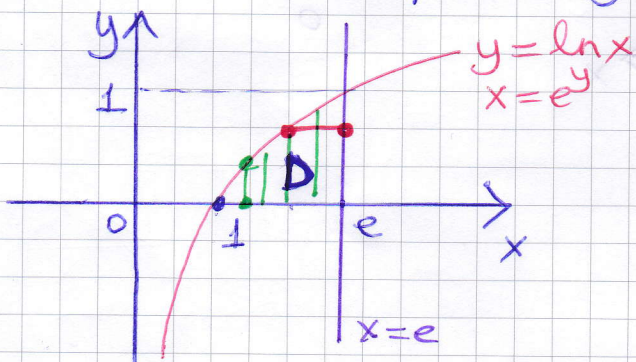
$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned}
 15) \int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^x \Big|_a^0) \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \\
 &= \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \\
 &= \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^b \right) + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_a^1 \right) \\
 &= \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{b^2} - \frac{3}{2} \right) + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^2} \right) \\
 &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

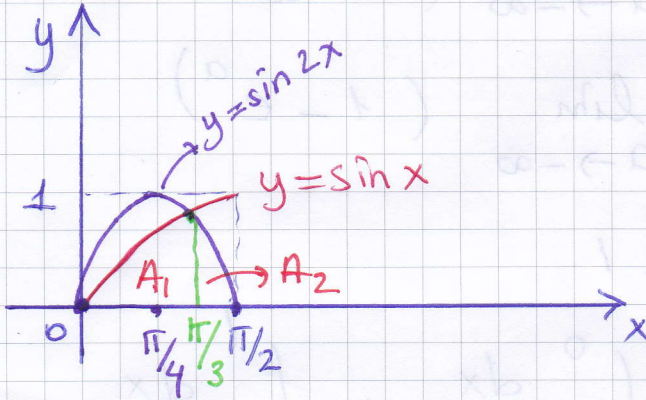
17) $y = \ln x$ eğrişinin $x=e$ doğrusu ve x -ekseni ile oluşturduğu bölgenin alanını bulunuz.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^e \ln x \, dx \quad (x' \text{ e göre}) \\
 A &= \int_0^1 (e - e^y) \, dy \quad (y' \text{ ye göre})
 \end{aligned}$$

18) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $y = \sin x$ ve $y = \sin 2x$

eğrilerinin x -ekseni ile oluşturduğu bölgenin alanını bulunuz.



$$\sin x = \sin 2x$$

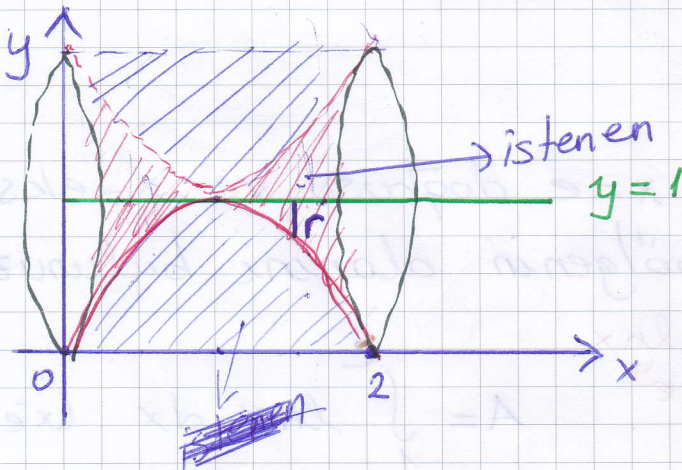
$$x = 0, x = \frac{\pi}{3}$$

$$A_1 = \int_0^{\pi/3} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ br}^2$$

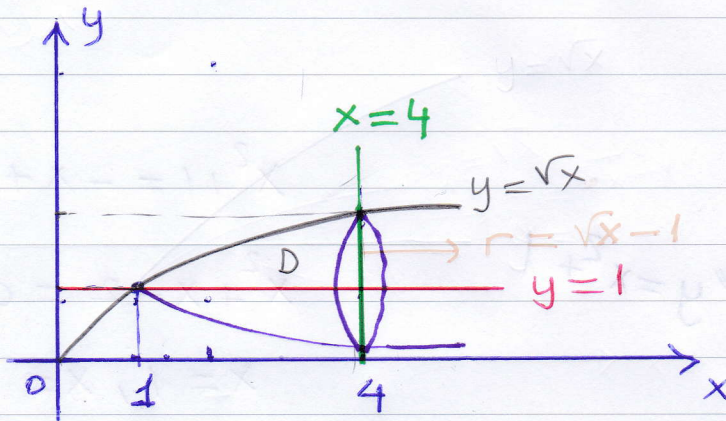
19) $y = 2x - x^2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$ ile sınırlı bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.



