

Örnekler:

1) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$D(f)$:

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 0$$

$\rightarrow [-1, 1)$

$$1^{\circ}) \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$$

$$2^{\circ}) \begin{cases} 1+x \leq 0 \\ 1-x \leq 0 \end{cases}$$

x	-1	1
1+x	-	+
1-x	+	-
$\frac{1+x}{1-x}$	-	+

Yatay ve eğik asimptot yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1+(1-h)}{1-(1-h)}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2-h}{h}} = \infty \quad x=1 \text{ doğrusu D.A.}$$

$$x=0 \Rightarrow y=1$$

$$y=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x \rightarrow -x \Rightarrow \sqrt{\frac{1+(-x)}{1-(-x)}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \neq y$$

$$f' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \frac{1-x + (1+x)}{(1-x)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2 \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/2}} = \frac{1}{(1-x)^{3/2} (1+x)^{1/2}} > 0$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{3/2} \cdot (1+x)^{-1/2}}$$

$$f'' =$$

$$f' = (1-x)^{-3/2} (1+x)^{-1/2}$$

$$f'' = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1-x)^{-5/2} \cdot (-1) (1+x)^{-1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right) (1+x)^{-3/2} \cdot (1) \cdot (1-x)^{-3/2}$$

$$= -\frac{(1-x)^{-5/2} (1+x)^{-3/2}}{2} \left[-3 \cdot (1+x) + (1-x) \right]$$

$$= -\frac{(1-x)^{-5/2} (1+x)^{-3/2}}{2} (-4x-2)$$

$$= \frac{1+2x}{(1-x)^{5/2} (1+x)^{3/2}}$$

$$f'' = 0 \Rightarrow 1+2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	-1	-1/2	1
f''	—	•	+

$$x = -1/2$$

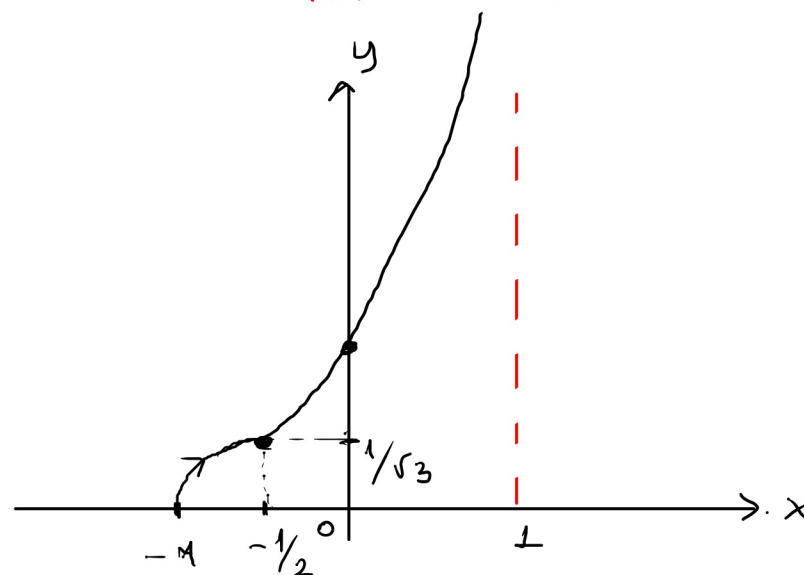
$$y = \sqrt{\frac{1+(-1/2)}{1-(-1/2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1/2}{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

B.N

x	-1	-1/2	0	1
f''	—	•	+	+
f'	+	+	+	+
f	0	1/√3	1	∞
	aşağı	yukarı	yukarı	



2) $y = \cot x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$D(f): \mathbb{R} - \{n\pi\} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Periyodu $T=\pi$ olduğundan π 'ye eşit uzunlukta bir aralıkta inceleme yapılabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \end{array} \right\} \text{D.A.}$$

$D(f): [0, \pi]$ olarak aldığımızdan

Yatay ve eğik asimptotu yoktur.

$$x \rightarrow -x \Rightarrow \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -y$$

orijine göre simetrik.

$$y=0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$$

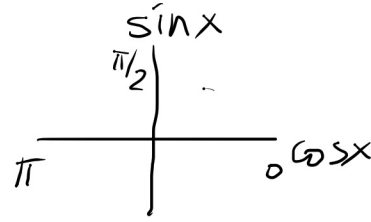
$$y' = -(1 + \cot^2 x) < 0 \quad \text{azalan bir fonk.}$$

$$= -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$y'' = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{array}{c|c} x & \pi/2 \\ \hline y'' & + \quad - \end{array}$$



