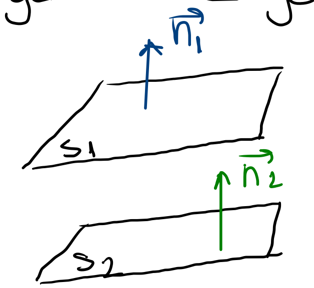
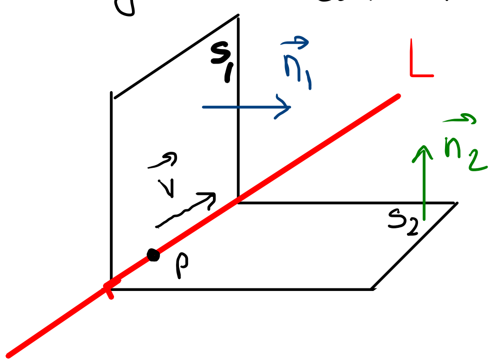
Kesişim Doğruları

Doğruların paralel olması için gerek ve yeter şart yönlerinin aynı olması gibi, iki düzlemin paralel olması için gerek ve yeter şart da normallerinin paralel olmasıdır.



$\vec{n}_1 = k.\vec{n}_2 \qquad (k \in \mathbb{R})$

Paralel olmayan iki düzlem bir doğruda kesişir.



$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Ör/ $S_1: 3x - 6y - 2z = 15$, $S_2: 2x + y - 2z = 5$ düzlemlerinin kesiştiği doğrunun skaler parametrik denklemlerini bulunuz.

$\vec{n}_1 = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$

$\vec{n}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1:&\ 3x-6y-2z=15 \\ S_2:&\ 2x+y-2z=5 \end{aligned}\right\} \quad z=0 \Rightarrow \begin{aligned} 3x-6y&=15 \\ \cancel{6}/\ 2x+y&=5 \end{aligned}$$

$$15x = 45 \Rightarrow x=3$$

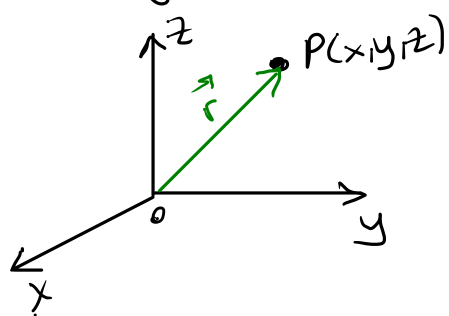
$$y=-1$$

$$\underset{}{P}(\overset{x_0}{3},\overset{y_0}{-1},\overset{z_0}{0}) \qquad \vec{v} = \overset{v_1}{14}\,\vec{i} + \overset{v_2}{2}\,\vec{j} + \overset{v_3}{15}\,\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+t.v_1 \\ y&=y_0+t.v_2 \\ z&=z_0+t.v_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=3+14t \\ y&=-1+2t \ ; \quad -\infty<t<\infty \\ z&=15t \end{aligned}\right\} \ L \text{ doğrusunun parametrizasyonu}$$

VEKTÖR-DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Üç boyutlu uzayda bir (x,y,z) noktasının yer vektörü $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ şeklindedir.

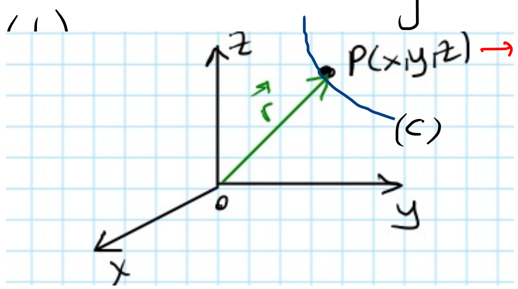


$$\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

Eğer $\vec{r}$ vektörünün bileşenleri değişim aralığı $[a,b]$ olan bir reel t değişkeninin fonksiyonları iseler bu taktirde $\vec{r}$'ye t'nin vektör değerli fonksiyonu deriz.

