TÜREVİN UYGULAMALARI

Ekstrem Değerler (Ekstremumlar)

Maksimum ve Minimum Değerler

Tanım: (Mutlak Ekstrem Değerler):

Eğer f 'in tanım bölgesindeki her x için $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde (yine f 'in tanım bölgesinde) bir x_0 varsa, f fonksiyonu x_0 noktasında $f(x_0)$ mutlak maksimum değerine sahiptir denir.

Benzer olarak, eğer f 'in tanım bölgesindeki her x için $f(x_1) \leq f(x)$ olacak şekilde (yine f 'in tanım bölgesinde) bir x_1 varsa, f fonksiyonu x_1 noktasında $f(x_1)$ mutlak minimum değerine sahiptir denir.

NOT: ⊢ $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $(n \in \mathbb{N})$, noktasında mutlak maksimum değeri olan 1 'e ulaşır. O halde bir fonksiyon mutlak max ya da min değerine birden fazla noktada sahip olabilir.

⊢ Diğer taraftan $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun ($x \to 0^+$ için sonsuza yaklaştığında) (sonlu) bir mutlak maksimumu yoktur. O halde, her fonksiyonun mutlak max ya da min değerine sahip olması gerekmiyor.

+ Fonksiyon sınırlı olsa bile, bu bir fonksiyonun mutlak maksimum ya da minimuma sahip olmasını garanti etmez.

Örneğin $f(x) = x$, $x \in (0,1)$; fonksiyonu mutlak maksimum ya da minimum değerine sahip değildir.

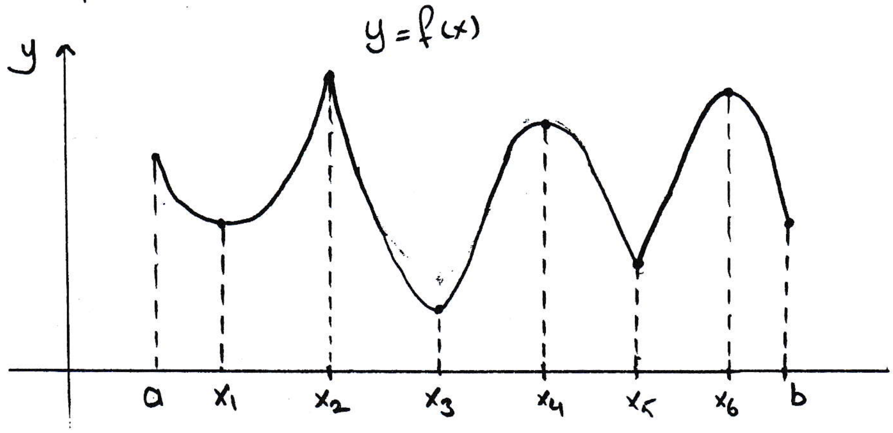
Tanım: Bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerine ekstrem değerler denir.

Ekstrem Değerlerin Varlığı (Existence of extreme values)

Teorem: (Varlık Teoremi):

Eğer f 'in tanım bölgesi. sonlu kapalı bir aralık veya bu şekildeki aralıkların sonlu bir birleşiminden oluşuyorsa ve f bu bölgede sürekli ise o zaman f fonksiyonu bir mutlak maksimum değere ve bir mutlak minimum değere sahiptir.

NOT:



Yukarıdaki şekle göre f 'in mutlak maksimum değeri $f(x_2)$ ve mutlak minimum değeri $f(x_3)$ 'dür.

Bu ekstrem değerlere ek olarak, f 'in başka "yerel" maksimum ve minimum değerler de vardır.

f fonksiyonu x_2, x_4 ve x_6 noktalarında yerel maksimum değerlere, x_1, x_3, x_5 noktalarında yerel minimum değerlere sahiptir.

Mutlak maksimum; bu yerel maksimumların en büyüğü ve
(global)
Mutlak minimum; bu yerel minimumların en küçüğüdür.

Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz:

~~Teorem~~ Tanım : (Yerel Ekstrem Değerler)

Bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x-x_0|<h$ iken $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde bir $h>0$ sayısı varsa, x_0 noktasında $f(x_0)$ yerel maksimum değerine sahiptir.

Benzer şekilde, bir f fonksiyonu, eğer $x \in D(f)$ ve $|x-x_0|<h$ iken $f(x) \geq f(x_0)$ olacak şekilde bir $h>0$ sayısı varsa, x_0 noktasında $f(x_0)$ yerel minimum değerine sahiptir.

NOT: Yukarıdaki tanıma göre, eğer f fonksiyonu x'de bir mutlak maksimum (ya da mutlak minimum) değere sahipse, f'in tanım kümesi x'e yeterince yakın olan noktaları içerecek şekilde kısıtlandığında, f bir yerel maksimum (ya da minimum) değere sahip olur.

Kritik Noktalar, Tekil Noktalar ve Uç Noktalar

Yukarıda çizdiğimiz şekle göre bir $f(x)$ fonksiyonu sadece, aşağıda vereceğimiz 3 çeşit (özel) noktada yerel ekstrem değerlere sahip olabilir:

(i) f'in kritik noktaları
(yani; $f'(x)=0$ olan $x \in D(f)$ noktaları)

(ii) f'in tekil noktaları
(yani; $f'(x)$'in tanımlı olmadığı $x \in D(f)$ noktaları)

(iii) f'in tanım bölgesinin uç noktaları
(yani; $D(f)$'de olan fakat (tamamen) $D(f)$'in içinde kalan herhangi bir açık aralığa dahil olmayan noktadır.)

Bu tanıma göre; yukarıdaki şekilde x_1, x_3, x_4 ve x_6 kritik noktalar, x_2 ve x_5 tekil noktalar ve a ile b ise uç noktalardır.

(Locating extreme values)

Teorem: Bir I aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonu bir $x = x_0 \in I$ noktasında bir yerel maksimum (veya yerel minimum) değerine sahipse o zaman, x_0 noktası ya f'in bir kritik noktası, ya f'in bir tekil noktası, ya da I'nın bir uç noktasıdır.

İspat:

f'in x_0'da bir yerel max değerine sahip olduğunu ve x_0'ın bir uç nokta veya tekil nokta olmadığını kabul edelim. O zaman bir $h>0$ için, $f(x)$ fonksiyonu $(x_0 - h, x_0 + h)$ aralığında tanımlı ve (bu aralık için) bir mutlak maksimum değerine sahiptir. x_0 tekil nokta olmadığından $f'(x_0)$ vardır. Daha önce ispatladığımız bir teoreme göre $f'(x_0) = 0$'dır. O halde x_0 noktası kritik nokta olmak zorundadır.

NOT: Yukarıdaki teoreme göre bir fonksiyon, uç noktalar, tekil noktalar ve kritik noktalar dışında kalan noktalarda ekstrem değerlere sahip olamaz.

Mutlak Ekstrem Değerlerin Bulunması

Eğer bir f fonksiyonu kapalı bir aralık ya da sonlu sayıda kapalı aralıkların birleşimi üzerinde tanımlı ise, bu bölümde ifade ettiğimiz birinci teorem bize f'in bir mutlak max ve bir mutlak minimuma sahip olması gerektiğini,
İkinci teorem ise bize bunları nasıl bulacağımızı söyler.
Bunun için sadece, f'in kritik noktalar, tekil noktalar ve uç noktalardaki değerlerini kontrol etmeliyiz.

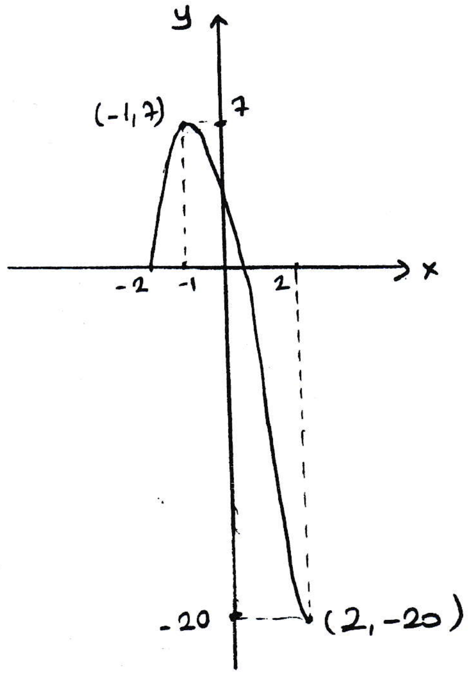
Örnek: $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, $-2 \leq x \leq 2$ fonksiyonunun max ve min değerlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen g(x) fonk.nu bir polinom olduğundan, heryerde türevi vardır, dolayısıyla tekil noktalara sahip olamaz. Kritik noktaları bulmak için türev almalıyız:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3) \text{ olduğundan,}$$

$x=-1$ veya $x=3$ ise $g'(x)=0$ olacaktır.
$x=3$ tanım kümesine dahil olmadığından bu $x=3$ noktası noktayı gözardı edeceğiz.
O halde sadece g'nin $x=-1$ kritik noktası ve $x=-2, 2$ uç noktalarındaki değerlerini gözönüne almalıyız.