	0	$\pi/2$	π
y''		+	-
y'		-	-
y	∞	0	$-\infty$

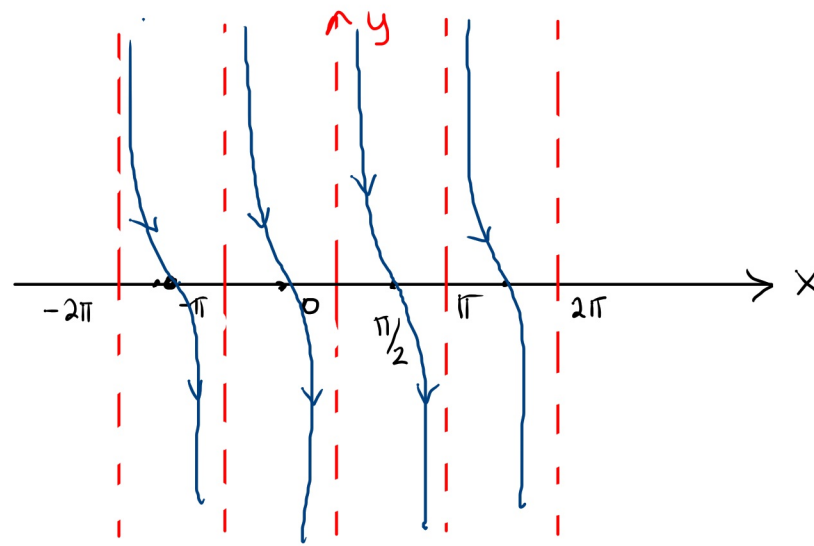
B.N.

yukarı aşağı

B.N.

x	0	$\pi/2$	π
y''		+	-
y'		-	-
y	∞	0	∞

yukarı aşağı



ör/ $y = x \ln x$ 'in grafiğini çiziniz.

$$D(f): (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

D.A. yoktur.

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$y=0 \Rightarrow x \ln x = 0 \begin{cases} x=0 \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln x = \infty \quad \text{Y.A. yoktur.}$$

E.A. olabilir.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln x}{x} = \infty$$

E.A. yoktur. Eğri kolu paraboliktir.

$$y' = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$x = e^{-1}$

 k.N.

x	$1/e$
y	$- \quad 0 \quad +$

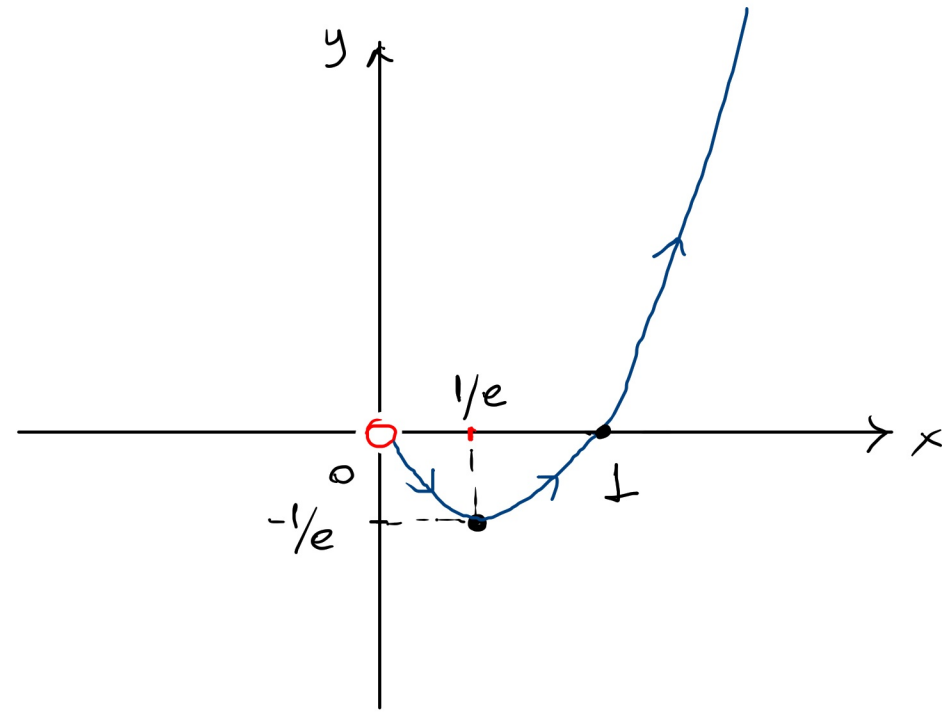
$$y'' = \frac{1}{x} > 0 \quad x \in (0, \infty)$$

$$y''|_{1/e} = \frac{1}{1/e} = e > 0$$

min. vordr.

x	0	$1/e$	1	∞
y''		+	+	+
y'		-	+	+
y		↑ yukhari	↑ yukhari	↑ yukhari

$-1/e$ 0 0 ∞



Ters türev ve Belirsiz integral

Sonlu veya sonsuz (açık, kapalı veya yarı açık) bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve bu aralık üzerinde tanımlı $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun.

Eğer F fonksiyonu I üzerinde türemlenebilir ve $\forall x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ ise, $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun I üzerinde ters türevi (veya ilkel fonksiyonu) denir.