$\vec{r} = (x,y,z)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad a \le t \le b \right\} \Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \rightarrow \text{Bir objenin (ya da parçacığın) hareket denklemi.}$$



$\rightarrow P[x(t), y(t), z(t)]$

vektör değerli fonksiyonun tanım kümesi $\leftarrow D(\vec{r}(t)) =$ $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$'nin tanımlı olduğu ortak tüm t değerlerinin kümesidir.

Vektör değerli bir fonksiyon tanım kümesindeki herbir elemana bir vektör bağlar. Böyle bir fonksiyonun değer bölgesi tanım kümesindeki noktalara karşılık gelen vektörlerin topluluğudur.

Limit ve Süreklilik.

$\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ vektör değerli bir fonksiyon, t_0 herhangi bir sayı olsun. Eğer
$\vec{l} = l_1\vec{i} + l_2\vec{j} + l_3\vec{k}$ olmak üzere;

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t\to t_0}\left[x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}\right]$$

$$= \left[\lim_{t\to t_0} x(t)\right]\vec{\imath} + \left[\lim_{t\to t_0} y(t)\right]\vec{\jmath} + \left[\lim_{t\to t_0} z(t)\right]\vec{k}$$

$$= l_1\vec{\imath} + l_2\vec{\jmath} + l_3\vec{k}$$

oluyorsa $t \to t_0$ yaklaşırken $\vec{r}(t) \to \vec{l}$ limitine sahiptir denir.

Not: Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için tüm $t \in D(\vec{r}(t))$ değerlerinde $0 < |t - t_0| < \delta$ iken $|\vec{r}(t) - \vec{l}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, t, t_0'a yaklaşırken $\vec{r}$, $\vec{l}$ limitine sahiptir denir.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{l}$$

şeklinde gösterilir.

Ör/ $\vec{r}(t) = \cos t\, \vec{\imath} + \sin t\, \vec{\jmath} + t\,\vec{k} \Rightarrow \lim_{t\to \frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = ?$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath} + t\,\vec{k}\right) = \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\right)\vec{\imath} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\right)\vec{\jmath} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\right)\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

Süreklilik

NOT: $y=f(x)$ ise $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Rightarrow f$, x_0'da süreklidir

Tanım: Eğer $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$ ise $\vec{r}(t)$ vektör-değerli fonksiyonu tanım bölgesindeki bir t_0 noktasında sürekdidir denir.

Eğer $\vec{r}(t)$, tanım kümesindeki her noktada sürekli ise bu vektör değerli fonksiyona süreklidir denir.

$\vec{r}(t)$ vektör-değerli fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul her bir bileşeninin sürekli olmasıdır.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)=\vec{r}(t_0) \Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0} x(t)=x(t_0), \lim_{t\to t_0} y(t)=y(t_0), \lim_{z\to z_0} z(t)=z(t_0)$$

olmasıdır.

Teorem:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}\\ \lim\limits_{t\to t_0}\vec{R}(t)=\vec{b}\end{array}\right\}$$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere

1°) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\mp\vec{R}(t)\right]=\vec{a}\mp\vec{b}$

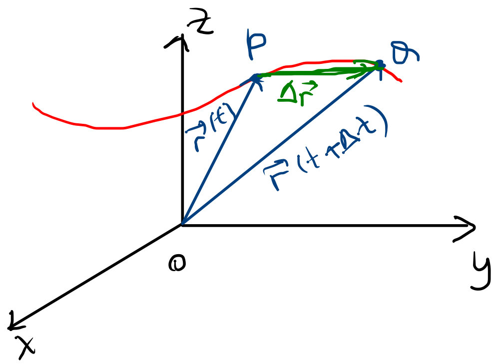
2°) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{R}(t)\right]=\vec{a}\cdot\vec{b}$

3°) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\lambda\vec{r}(t)\right]=\lambda\cdot\vec{a}$

4°) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\times\vec{R}(t)\right]=\vec{a}\times\vec{b}$

TÜREV $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ vektör-değerli fonksiyonun bileşenleri olan $x(t), y(t)$ ve $z(t)$ t değişkeninin türevlenebilen fonksiyonları olsunlar. Bu durumda t ve $t+\Delta t$ noktalarında

$$\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=\Delta\vec{r}$$



$$\Delta\vec{r}=\left[x(t+\Delta t)\vec{i}+y(t+\Delta t)\vec{j}+z(t+\Delta t)\vec{k}\right]-\left[x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\right]$$

$$=\left[x(t+\Delta t)-x(t)\right]\vec{i}+\left[y(t+\Delta t)-y(t)\right]\vec{j}+\left[z(t+\Delta t)-z(t)\right]\vec{k}$$

Δt sıfıra yaklaştıkça üç şey eşzamanlı oluşur.