$g(-2)=0, \quad g(-1)=7, \quad g(2)=-20.$

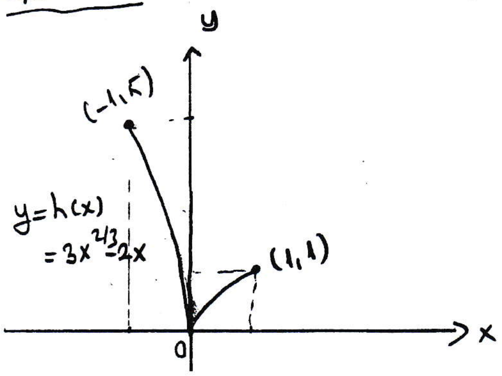


Bu sonuçlara göre,

g'nin $-2 \leq x \leq 2$ aralığındaki maksimum değeri $x=-1$ kritik noktasındaki değeri olan $g(-1)=7$ ve minimum değeri ise $x=2$ uç noktasındaki değeri olan $g(+2)=-20$ dir.

Örnek: $h(x)=3x^{2/3}-2x$ 'in $[-1,1]$ 'deki max ve min değerlerini bulunuz.

Çözüm:



$h'(x)=2x^{-1/3}-2=2(x^{-1/3}-1)$ ve

$x^{-1/3}$ fonksiyonu $x=0$'da tanımlı olmadığından bu nokta tekil noktadır.

Ayrıca h fonksiyonu için $x^{-1/3}=1$ olmasını sağlayan $x=1$ noktası bir kritik noktadır ki bu nokta aynı zamanda bir uç noktadır. O halde biz h'ın $x=0$, $x=1$ ve $x=-1$ deki değerlerini incelemeliyiz:

$h(-1)=5$, $h(0)=0$, $h(1)=1$ olduğundan, h fonksiyonu $x=-1$ uç noktasında maksimum değeri 5'e ve $x=0$ tekil noktasında minimum değeri 0'a sahiptir.

Birinci Türev Testi

Teorem (Birinci Türev Testi):

I. Kısım (Kritik ve Tekil, İç Noktaların Test Edilmesi):

f fonksiyonu tanım bölgesinin bir uç noktası olmayan x_0'da sürekli olsun.

(a) Eğer x_0 noktasını içeren ve (a, x_0)'da $f'(x) > 0$ ve (x_0, b)'de $f'(x) < 0$ olacak şekilde bir açık (a,b) aralığı varsa o zaman, f x_0'da bir yerel maksimum değere sahiptir.

(b) Eğer x_0 noktasını içeren ve (a, x_0)'da $f'(x) < 0$ ve (x_0, b)'de $f'(x) > 0$ olacak şekilde bir açık (a,b) aralığı varsa o zaman, f x_0'da bir yerel minimum değere sahiptir.

II. Kısım (Uç Noktaların Test Edilmesi):

⊢ f fonksiyonu tanım bölgesinin bir sol uç noktası olan a'da sağdan sürekli olsun.

(c) Eğer bir (a,b) aralığında $f'(x)>0$ ise f, a'da bir yerel minimum değere sahiptir.

(d) Eğer bir (a,b) aralığında $f'(x)<0$ ise f, a'da bir yerel maksimum değere sahiptir.

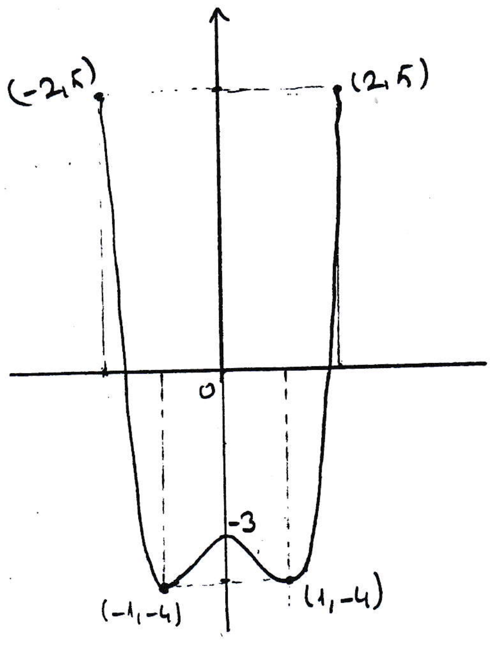
⊢ f fonksiyonu tanım bölgesinin bir sağ uç noktası olan b'de soldan sürekli olsun

(e) Eğer bir (a,b) aralığında $f'(x)>0$ ise f, b'de bir yerel maksimum değere sahiptir.

(f) Eğer bir (a,b) aralığında $f'(x)<0$ ise f, b'de bir yerel minimum değere sahiptir.

$f'(x)$'in negatif / pozitif özelliklerini ve $f(x)$'in bunların sonucu olan artan / azalan davranışını aşağıdaki tabloda özetleyebiliriz:

	Uç N.		Kri. N.		K.N.		K.N.		Uç N.
x	-2		-1		0		1		2
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5
	max (mutlak)		min (mutlak)		max (yerel)		min (mutlak)		max (mutlak)



Verilen aralık kapalı ve sınırlı olduğundan f fonksiyonu mutlak maksimum ve minimum değerlerine sahip olmalıdır. Bunlar

∓ 2'deki 5 ve

∓ 1'deki -4 değerlerdir.

Örnek: $f(x) = x - x^{2/3}$ 'ün $[-1, 2]$ 'deki yerel ve mutlak ekstrem değerlerini bulup sınıflandırınız. f 'in grafiğini kaba taslak çiziniz.

Çözüm: $f'(x) = 1 - \frac{2}{3} x^{-1/3} = \dfrac{x^{1/3} - 2/3}{x^{1/3}}$

f 'in $x=0$ tekil noktası ve $x = \frac{8}{27}$ kritik noktası vardır.

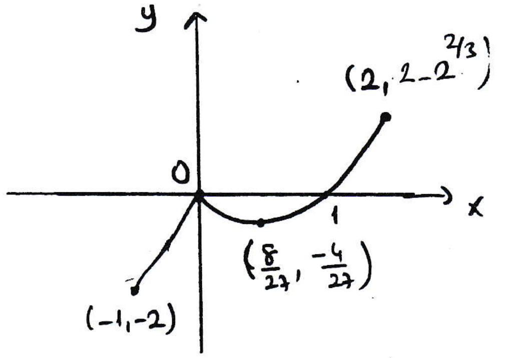
Uç noktalar -1 ve 2 'dir.

Bu noktalara karşılık gelen değerler,

$f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{8}{27}\right) = -\frac{4}{27}$ ve $f(2) = 2 - 2^{2/3} \cong 0.4126$.

Ayrıca $f(1)=0$ 'dır, yani grafik $x=1$ 'de x-eksenini keser.

	U.N.		T.N.		K.N		U.N.
x	-1		0		$8/27$		2
f'		$+$	tanımsız	$-$	0	$+$	
f	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-4/27$	$\nearrow$	0.41
	min		max		min		max



f 'in iki yerel maksimum ve iki yerel minimumu var.

f 'in mutlak maksimum değeri $x=2$ 'de aldığı $2-2^{2/3}$ ve

f 'in mutlak minimum değeri $x=-1$ 'de aldığı -2 değeridir.

$f'(0+h) = 1 - \dfrac{2}{3h^{1/3}} < 0$

$f'(0-h) = 1 - \dfrac{2}{3(-h)^{1/3}} = 1 + \dfrac{2}{3h^{1/3}} > 0$

Kapalı, Sonlu Aralıklarda Tanımlanmamış Fonk.lar

(1. Teorem)

Daha önce gördüğümüz bir sonuca göre eğer bir f fonk.nu kapalı ve sonlu bir aralıkta sürekli ise mutlaka bu aralıkta maksimum ve minimum değerlere sahiptir.

Fakat f in tanımlandığı aralık kapalı ve sınırlı değilse bu sonuç bu değerlerin varlığını garanti etmek için kullanılamaz. Buna karşın, f yine de böyle ekstrem değerlere sahip olabilir.

1. Teorem

<u>Teorem</u> (Açık Aralıklarda Ekstrem Değerlerin Varlığı):

Eğer f fonksiyonu (a,b) açık aralığında sürekli ve eğer $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$, $\lim_{x\to b^-} f(x)=M$ ise o zaman aşağıdakiler olacaktır (sağlanır):

(i) Eğer bir $u\in(a,b)$ için $f(u)>L$ ve $f(u)>M$ ise o zaman f fonksiyonu (a,b) aralığında bir mutlak maksimum değere sahiptir.

(ii) Eğer bir $v\in(a,b)$ için $f(v)<L$ ve $f(v)<M$ ise o zaman f fonksiyonu (a,b) aralığında bir mutlak minimum değere sahiptir.

<u>İspat</u>:

Bu teoremde a, $-\infty$ olabilir. O zaman $\lim_{x\to a^+}$ yerine $\lim_{x\to -\infty}$ gelir.

b, ∞ olabilir " $\lim_{x\to b^-}$ yerine $\lim_{x\to \infty}$ gelir.

Ayrıca L yada M (veya her ikisi) ya ∞ ya da $-\infty$ olabilir.