NOT: $a, b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ durumunda F fonksiyonunun a noktasında sağdan, b noktasında soldan türemlenebilir olduğu varsayılır. Verilen bir noktada türevli bir fonksiyon bu noktada da sürekli olacağından, f 'in I üzerindeki ilkel fonksiyonu olan F fonksiyonu da I üzerinde sürekli'dir.

$$\underline{F(x) = \frac{x^4}{4}} \Rightarrow F'(x) = x^3 = f(x)$$

$f, \mathbb{R}$ 'de sürekli'dir F 'de $\mathbb{R}$ 'de sürekli'dir.

$$\underline{F(x) = \ln x.} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$$

$f, (0, \infty)$ 'de sürekli'dir F 'de $(0, \infty)$ 'de sürekli'dir.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 5 \Rightarrow F'(x) = x^3$$

$$F(x) = \ln x + 10 \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x}$$

Ters türevler tek değildir, eğer c herhangi bir sabit ise o zaman $F(x)=x+c$, herhangi bir aralıkta $f(x)=1$ 'in bir ters türevidir. Yani f 'in bir aralıktaki tüm ters türevleri, onun herhangi bir özel ters türevine sabitler eklenerek elde edilebilir.

Teoremi: $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde türemlenebilir iki $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının aynı bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonları (ters türevleri) olması için gerek ve yeter koşul $G(x) - F(x)$ fonksiyonunun I üzerinde sabit bir fonksiyon olmasıdır. Yani, c keyfi bir sayı olmak üzere $\forall x \in I$ için $G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$ olmasıdır.

Tanım: (Belirsiz integral)

$I \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerindeki tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine f 'in I üzerinde belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x) dx$$

şeklinde gösterilir.

Eğer, $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu f 'in I üzerinde bir ters türevi (ilkel fonksiyonu) ise c keyfi bir sayı olmak üzere

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ olur.}$$

int. işareti $\rightarrow$ integrand $\rightarrow$ ilkel fonk. $\rightarrow$ integrasyon sabiti.

$$f(x) = F'(x)$$

$$F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$F(x) \rightarrow f(x)' \text{in} \\ \text{ilkel fonk.} \\ \text{(Ters türev)}$$

$$f(x) \Rightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$$

Integral Tabbsu

- $\int 1 \cdot dx = x + C$
- $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$

$$((x)') = 1$$

$$((\frac{x^4}{4})') = x^3$$

$$((- \cos x)') = \sin x$$

$$((\sin x)') = \cos x$$

$$((e^x)') = e^x$$

$$((\ln|x|)') = \frac{1}{x}$$

$$((\sqrt{x})') = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\bullet \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

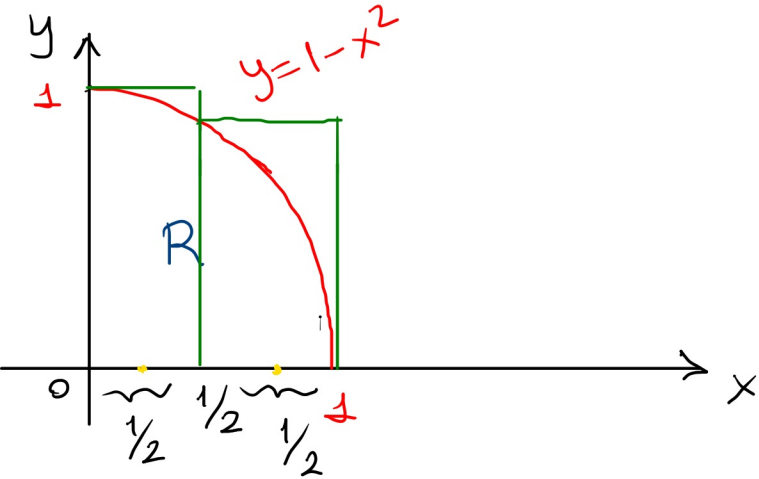
$$\bullet \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\bullet \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\bullet \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$$

$$\bullet \int a^x \cdot \ln a dx = a^x + C$$

Alan ve Sonlu Toplamlarla Tahminde Bulunmak

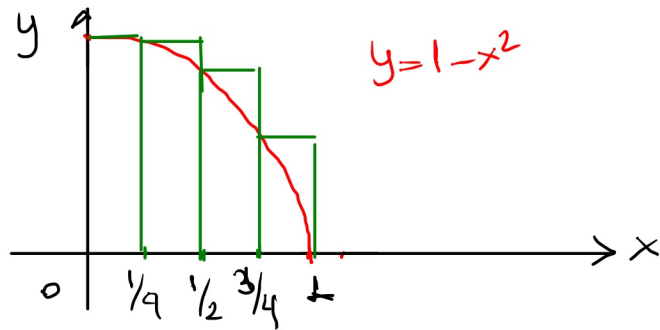


x -ekseninin üstünde, $y = 1 - x^2$ eğrisinin altında ve $x = 0$, $x = 1$ doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulmak istediğimizi varsayalım.

$[0, 1]$ aralığını 2 tane alt aralığa bölelim, herbir alt aralığın sol uç noktasını alalım. f en büyük değerini alt aralıkların sol uç noktasında alır. Oluşan dikdörtgenler R bölgesini içine aldığından dikdörtgenlerin alanları toplamı

R bölgesinin alanından daha büyüktür.

$$A \cong f(0) \cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0,875$$



$$A = f(0) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \\ = 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0,78125$$