1°) Eğri boyunca Q, P' ye yaklaşır, 2°) PQ kiriş doğrusu P'de eğrinin teğeti konumuna yaklaşır.

3) $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ oranı aşağıdaki limite yaklaşır;

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\vec{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\vec{k}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right] \vec{i} + \left[\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right] \vec{j} + \left[\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right] \vec{k} \right.$$

$$= \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] \vec{i} + \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] \vec{j} + \left[\frac{dz(t)}{dt} \right] \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \rightarrow$$ (Teğet vektörü) (Hız vektörü)

Herhangi bir t zamanında, hız vektörü $\vec{v}$'nin yönü hareketin yönüdür. Hız vektörünün modülü parçacığın süratini verir ve eğer varsa $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$ ivme vektörüdür.

İvme vektörünün modülü ivmeyi verir.

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow$ Hız vektörü , $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} \rightarrow$ ivme vektörü

$|\vec{v}| \rightarrow$ sürat

$|\vec{a}| \rightarrow$ ivme

$\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \rightarrow$ Hareketin yönü

Ör/ Uzayda hareketi

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 5\cos t\,\vec{k}$$

konum vektörü ile verilen parçacığın hızını, süratini ve ivmesini bulunuz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} - 5\sin t\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -2\cos t\,\vec{i} - 2\sin t\,\vec{j} - 5\cos t\,\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \sqrt{4 + 25\sin^2 t}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 25\cos^2 t} = \sqrt{4 + 25\cos^2 t}$$

NOT: Hareket eden parçacığın hızını onun sürati ile yönünün çarpımı olarak gösterebiliriz.

$$\text{Hız} = \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{sürat}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}_{\text{yön}}$$

Türev alma kuralları

$\vec{u}$ ve $\vec{w}$, t'nin türevlenebilir vektör fonksiyonları, $\vec{c}$ sabit bir vektör, λ keyfi skaler ve f türevlenebilir keyfi bir skaler fonksiyon olsun.

1) $\frac{d}{dt}\vec{c} = \vec{0}$

2) $\frac{d}{dt}[\lambda.\vec{u}(t)] = \lambda . \frac{d\vec{u}}{dt}$

3) $\frac{d}{dt}[f(t).\vec{u}(t)] = f'(t).\vec{u}(t) + f(t).\vec{u}'(t)$

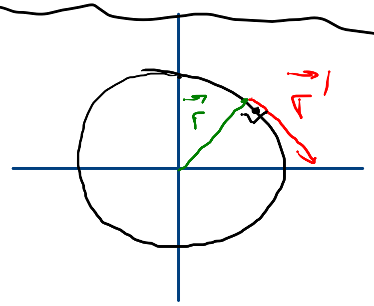
4) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \mp w(t)] = \vec{u}'(t) \mp \vec{w}'(t)$

5) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \cdot \vec{w}(t)] = \vec{u}'(t)\vec{w}(t) + \vec{u}(t)\vec{w}'(t)$

6) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \times \vec{w}(t)] = [\vec{u}'(t) \times \vec{w}(t)] + [\vec{u}(t) \times \vec{w}'(t)]$

7) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(f(t))] = f'(t).\vec{u}'(f(t))$

NOT: Eğer bir $\vec{r}(t)$ vektör değerli fonksiyonu tanım kümesinin her noktasında türevlenebilir ise vektör-değerli fonksiyon türevlenebilirdir denir.



8) Özel olarak $\vec{r}(t)$ uzunluğu sabit olan vektör-değerli bir fonksiyon ise $\vec{r}(t).\vec{r}'(t) = 0$ 'dır.