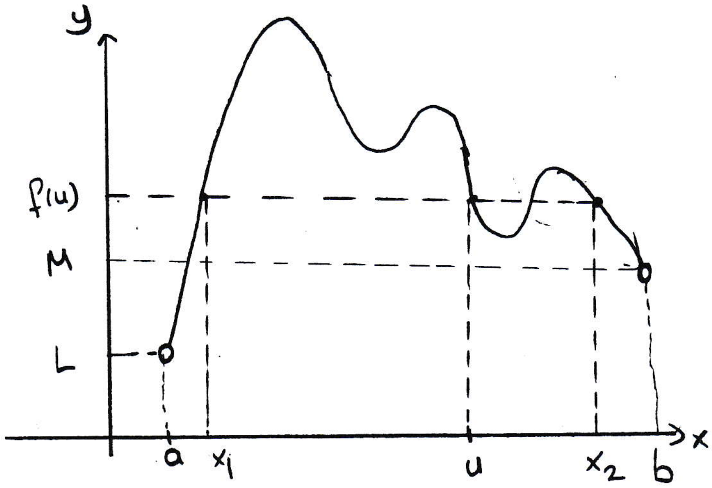
İspat :

(i)

Bize $f(u) > L$ ve $f(u) > M$

olacak şekilde bir $u \in (a,b)$

veriliyor.



Burada L ve M

sonlu sayılar ya da $-\infty$

olabilir.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ olduğundan,

$a < x < x_1$ iken $f(x) < f(u)$ olacak şekilde bir $x_1 \in (a,u)$ vardır.

Benzer şekilde

$x_2 < x < b$ iken $f(x) < f(u)$ olacak şekilde bir $x_2 \in (u,b)$ vardır.

(Şekle bakınız.)

O halde, (a,b)'nin kapalı ve sonlu alt aralığı olan $[x_1, x_2]$'nin

dışındaki tüm noktalarında $f(x) < f(u)$ olacaktır.

Daha önce gördüğümüz bir teoreme göre f fonksiyonu,

sürekli olduğundan, $[x_1, x_2]$ aralığında bir w maksimum

değerine sahip olmalıdır.

$u \in [x_1, x_2]$ olduğundan $f(w) \geq f(u)$ ve de, dolayısıyla,

her $x \in (a,b)$ için $f(w) \geq f(x)$ olacaktır. Bu da $f(w)$'nin

mutlak maksimum değer olduğunu gösterir.

(ii) İspat yukarıdakine benzer olarak yapılır.

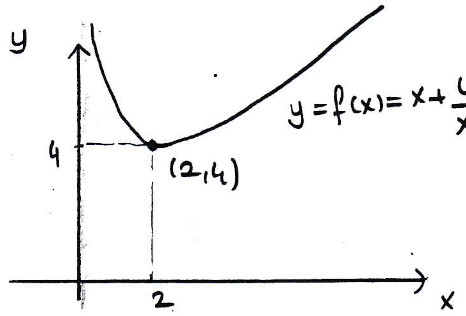
NOT: Aralık açık olduğundan uç noktalar yoktur, bu durumda ekstrem değerler aramak için sadece kritik ve tekil noktaları kontrol etmeliyiz.

Örnek: $f(x) = x + \frac{4}{x}$ fonksiyonun $(0,\infty)$ aralığındaki ekstrem değerlerini araştırınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ dur.

f fonksiyonu sürekli ve (örneğin) $1 \in (0,\infty)$ için $f(1) = 5 < \infty$ olduğundan bir önceki teorem bize $(0,\infty)$ aralığında f'in bir mutlak minimuma sahip olduğunu garanti eder. Bunun için f'in kritik ve tekil noktalarını kontrol etmeliyiz:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$$ olduğundan, $x=2$ ve $x=-2$ için $f'(x)=0$ 'dır. f'in tanım kümesi $(0,\infty)$ olduğundan, f bu aralıkta tekil noktaya sahip değildir ve yine bu aralıkta sadece $x=2$ 'de kritik noktaya sahiptir.



Bu durumda, f'in mutlak minimum değeri $f(2)=4$ olacaktır.

Konkavlık ve Büküm Noktaları

Birinci türev gibi, bir fonksiyonun ikinci türevi de bir fonksiyonun davranışı ve onun grafiğinin şekli hakkında bize bilgi sağlar.
(verir)

<u>Tanım</u> (Konkavlık):

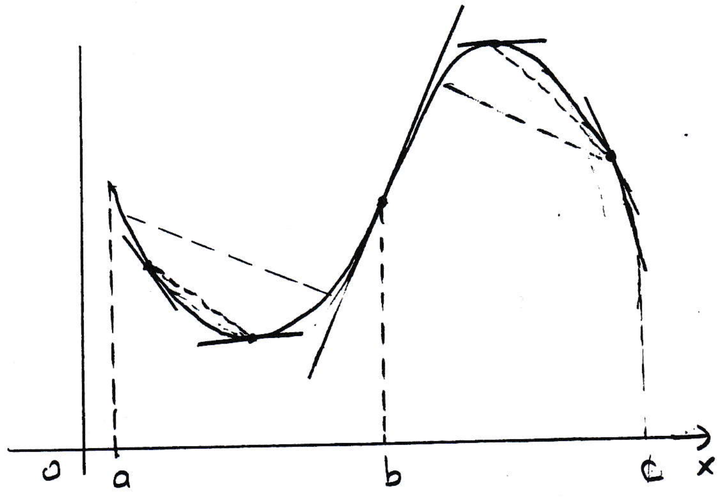
Eğer bir f fonksiyonu açık bir I aralığında türevlenebilir ve f' türevi I üzerinde artan bir fonksiyon ise f fonksiyonu I üzerinde yukarı doğru konkavdır denir.

Benzer şekilde, eğer f' türevi I üzerinde mevcut ve eğer I üzerinde azalan ise o zaman f fonksiyonu I üzerinde aşağı doğru konkavdır denir.

NOT: Konkavlık, sadece, türevlenebilir fonksiyonların türevlerinin sabit olmadığı aralıklar üzerinde tanımlanmıştır.

Yukarıdaki tanıma göre, eğer bir aralıkta bir fonksiyonun grafiği bir doğru parçası ise fonksiyon ne yukarı ne de aşağı doğru konkavdır. Bu durumda fonksiyonun böyle bir aralıkta konkavlığa sahip olmadığını söyleriz.

(Ayrıca eğer bir fonksiyon bir aralık üzerinde aşağıya doğru konkav başka bir aralık üzerinde yukarı doğru konkav ise, fonksiyonun bu iki aralık üzerinde zıt konkavlıklara sahip olduğunu söyleriz.)



Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonu

(a, b) aralığında yukarı doğru konkav,

(b, c) aralığında aşağı doğru konkavdır.

Konkavlık için bazı geometrik gözlemler yapılabilir:

(i) Eğer bir açık aralıkta f fonksiyonu yukarı doğru konkav ise, bu aralıkta, f 'in grafiği teğetlerinin üzerinde kalır, eğri üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçaları ise grafiğin üzerinde kalır.

(ii) Eğer bir açık aralıkta f fonksiyonu aşağı doğru konkav ise, bu aralıkta f 'in grafiği teğetlerinin altında kalır, eğri üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçaları ise grafiğin altında kalır.

(iii) Eğer f fonksiyonu bir noktada teğete sahip ve f 'in bu noktanın her iki tarafındaki konkavlıkları zıt ise o zaman f 'in grafiği bu noktada teğeti keser.

Böyle noktalara büküm noktaları denir.

[Bir fonk.nun konkavlık yönünün değiştiği noktaya büküm noktası (dönüm) denir.]

Tanım: (Büküm Noktaları)

Bir $y=f(x)$ eğrisi ve $x=x_0$ noktası verildiğinde eğer

(a) $y=f(x)$ 'in grafiği $x=x_0$ 'da bir teğete sahip,

ve

(b) f 'in x_0 'ın her iki tarafındaki konkavlıkları birbirine zıt

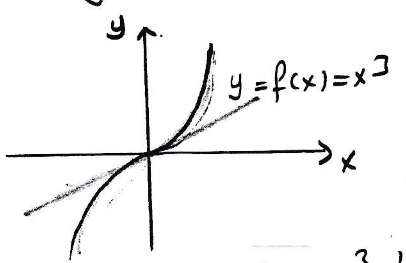
ise $y=f(x)$ eğrisi $x=x_0$ 'da bir büküm noktasına sahiptir denir.

NOT: Yukarıdaki tanımda (a) şıkkı bize,

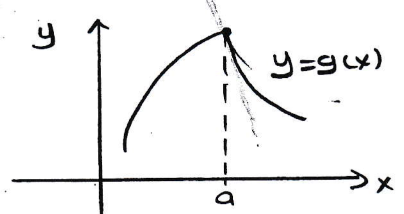
f 'in ya x_0 'da türevlenebilir ya da grafiğinin bir dik teğete sahip olması gerektiğini ve

(b) şıkkı ise, grafiğin, teğeti x_0 'da kesmesi gerektiğini söyler.

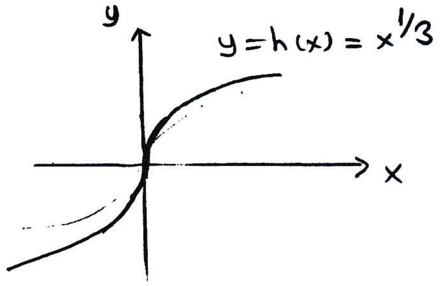
NOT: Bir fonksiyon bir kritik ya da tekil noktada bir büküm noktasına sahip olabilir ya da olmayabilir. Genelde, eğer bir C eğrisi bir P noktasında teğete sahip ve C'nin P 'nin her iki tarafındaki yay parçaları bu teğetin zıt yönlerinde kalıyorsa P noktası C eğrisinin bir büküm noktasıdır.