$$V = \pi \int_0^2 [1 - (2x - x^2)]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 [1 - (2x - x^2)]^2 \, dx$$

20) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ ve $x = 4$ doğruları ile sınırlanan bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right) \Big|_1^4$$

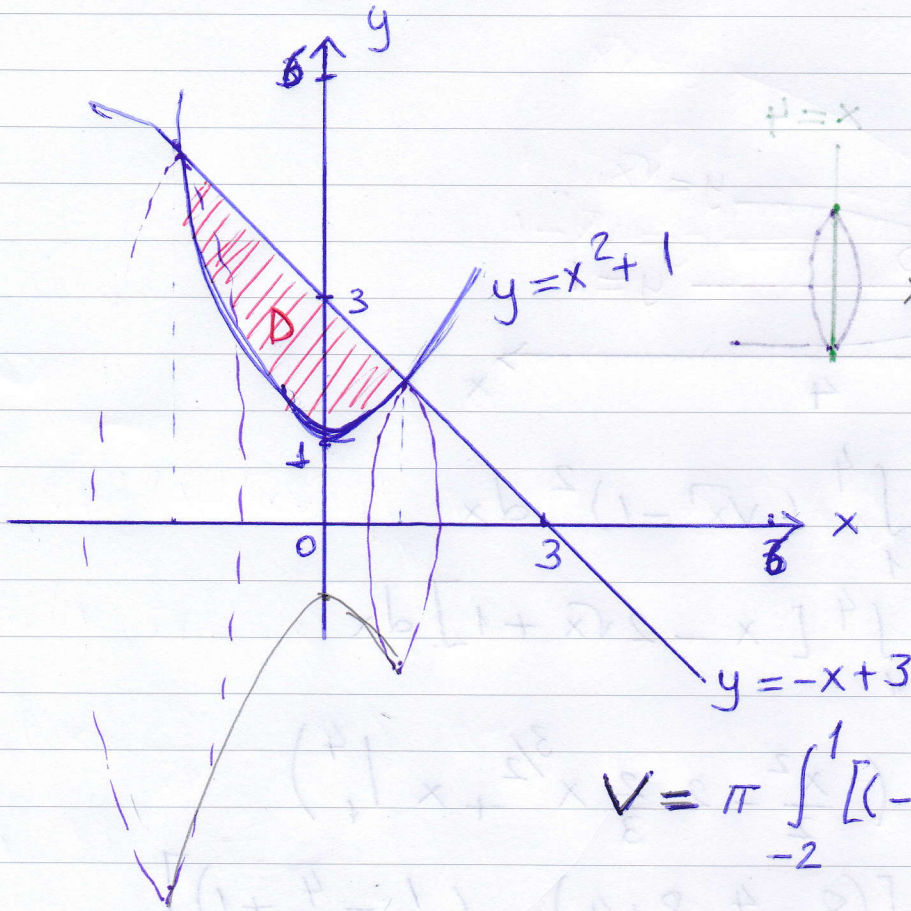
$$= \pi \left[\left(8 - \frac{4}{3} \cdot 8 + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left(12 - \frac{32}{3} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right)$$

$$= \pi \left(12 - \frac{28}{3} - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{7\pi}{6} br^3$$

21) $y = x^2 + 1$ eğrisi ve $y = -x + 3$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.