$x=0$ noktası $f(x)=x^3$ 'ün bir kritik noktasıdır. Bu nokta f 'in büküm noktasıdır.



$y=g(x)$ 'in konkavlığı a 'nın her iki tarafında birbirinin tersidir. Fakat g'nin grafiği bir teğete sahip olmadığından, $x=a$ büküm noktası değildir.



$x=0$ noktası h'ın bir tekil noktası olmasına karşın, bu nokta aynı zamanda h'ın bir büküm noktasıdır.

Teorem (Konkavlık ve İkinci Türev):

(a) Eğer I üzerinde $f''(x)>0$ ise f, I üzerinde yukarı doğru konkavdır.

(b) Eğer I üzerinde $f''(x)<0$ ise f, I üzerinde aşağı doğru konkavdır.

(c) Eğer x_0 f'in büküm noktası ve $f''(x_0)$ mevcut ise o zaman $f''(x_0)=0$ 'dır.

İspat: (a) $f''(x)>0$ olduğundan, $f'(x)$ artandır. O halde, tanıma göre f, I 'da yukarı doğru konkavdır.

(b) $f''(x)<0$ olduğundan, $f'(x)$ azalandır. O halde, tanıma göre f, I 'da aşağı doğru konkavdır.

(c) Eğer x_0, f'in büküm noktası ve $f''(x_0)$ mevcut ise, o zaman f, x_0'ı içeren bir açık aralıkta türevlenebilir olmalıdır. f', x_0'ın bir tarafında artan diğer tarafında azalan olduğundan, o zaman f', x_0 'da bir yerel maksimum veya minimuma sahip olmalıdır. Bu ise

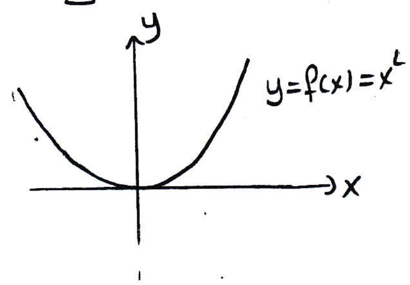
$$(f')'(x_0) = f''(x_0) = 0$$

olduğunu gösterir.

NOT: Yukarıdaki teorem bize,

İkinci türevi mevcut olan bir fonksiyonun büküm noktalarını bulmak için, sadece $f''(x)=0$ eşitliğini sağlayan noktalara bakmamız gerektiğini söyler. Bununla beraber, böyle bir nokta her zaman bir büküm noktası olmak zorunda değildir.

Örneğin, $f(x)=x^4$ için $f''(x)=0$ olmasına karşın $x=0$ bir büküm noktası değildir. x^4 fonksiyonu her aralıkta yukarı doğru konkavdır.



Örnek: $f(x)=x^6-10x^4$'ün konkavlık aralıklarını ve büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x)=6x^5-40x^3$, $f''(x)=30x^4-120x^2=30x^2(x-2)(x+2)$ old. dan $x=0, -2, 2$'de $f''(x)=0$ dır

$(-\infty,-2)$ ve $(2,\infty)$ aralıklarında $f''(x)>0$ olduğundan bu aralıklarda yukarı doğru konkav

$(-2,0)$ ve $(0,2)$ aralıklarında $f''(x)<0$ olduğundan bu aralıklarda aşağı doğru konkavdır.

-2 ve 2'den geçerken $f''(x)$ işaret değiştirir.

$f'(\mp 2)$ mevcut olduğundan, tanıma göre

$(\mp 2, f(\mp 2))=(\mp 2, -96)$'da f büküm noktalarına sahiptir.

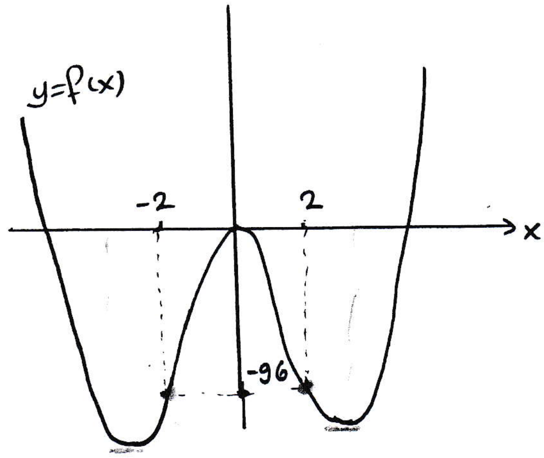
$x=0$'da $f''(x)=0$ olmasına karşın, her $x\neq 0$ için $x^2>0$ old. dan, $f''(x)$ $x=0$'dan geçerken işaret değiştirmez.

(x_0'ın yeterince yakın bir komşuluğunda, $f''(x)$'in işareti negatif)

O halde $x=0$'da herhangi bir büküm yoktur.

Bu bilgileri tablo ile özetleyelim:

x		-2		0		2	
f''	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	büküm	$\cap$		$\cap$	büküm	$\cup$



örnek

$f(x)=x^4-2x^3+1$ 'in artan ve azalan olduğu aralıkları, yerel ekstrem noktalarını ve konkavlıklarını belirleyiniz. Bu bilgileri kullanarak f 'in grafiğini kabaca çiziniz.

Çözüm: $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3) \Rightarrow x=0$ ve $x=\frac{3}{2}$ 'de $f'(x)=0$

$(-\infty,\frac{3}{2})$ 'de azalan, $(\frac{3}{2},\infty)$ 'da artan

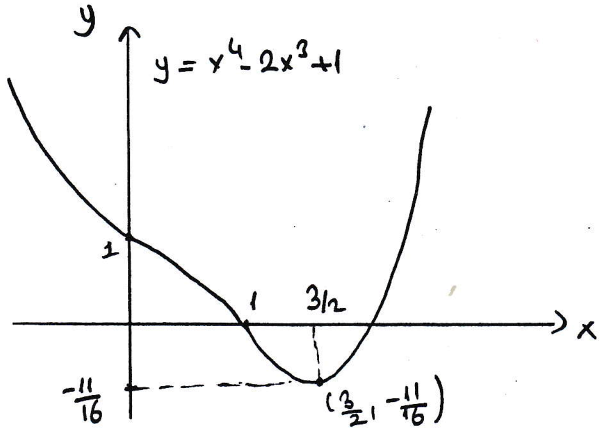
$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1) \Rightarrow x=0$ ve $x=1$ 'de $f''(x)=0$

$(-\infty,0)$ ve $(1,\infty)$ 'da yukarı doğru konkav, $(0,1)$ 'de aşağıya doğru konkav

$f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(\frac{3}{2})=-\frac{11}{16}$

Tablo ile özetleyelim:

x		K.N 0		1		K.N $3/2$	
f'	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
f	$\searrow$ $\cup$		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cup$	min	$\nearrow$ $\cup$



$x=0$ kritik noktası aynı zamanda bir büküm noktasıdır.

İKİNCİ TÜREV TESTİ

Bir f fonksiyonu, bir kritik noktasını içeren bir aralıkta eğer aşağı doğru (veya yukarı doğru) konkav ise bu nokta f'in bir yerel maksimum (veya minimum) noktası olacaktır. Buna göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem (İkinci Türev Testi):

(a) Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)<0$ ise o zaman f x_0'da bir yerel maksimum sahiptir.

(b) Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)>0$ ise o zaman f x_0'da bir yerel minimum sahiptir.

(c) Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)=0$ ise herhangi bir sonuca varamayız; f x_0'da bir yerel maksimum, veya bir yerel minimum ya da bir büküm noktasına sahip olabilir.

İspat:

(a) $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)<0$ olduğunu kabul edelim.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=f''(x_0)<0$$ olduğundan,

yeterince küçük pozitif h'lar için $f'(x_0+h)<0$ ve yeterince küçük negatif h'lar için $f'(x_0+h)>0$ olacaktır. Birinci türev testine göre f x_0'da bir yerel maksimuma sahip olmalıdır.

(b) 'nin ispatı benzer şekilde yapılır.

(c) $f(x)=x^4$, $f(x)=-x^4$, $f(x)=x^3$ fonksiyonlarının

hepsi $f'(0)=f''(0)=0$'ı sağlar. Fakat x^4; $x=0$'da minimuma

sahiptir, x^3 ise $x=0$'da ne minimum ne de maksimuma

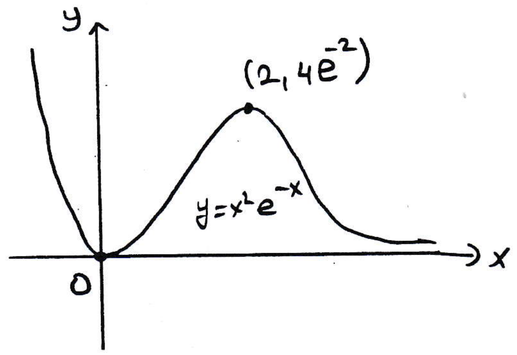
sahiptir, buna karşın $x=0$, x^3'ün büküm noktasıdır.

O halde, $f''(x)=0$'ı sağladığını bildiğimiz herhangi bir

kritik nokta için çıkarımda bulunamayız.

Örnek $f(x)=x^2e^{-x}$'in kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

Çözüm:



$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

$\Rightarrow x=0$ ve $x=2$'de $f'(x)=0$

$f''(x)=(2-4x+x^2)e^{-x}$

$f''(0)=2>0$, $f''(2)=-2e^{-2}<0$.

İkinci türev testine göre, f fonksiyonu $x=0$'da bir yerel minimuma, $x=2$'de bir yerel maksimuma sahiptir.

NOT: Birçok fonksiyon için ikinci türevi hesaplamak birinci türeve göre daha zordur, dolayısıyla birinci türev testi kritik noktaları sınıflamak için daha kullanışlı görünüyor. Ayrıca, birinci türev testi, kritik noktaların yanı sıra, uç noktalar ve tekil noktalarda olabilecek yerel ekstrem değerleri de sınıflandırılabilir.

İkinci türevin bir kritik noktada sıfır olması gibi bazı durumları incelemek için ikinci türev testini genelleştirip yüksek mertebeden bir türev testi vermek mümkündür.

Yüksek Mertebeden Türev Testi :

Teorem : Bir f fonksiyonu verilmiş olsun ve bir $k \geq 2$ için

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ olsun.

Eğer k tek ise $x = x_0$ bir büküm noktasıdır.

Eğer k çift ve

$$\begin{cases} f^{(k)}(x_0) > 0 \text{ ise } x = x_0 \text{ bir yerel min noktasıdır.} \\ f^{(k)}(x_0) < 0 \text{ ise } x = x_0 \text{ bir yerel max noktasıdır.} \end{cases}$$

Örnek $f(x) = (x-1)^5 + 3$ fonksiyonun düzlemde gösterdiği eğrinin büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm :

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 5(x-1)^4 \Rightarrow f'(1) = 0 \\ f''(x) &= 20(x-1)^3 \Rightarrow f''(1) = 0 \\ f'''(x) &= 60(x-1)^2 \Rightarrow f'''(1) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= 120(x-1) \Rightarrow f^{(4)}(1) = 0 \\ f^{(5)}(x) &= 120 \Rightarrow f^{(5)}(1) = 120 \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Yukarıdaki teoreme göre $x = 1$ 'de f bir büküm noktasına sahiptir.

(NOT: Yukarıdaki teorem bütün fonksiyonları test etmek için yeterli değildir !)

BASİT EĞRİ ÇİZİMLERİ

Bir f fonksiyonun $y=f(x)$ grafiğini çizerken, kullanabileceğimiz bilgiyi (veriyi) elde etmek için 3 kaynağımız vardır:

(i) f fonksiyonun kendisi: fonksiyonu kullanarak grafik üzerine bulunan bazı noktaların koordinatlarını, grafiğin simetrikliğini, ve bazı asimptotları belirleriz;

(ii) birinci türev f' : bunu kullanarak fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları ve bazı yerel ekstrem değerlerin yerlerini belirleriz; ve

(iii) ikinci türev f'': bunu kullanarak fonksiyonun konkavlığını, büküm noktalarını ve bazen ekstrem değerlerini belirleriz.

(ii) ve (iii) daha önce ayrıntılı olarak çalışılmıştı. Şimdi ise verilen fonksiyonun kendisini kullanarak onun grafiği hakkında bazı bilgiler elde edeceğiz. Bu tüm bilgileri kullanarak fonksiyonların grafiklerini çizmek için gerekli olan tüm prosedürü örneklerle göstereceğiz.

(Bir fonksiyonun grafiğini çizmenin etkili yöntemlerinden birisi, birkaç noktada grafiğin koordinatlarını bulmak ve fonksiyondan, onun birinci türevinden, ikinci türevinden elde edilen bilgiler kullanarak bu noktalar arasında grafiğin şeklini belirlemektir.)

Bir fonksiyon, kritik, tekil ve büküm noktalarının dışında başka ilginç noktalara da sahip olabilir. Örneğin, grafiğin eksenleri kestiği nokta(lar) bunların arasındadır: Bir grafiği çizerken, $(x,0)$ ve $(0,y)$ şeklinde olan ve grafiğin üzerinde bulunan noktaları bulmaya çalışmak akıllıcadır.

Tabii ki her grafik böyle noktalara sahip olmak zorunda değildir; olsa bile onları tam olarak hesaplamak her zaman mümkün olmayabilir.

Ayrıca bir grafik birçok ayrık parçadan oluşmuş ise herbir parça üzerindeki (en azından) bir noktanın koordinatı bulunmalıdır.

Daha sonra göreceğimiz gibi dikey asimptotlar genelde grafiği ayrık parçalara bölerler.

Eğer verilen bir fonksiyon herhangi bir simetriye sahipse bu özellik daha iyi bir grafik elde etmemize oldukça yardımcı olacaktır. Daha önce gördüğümüz gibi tek fonksiyonların grafiği orijine göre, çift fonksiyonların grafiği ise y-eksenine göre simetriktir. Fakat fonksiyonlar başka simetrilere de sahip olabilirler. Örneğin $2+(x-1)^2$ 'nin grafiği $x=1$ doğrusuna göre, $2+(x-3)^3$ 'ün grafiği ise $(3,2)$ noktasına göre simetriktir.

Asimptotlar

Eğer, belirli bir doğruya, verilen bir fonksiyonun grafiği, doğru orijinden uzaklaştıkça, istenildiği kadar yaklaşıyorsa, o zaman fonksiyonun grafiği asimptota sahiptir diyeceğiz.

Bu tür doğrulara ise grafiğin asimptotu denir.

Üç tip asimptot vardır: dik(ey), yatay ve eğik asimptotlar

Tanım (Dik(ey) Asimptot):

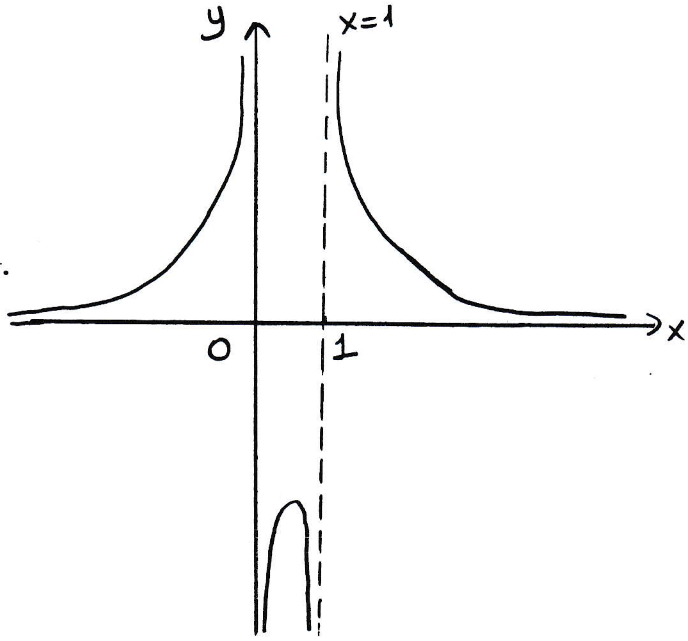
Eğer

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty, \quad \text{veya} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \mp\infty$$

ya da her iki durum da mevcut ise, $y=f(x)$'in grafiği $x=a$'da bir dik(ey) asimptota sahiptir denir.

Bu daha çok $f(x)$'in iki ifadenin bölümü şeklinde olması ve $x=a$'da paydanın sıfır olması durumunda gerçekleşir

Örnek $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ 'in dik asimptotlarını bulunuz.



Çözüm:

$x^2-x=x(x-1)=0$ 'dan

payda $x=0$ ve $x=1$ için sıfır olur.

(Yani

$x \to 0$ ve $x \to 1$ için p

payda sıfıra yaklaşır.)

O halde, f fonksiyonu

$x=0$ ve $x=1$ 'de dik asimptotlara sahiptir.

$x(x-1)$ fonksiyonu $(-\infty,0)$ ve $(1,\infty)$ aralıklarında pozitif ve

$(0,1)$ aralığında negatif olduğundan,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2-x}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-x}=\infty \quad \text{ve}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2-x}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-x}=-\infty \quad \text{olacaktır.}$$

Tanım (Yatay Asimptot):

Eğer

$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, veya $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$, ya da

her iki durum da mevcut ise

$y=L$, $y=f(x)$'in grafiğinin bir yatay asimptotudur.

Örnek $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$'in yatay asimptotlarını bulunuz.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{0}{1}=0$$ olduğundan

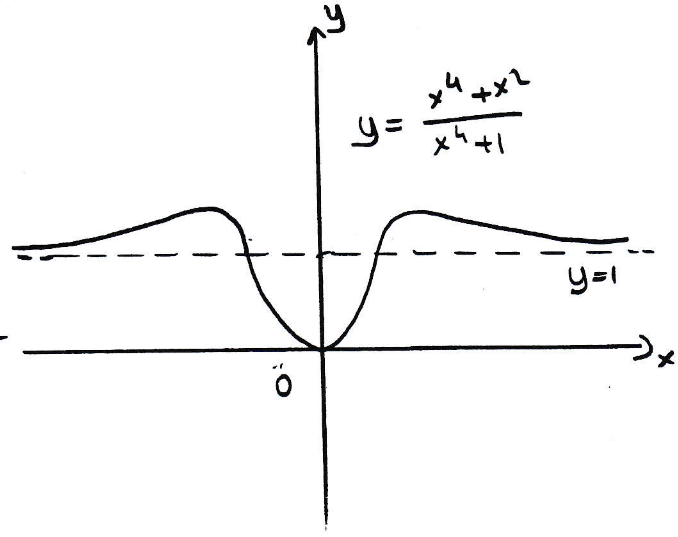
$y=0$ yatay asimptot olur.