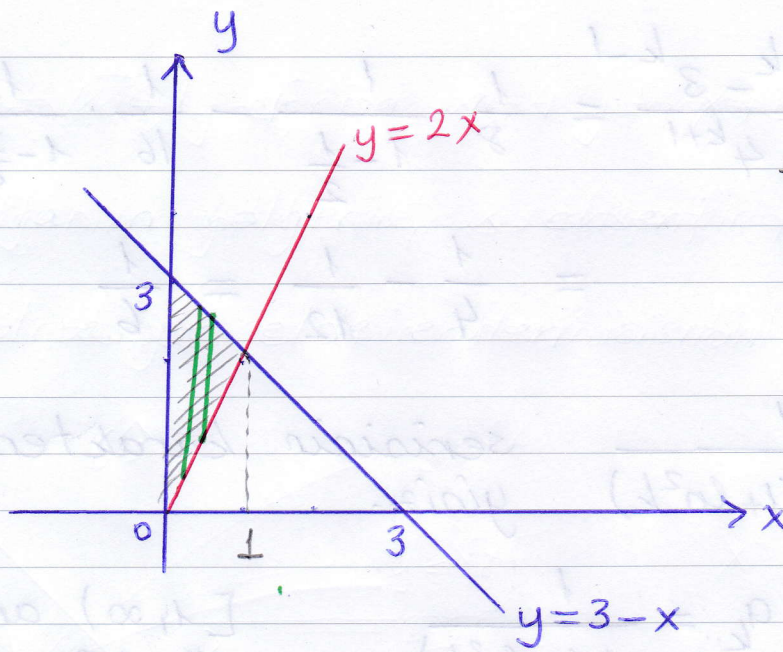
$$x^2 + 1 = -x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1, x = -2$$

$$V = \pi \int_{-2}^1 [(-x+3)^2 - (x^2+1)^2] dx$$

22) $y = 3 - x$ ve $y = 2x$ doğrularının y -ekseniyle oluşturduğu bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.



$$2x = 3 - x$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot (3 - x - 2x) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (3x - 3x^2) dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{3x^2}{2} - x^3 \right) \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \pi \text{ br } 3$$

23) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^{k-1}}{4^{k+1}}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^{k-1}}{4^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^{k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{16} \left(\frac{2^{k-1}}{4^{k-1}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16} \left(\frac{3^{k-1}}{4^{k-1}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1}$$

$$a = \frac{1}{8} \quad r = \frac{1}{2} \\ |r| < 1 \text{ yak.}$$

$$a = \frac{1}{16} \quad r = \frac{3}{4} \\ |r| < 1 \text{ yak.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^{k-1}}{4^{k+1}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

24) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+\ln^2 k)}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$$f(k) = a_k = \frac{1}{k(1+\ln^2 k)} \quad [1, \infty) \text{ aralığında sürekli, pozitif.}$$

$$f'(k) = \frac{-[(1+\ln^2 k) + k \cdot \frac{2 \ln k}{k}]}{k^2 (1+\ln^2 k)^2}$$

$$= \frac{-[1+\ln^2 k + 2 \ln k]}{k^2 (1+\ln^2 k)} < 0 \quad \text{azalan.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dk}{k(1+\ln^2 k)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dk}{k(1+\ln^2 k)}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\ln R} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\ln k = t$$

$$\frac{dk}{k} = dt$$

$$k=1 \Rightarrow t=0$$

$$k=R \Rightarrow t=\ln R$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\arctan t \Big|_0^{\ln R} \right)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} (\arctan(\ln R) - 0)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan(\ln R)$$

$$= \arctan(\infty)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Integral yakınsak olduğundan seri de yakınsaktır.

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}} \cdot n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+5n^2+n}{\sqrt{n^6(1+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^6})}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3 \sqrt{1+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^6}}}$$

$= 2 \neq 0, \infty$ olduğundan her iki seri aynı karakterdedir.

26) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}-1}}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$$a_n = \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1+\sqrt{e^{2n}(1-e^{-2n})}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{1+e^n(\sqrt{1-e^{-2n}})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n[e^{-n}+\sqrt{1-e^{-2n}}]}$$

$$= \frac{1}{0+\sqrt{1-0}} = 1 \neq 0 \text{ olduğundan } n. \text{ terim testine göre iraksaktır.}$$

27) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{2n+n^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \sqrt[n^2]{2n+n^3} = (2n+n^3)^{1/n^2}$$

~~lim a_n = 1~~ $\Rightarrow \ln a_n = \frac{1}{n^2} \ln(2n+n^3)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(2n+n^3)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n+n^3)}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+3n^2}{2n+n^3}}{2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+3n^2)}{2n(2n+n^3)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n) = 0 \Rightarrow \ln(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^0 = 1 \neq 0$$

olduğundan n-terim testine göre seri maksiştir.

28) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{1+e^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \frac{\ln n}{1+e^n} \quad a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{1+e^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{1+e^{n+1}} \cdot \frac{1+e^n}{\ln n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{e^n(e^{-n}+1)}{e^n(e^{-n}+e)}$$

$$= \frac{1}{e} < 1 \quad \text{olduğundan oran testine göre seri yakınsaktır.}$$

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}^3}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{3/2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}+3-3}$$

$$\sqrt{n}+3 = t \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}+3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+3} \right)^{-3}$$

$$n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^t \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-3}$$

$$= e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1 \quad \text{olduğundan seri yakınsaktır.}$$

30) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{Alterne seri}$$

Mutlak değerlerden oluşan seriye bakarsak;

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

p-serisidir.

$p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan
iraksaktır.

O halde alterne seri testini uygularsak;

$$1^o) a_{n+1} \stackrel{?}{<} a_n \quad \forall n \text{ için} \quad n < n+1$$

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \checkmark$$

$$2^o) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Alterne seri yakınsaktır. Mutlak değerlerden oluşan seri iraksak olduğundan şartlı yakınsaktır.

$$31) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x-3)^k}{k \sqrt{k^2+1}}$$

serisinin yakınsaklık merkezi, yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$u_k = \frac{(-1)^k (2x-3)^k}{k \sqrt{k^2+1}} = \frac{(-1)^k \cdot 2^k (x - \frac{3}{2})^k}{k \sqrt{k^2+1}}$$

a_k a_k

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ yakınsaklık merkezi

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2^{k+1}}{(k+1) \sqrt{(k+1)^2+1}} \cdot \frac{k \sqrt{k^2+1}}{2^k \cdot (-1)^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \cdot \left| \frac{k \sqrt{k^2+1}}{(k+1) \sqrt{(k+1)^2+1}} \right|$$

$$= 2 \Rightarrow R = \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \text{ yakınsaklık yarıçapı.}$$

$$(|x - c| < R)$$

$\Rightarrow |x - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$ için seri yakınsaktır.

$$-\frac{1}{2} < x - \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 < x < 2$$

$$x=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{k^2+1}} \text{ olur.}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ p-serisi $p=2 > 1$ yakınsaktır.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k \sqrt{k^2+1}}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k \sqrt{k^2+1}} = 1 \neq 0, \infty$$

Her iki seri aynı karakterdedir.

$x=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}}$ olur. Alternan seridir. Mutlak değerlerden oluşan seriye bakarsak;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \text{ yakınsaktır.}$$

O halde yakınsaklık aralığı $1 \leq x \leq 2$ 'dir.

32) $\frac{1}{3+2x}$ 'i temsil eden kuvvet serisini bulunuz ve yakınsaklık aralığını yazınız.

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} \quad ?$$

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3\left(1+\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+\frac{2x}{3}} \right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\left(1+\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2x}{3} + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \dots \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(-\frac{2x}{3} \right)^n \quad \left| -\frac{2x}{3} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2|x|}{3} < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

33) $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x=3$ civarındaki seri açılımını bulunuz.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(3) = -\frac{1}{3^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f''(3) = \frac{2}{3^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$f'''(3) = -\frac{3!}{3^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

$$f^{(4)}(3) = \frac{4!}{3^5}$$

⋮

⋮

Seri açılımı:

$$\Rightarrow f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{1}{3^3}(x-3)^2 - \frac{1}{3^4}(x-3)^3 + \frac{1}{3^5}(x-3)^4 - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \frac{(x-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{x-3}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{3-x}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{3-x}{3}}$$

$$a = \frac{1}{3} \quad r = \frac{3-x}{3}$$

$$= \frac{1}{x} //$$

$|r| < 1$ için yakınsaktır.

$$|3-x| < 3 \Rightarrow -3 < 3-x < 3$$

$$-3 < x-3 < 3$$

$$0 < x < 6$$

34) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(3^{-n})}{1+3^n}$ serisinin karakterini bulunuz.

$$\frac{\sinh(3^{-n})}{1+3^n} < \frac{\sinh(3^{-n})}{3^n} < \frac{1}{3^n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ geometrik seri $|H| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$ yakınsak.

$\forall n$ için $\frac{\sinh(3^{-n})}{1+3^n} < \frac{1}{3^n}$ olduğundan karşılaştırmaya göre verilen seri yakınsaktır.