NOT: Öğrenciler arasında, bir eğrinin asimptotlarını kesemeyeceği gibi bir yanlış kanı vardır.
Aşağıdaki iki örnekte verilen fonksiyonların grafiği asimptotlarını kesmektedir.

Örnek $g(x)=\dfrac{x^4+x^2}{x^4+1}$ 'in yatay asimptotlarını bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^4+x^2}{x^4+1}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{1}=1$$



olduğundan $y=1$ doğrusu yatay asimptottur ve yandaki şekilde görüldüğü gibi grafik asimptotu iki noktada kesmektedir.

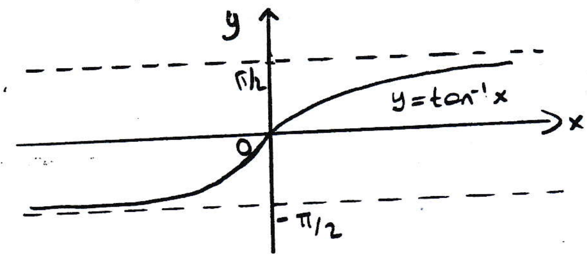
Örnek $y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 'nın asimptotu nedir? Hangi noktalarda eğri asimptotu kesmektedir?

Çözüm

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}=0$$ olduğundan, $y=0$ yatay asimptot olur.

Eğri asimptotu $x=n\pi$, $n\in\mathbb{N}$ noktalarında keser.

(Bu örnekte görüldüğü gibi eğri asimptotu sonsuz tane noktada kesmektedir.)



Örnek: $y=\tan^{-1}x$ 'in yatay asimptotlarını bulunuz.

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\ \text{ve}\\ &\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}$$

olduğundan, $y=\frac{\pi}{2}$ ve $y=-\frac{\pi}{2}$ doğruları yatay asimptot olur.

Bu tür asimptotlara tek taraflı (ya da tek yönlü) asimptot denir. Yukarıdaki ilk iki örnekte verilen fonksiyonların grafiği çift taraflı asimptotlara sahiptir.

Tanım (Eğik Asimptot):

Eğer

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \quad , \text{ veya}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \quad , \text{ ya da}$$

her iki durum da söz konusu ise o zaman

$y=ax+b$, (burada $a\neq 0$), doğrusu

$y=f(x)$'in grafiğinin bir eğik asimptotudur.

Örnek

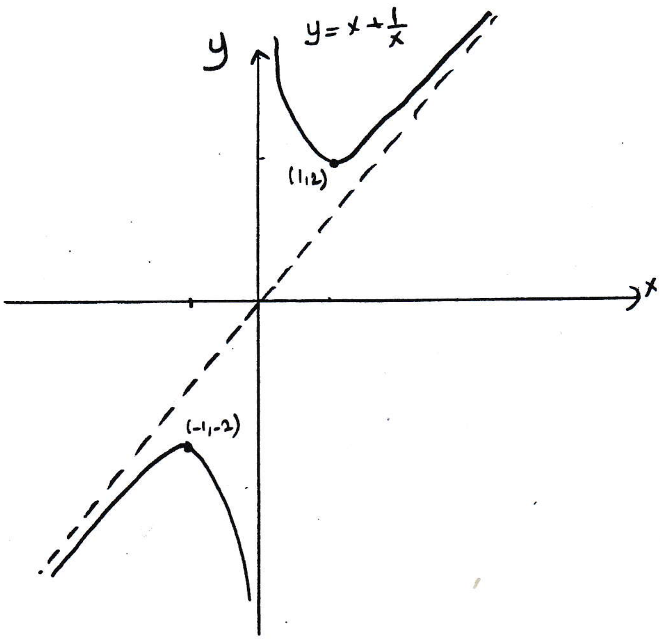
$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunu gözönüne aldığımızda

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x}=0$$

olduğundan $y=x$ doğrusu

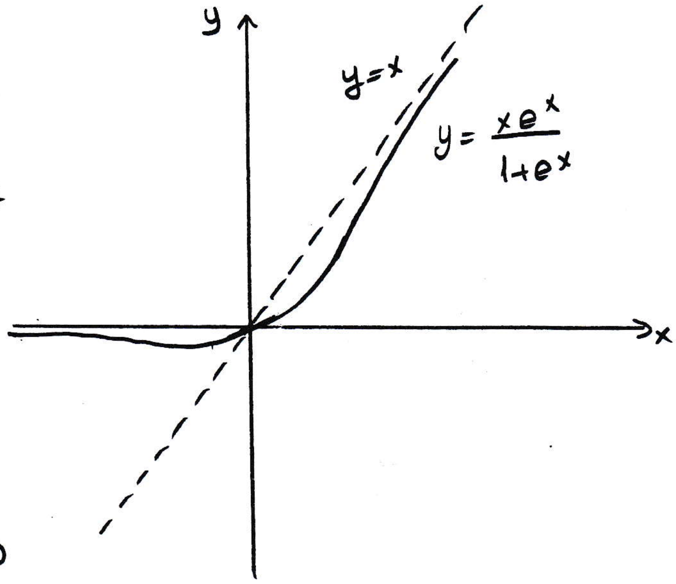
çift taraflı bir eğik asimptot

olur.



Örnek

$y=f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$ fonksiyonunu gözönüne alalım.



$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{1+e^x}=\dfrac{0}{1}=0$ olduğundan

$y=0$ sol taraflı bir yatay asimptot

ve,

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{xe^x}{1+e^x}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(e^x-1-e^x)}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{1+e^x}=0$

olduğundan, $y=x$ (sağdan) bir eğik asimptot olur.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{+x}=-\infty\cdot e^{-\infty}=-\infty\cdot\dfrac{1}{e^{\infty}}=0\cdot\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=-e^{x}$

$=-e^{-\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^x}{1+e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^x+e^x}{e^x}\to\infty$

Bir Rasyonel Fonksiyonun Asimptotları (203)

(Rasyonel fonksiyonların asimptotları daha detaylı bir şekilde ele alınabilir)

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$ olsun, burada

P_m ve Q_n, sırasıyla, m ve n dereceli polinomlardır. O zaman.

(a) $Q_n(x) = 0$ olan her x noktasında grafik bir dik asimptota sahiptir.

(b) Eğer $m < n$ ise grafik iki taraflı $y=0$ yatay asimptotuna sahiptir.

(c) Eğer $m=n$ ise grafik iki taraflı $y=L$, $(L \neq 0)$, yatay asimptotuna sahiptir. Burada L sayısı, P_m ve Q_n'deki en büyük dereceli terimlerin katsayılarının oranıdır.

(d) Eğer $m=n+1$ ise grafik iki taraflı bir eğik asimptota sahiptir. Bu asimptot polinom bölmesi yapılarak bulunabilir:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = ax+b+\frac{R(x)}{Q_n(x)}$$, olarak yazılırsa,

asimptot $y=ax+b$ 'dir.

(e) Eğer $m > n+1$ ise grafiğin yatay veya eğik asimptotları yoktur.

Örnek

$y = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ 'in eğik asimptotlarını bulunuz. (20)

Çözüm:

$$\frac{x^3}{x^2+x+1} = \frac{\overbrace{x^3+x^2+x}^{x(x^2+x+1)} \overbrace{-x^2-x-1}^{-(x^2+x+1)}+1}{x^2+x+1} = x-1+\frac{1}{x^2+x+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = x-1$ eğik asimptot olur.

Formal Eğri Çizimleri (İçin Örnekler) (205)

Bir eğri çizimi için aşağıdaki gibi bir kontrol listesi verilebilir

Eğri Çizimi İçin Kontrol Listesi

1. $f'(x)$ ve $f''(x)$ türevlerini hesapla ve çarpanlarına ayrılmış olarak ifade et.
2. Tanım bölgesi ve aşağıdakileri belirlemek için $f(x)$'i incele:

   (a) Dik asimptotlar. (paydanın sıfırlarına bak.)

   (b) Yatay ve eğik asimptotlar. ($\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x)$'i gözönüne al.)

   (c) Herhangi bir açık simetri. (f tek mi çift mi?)

   (d) Eksenleri kestiği noktalar (koordinatları $(x,0)$ ve $(0,y)$ olan noktalar) veya uç noktalar ve diğer açık noktalar.

   Bu listeye bildiğiniz kritik nokta, tekil ve büküm noktalarını ekleyiniz.

3. Aşağıdakiler için $f'(x)$'i inceleyiniz.

(a) Kritik noktalar

(b) f' 'nün tanımlı olmadığı noktalar.

(Bu noktalar; tekil noktaları, uç noktaları ve dik asimptotlar kapsar)

(c) f' 'nün pozitif veya negatif olduğu aralıklar.

f 'in artan ve azalan olduğu yerleri, yerel maksimum ve minimum gibi bazı kritik ve tekil noktaların sınıflandırılması bir tablo halinde göstermek kolaylık sağlayacaktır.

4. Aşağıdakiler için $f''(x)$'i inceleyiniz:

(a) $f''(x)=0$ olan noktalar

(b) $f''(x)$ 'in tanımlı olmadığı noktalar.

(Bu noktalar; tekil noktaları, uç noktaları, dikey asimptotları ve f' 'nün tanımlı fakat f'' 'nün tanımlı olmadığı diğer noktaları kapsar.)

(c) f'' 'nün pozitif ve negatif olduğu aralıklar ve dolayısıyla f 'in aşağı veya yukarı doğru konkav olduğu yerler. Bir tablo yapınız.

(d) Büküm noktaları.

Eğri Çizimleri

Örnek

$y = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$ 'in grafiğini çiziniz.

Çözüm: $y =$ fonksiyonunu $y = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{2}{x}$ şeklinde yazmak daha uygundur. Çünkü buradan açıkça görüldüğü gibi $y = \dfrac{x}{2} + 1$ bir eğik asimptottur ve ayrıca türevleri hesaplamak daha kolaydır:

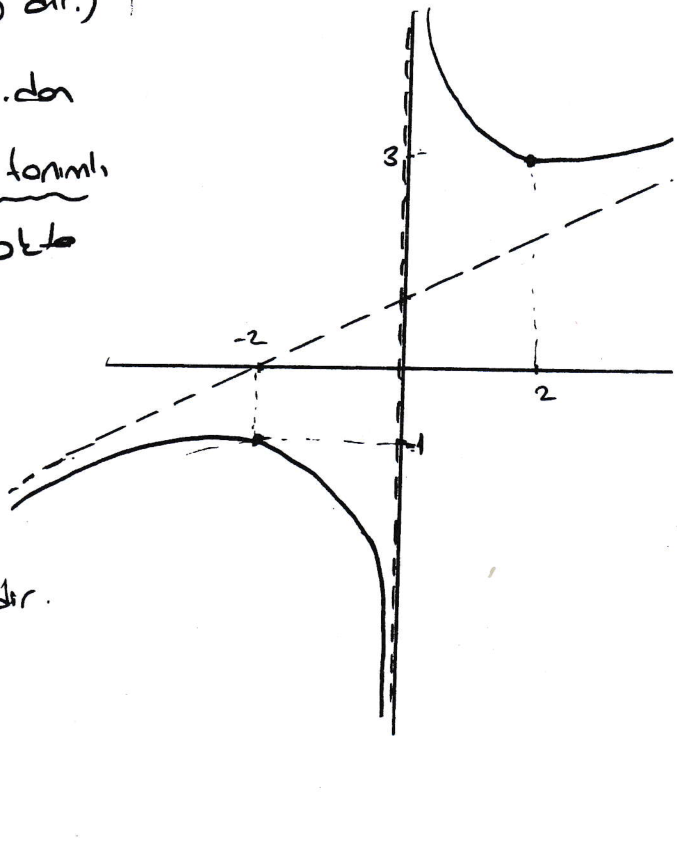
$y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{2x^2}$, $y'' = -\dfrac{4}{x^3}$

		K.N.		Asimptot		K.N	
x		-2		0		2	
y'	+	0	−	tanımsız	−	0	+
y''	−		−	tanımsız	+		+
y	↗	-1	↘	tanımsız	↘	3	↗
	∩	max	∩		∪	min	∪

y 'den elde edilen bilgiler:

- Tanım bölgesi $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Dikey asimptot $x = 0$
- Eğik asimptot $y = \dfrac{x}{2} + 1$

  ($x \to \pm\infty$ iken $y - (\dfrac{x}{2} - 1) = \dfrac{2}{x} \to 0$ 'dır.)
- $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 \geq 3$ old.dan ve de y fonksiyonu $x=0$ 'da tanımlı olmadığından eksenleri kestiği nokta yoktur.



y' 'den elde edilen bilgiler

- Kritik noktalar; $x = \pm 2$

  $\Rightarrow (-2, -1)$ ve $(2, 3)$ noktaları
- y' türevi $x=0$ 'da tanımlı değildir.

  (Dik asimptot)

y'' 'dan elde edilen bilgiler

- Hiçbir noktada $y''=0$ olmaz.

  $x=0$ 'da ise tanımsızdır.

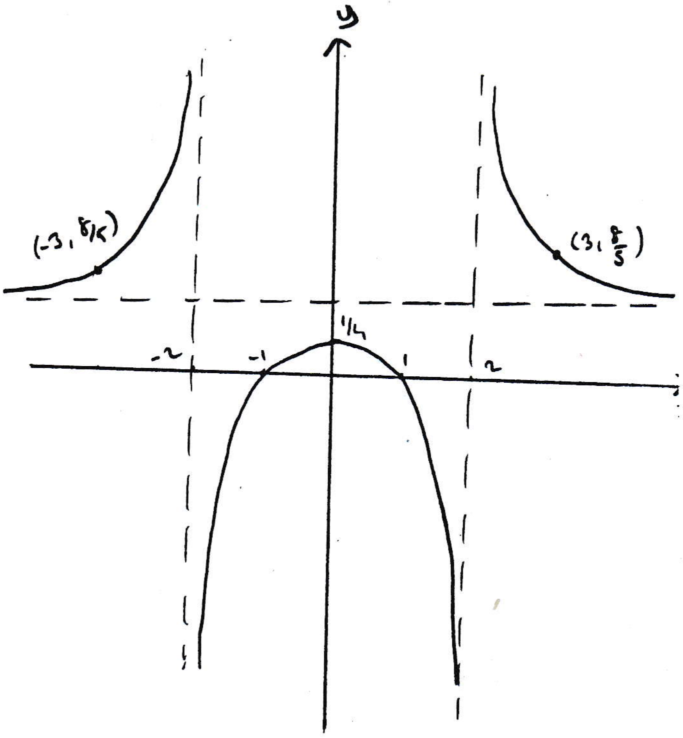
Örnek $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$ 'ün grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f'(x)=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}$, $f''(x)=\frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$ 'dür.

f 'den elde edilenler:

+ Tanım bölgesi $= \mathbb{R}\setminus\{\mp 2\}$
+ $x=-2$ ve $x=2$ dik asimptotları
+ ($x\to\pm\infty$ için $y=1$ old.dan) $y=1$ yatay asimptottur.
+ f çift olduğundan y-eksenine göre simetriktir.
+ Eksenleri kestiği noktalar: $(0,\frac{1}{4})$, $(-1,0)$ ve $(1,0)$
+ Diğer noktalar: $(-3,\frac{8}{3})$, $(3,\frac{8}{5})$

(iki asimptot grafiği 3 parçaya ayırıyor; herbiri üzerindeki noktalara ihtiyacımız var.)



f' 'den elde edilenler:

Kritik nokta $x=0$;

f' $x=2$ veya $x=-2$ 'de tanımsızdır.

f'' 'den elde edilenler:

Hiçbir yerde $f''(x)=0$ değildir;

f'', $x=2$ veya $x=-2$ 'de tanımsızdır.

x		asimptot -2		K.N. 0		Asimp. 2	
f'	+	tanımsız	+	0	−	tanımsız	−
f''	+	tanımsız	−		−	tanımsız	+
f	↗	tanımsız	↗		↘	tanımsız	↘
	∪		∩	$\frac{1}{4}$ max	∩		∪

Eğri Çizimleri (Örnekler)

① $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonun

Çözüm: $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}}$, $f''(x) = \dfrac{1+2x}{(1-x)^{5/2}(1+x)^{3/2}}$

⊢ Tanım kümesi $= [-1,1)$ aralığı

⊢ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ olduğundan $x=1$ dikey asimptot olur.

($x \to \mp\infty$ olamayacağına göre yatay ve eğik asimptot yoktur.)

⊢ f ne tek ne de çifttir.

⊢ Eksenleri kestiği noktalar ; $(-1,0)$ ve $(0,1)$ noktaları

—o——o——

⊢ Her $x \in D(f)$ için $f'(x) > 0$ 'dır, (yani, f artan bir fonksiyondur.)

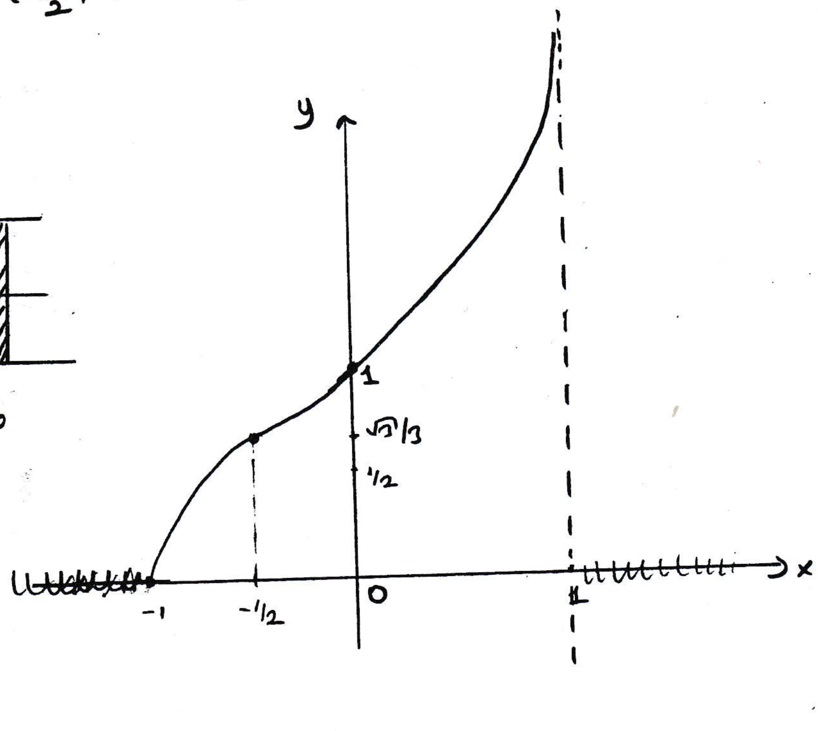
⊢ Kritik ve tekil nokta yoktur.