35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4^n}} (x-2)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\sqrt{1+4^{n+1}}} (x-2)^{n+1}, \frac{\sqrt{1+4^n}}{n(x-2)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+4^n}}{\sqrt{1+4^{n+1}}} \right| \cdot |x-2|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n \sqrt{4^{-n}+1}}{2^n \sqrt{4^{-n}+4}} \right| \cdot |x-2|$$

$$= \frac{1}{2} |x-2| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2$$

$$-2 < x-2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

$$x=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4^n}} \cdot (-2)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (-2)^n}{\sqrt{1+4^n}} \neq 0 \text{ iraksak.}$$

$$x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+4^n}} 2^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{\sqrt{1+4^n}} \neq 0 \text{ iraksak.}$$

36) $g(x) = x \ln(1+x^2)$ ile tanımlı $g(x)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

x yerine $-x^2$ yazarsak;

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \quad |x| < 1$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını $2x$ ile çarpıp terim terim integre edelim.

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2 \cdot x^{2n+1} \Rightarrow$$

$$\int_0^x \frac{2t dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n+1} dt$$

$$\Rightarrow \ln(1+t^2) \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2 \cdot \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} \Big|_0^x \right]$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+3}}{n+1} \quad \begin{array}{l} |x| < 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \text{Alterne harmonik seri gibi davranır. Şartlı yakınsaktır.}$$

$$x \neq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

yine Alterne harmonik seri gibi davranır şartlı yakınsaktır.

$$37) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \Rightarrow x \cdot f'(x) = (1+x) \cdot f(x)$$

olduğunu gösteriniz.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + 2x + 3 \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \dots$$

$$x \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n-1)!} = x + 2x^2 + 3 \frac{x^3}{2!} + \frac{4x^4}{3!} + \dots$$

$n = k+1$ alalım.

$$x \cdot f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) \cdot x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x \cdot \frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$= (1+x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$= (1+x) \cdot f(x)$$

38) $f(x) = e^{1-2x^3}$ fonksiyonunun McLaurin serisini bulunuz.

$$f(x) = e^{1-2x^3} = e \cdot e^{-2x^3}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow e^{-2x^3} = 1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2!} + \frac{(-2x^3)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 - 2x^3 + \frac{2^2 \cdot x^6}{2!} - \frac{2^3 \cdot x^9}{3!} + \dots$$

$$\begin{aligned} e \cdot e^{-2x^3} &= e \left(1 - 2x^3 + \frac{2^2 x^6}{2!} - \frac{2^3 x^9}{3!} + \dots \right) \\ &= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot x^{3n}}{n!} \end{aligned}$$

39) 2. merteye Taylor polinomunu kullanarak $\sqrt{26}$ 'nin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$a = 25 \quad f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f''(x) = \frac{-1}{4 \cdot x^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f(25) = 5 \quad f'(25) = \frac{1}{10} \quad f''(25) = \frac{-1}{500}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 5 + \frac{1}{10}(x-25) - \frac{1}{1000}(x-25)^2$$

$$P_2(26) \approx 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = 5 + 0,1 - 0,001 = 5,099$$

40) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{dx}{(1+x)^2} \right)$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{dx}{(1+x)^2} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{1+x} \Big|_k^{k+1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{1+k+1} + \frac{1}{1+k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+k} - \frac{1}{2+k} \right] \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{1+k} - \frac{1}{2+k} \right]$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n}\right) \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2+n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2+n} \right)$$

$$= 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{dx}{(1+x)^2} \right) = 1$$

41) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}} \rightarrow \text{derecesi } 3/2 \\ \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n^4+1}} \rightarrow \text{derecesi } 7/3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/6}} \quad p\text{-serisi} \quad p = \frac{5}{6} < 1 \text{ ıraksak.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \cdot n^{5/6}}{(n+1) \cdot \sqrt[3]{n^4+1}} = 1 \neq 0, \infty \text{ Her iki seri aynı karakterdedir.}$$

42) $f(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$ fonksiyonunun temsil ettiği kuvvet serisini bulunuz.

$$\int_0^x \cos(t^2) dt = \int_0^x \left[1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \dots \right] dt$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\Rightarrow \cos t^2 = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{12}}{6!} + \dots$$

$$\Rightarrow \int_0^x \cos(t^2) dt = \left. t - \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \dots \right|_0^x$$

$$= x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$