—o——o——

⊢ $x = -\frac{1}{2}$ için $f''(x) = 0$ olur. $f'(-\frac{1}{2})$ türevi mevcut ve $(-1,-\frac{1}{2})$ için $f'' < 0$ ve $(-\frac{1}{2},1)$ için $f'' > 0$ olduğundan bu nokta bir büküm noktasıdır.

—o——o——

x	-1		-1/2		0		1
f'		+		+		+	
f''		−		+		+	
f	0 (min)	↗ ⌢	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (büküm)	↗ ∪	1	↗ ∪	∞



20

örnek $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$ 'ün grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f'(x) = \frac{4}{3}\frac{x}{(x^2-1)^{1/3}}$, $f''(x) = \frac{4}{9}\frac{x^2-3}{(x^2-1)^{4/3}}$

f 'den elde edilenler: ⊢ Tanım kümesi $= \mathbb{R}$

⊢ Asimptot yok. ($x \to \pm\infty$ için $f(x)$ giderek büyüyecektir)

⊢ f çift fonk. old. dan y-eksenine göre simetriktir.

⊢ Eksenleri kestiği noktalar : $(\pm 1, 0)$, $(0,1)$ noktaları

f' 'den elde edilen bilgiler:

⊢ Kritik noktalar : $x=0$, ⊢ Tekil noktalar : $x = \pm 1$

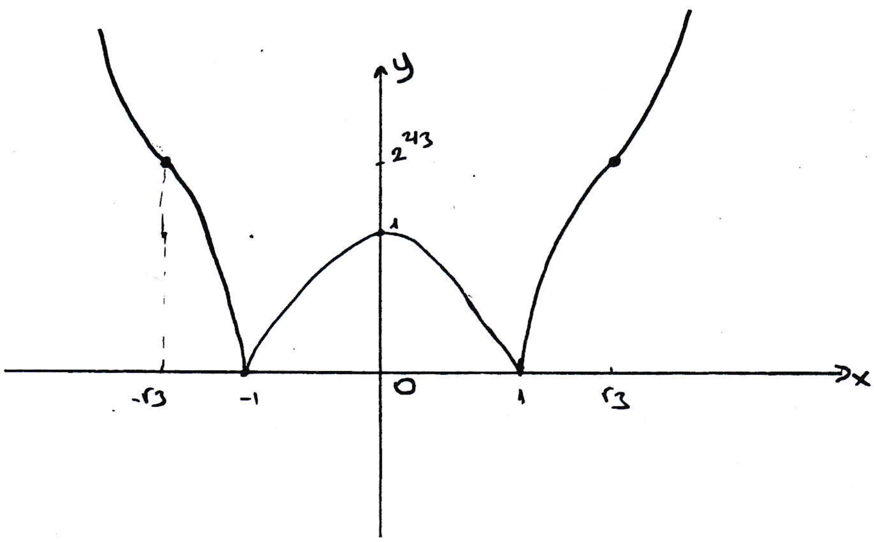
f'' 'den elde edilenler : ⊢ $x = \pm\sqrt{3}$ de $f''(x)=0$;

$(\pm\sqrt{3}, 2^{2/3}) \cong (\mp 1.73, 1.59)$

⊢ $x = \pm 1$ 'de $f''(x)$ tanımlı değil.

$a = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{(x^2-1)^{2/3}}{x} = \infty$

				T.N.		K.N.		T.N.			
x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	−		−	tanımsız	+	0	−	tanımsız	+		+
f''	+	0	−	tanımsız	−		−	tanımsız	−	0	+
f	↘		↘		↗		↘		↗		↗
	∪	$2^{2/3}$ büküm	∩	0 min	∩	1 max	∩	0 min	∩	$2^{2/3}$ büküm	∪



Örnek $y = x e^{-x^2/2}$ 'nin grafiğini çiziniz.

Çözüm : $y' = (1-x^2)\,e^{-x^2/2}$, $y'' = x\,(x^2-3)\,e^{-x^2/2}$.

y 'den elde edilenler:

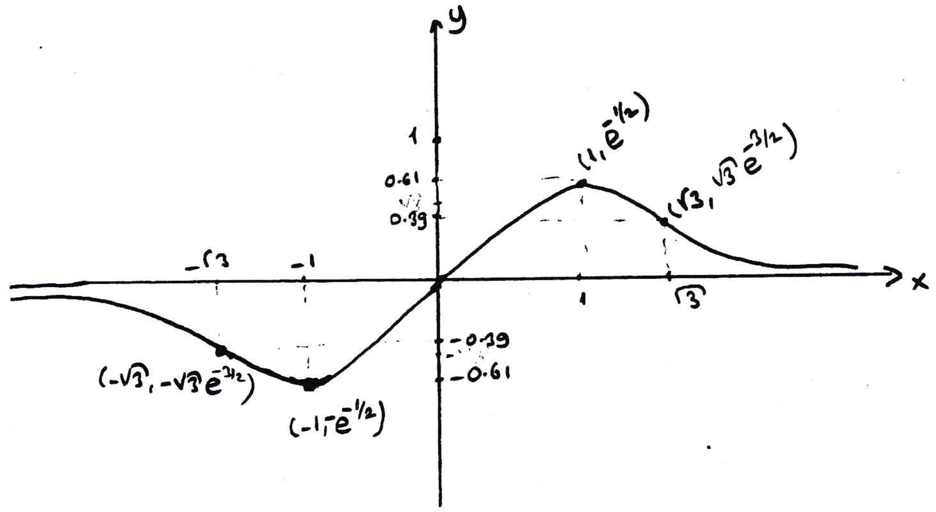
- Tanım kümesi = $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to\mp\infty} x e^{-x^2/2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2/2}} = 0$ old. dan $y=0$ yatay asimptot olur.
- y tek old. da orijine göre simetriktir.
- Eksenleri kestiği noktalar $(0,0)$

y' 'den elde edilenler: Kritik noktalar : $x = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{e}}) \cong (\pm 1, \pm 0{,}61)$

y'' 'den elde edilenler: $x=0$ ve $x = \mp\sqrt{3}$ 'de $y''=0$ 'dır;

$(0,0)$, $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}\,e^{-3/2}) \cong (\pm 1.73, \pm 0.39)$.

x		$-\sqrt{3}$		-1 (K.N.)		0		1 (K.N)		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↘ ∩	-0.39 büküm	↘ ∪	-0.61 min	↗ ∪	0 büküm	↗ ∩	0.61 max	↘ ∩	0.39 büküm	↘ ∪



(214)

4) $y = x\ln x$ 'in grafiğini çiziniz.

Çözüm: $y' = 1+\ln x$; $y'' = \frac{1}{x}$

- Tanım kümesi = $(0,\infty)$ aralığı

- Asimptot arayalım:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ olduğundan yatay (ve eğik) asimptot yoktur.

$x\to 0^+$ için $\ln x \to -\infty$ olduğundan, $x=0$ 'da dikey asimptot olabilir.

Fakat,

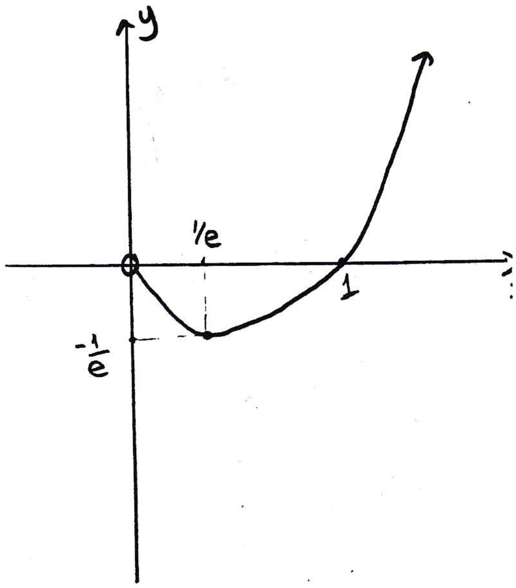
$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = [0.-\infty] \text{ belirsizliği}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = [\tfrac{\infty}{\infty}] \text{ belirsizliği}$$

$$(\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \text{ olduğundan}$$

$x=0$ düşey asimptot olmaz.

(Sonuçta asimptot yok)



- Eksenleri kestiği noktalar: $(1,0)$ noktası

- $f'(x) = 1+\ln x = 0$ 'dan $x=e^{-1}$ için $f'(x)=0$ olur.

$x=e^{-1}$ kritik noktadır.

$(0,e^{-1})$ için $f'<0$, (e^{-1},∞) için $f'>0$ 'dır

O halde $x=e^{-1}$ minimum noktasıdır.

- $f''(x) = \frac{1}{x}$ 'den, her $x\in D(f)$ için $f''(x)>0$ 'dır. O halde fonksiyon yukarı doğru konkavdır ve büküm noktası yoktur.

x	0		e^{-1}		1		∞
y'		−	0	+		+	
y''		+		+		+	
y	0	↘	$-e^{-1}$ min	↗	$\boxed{0}$	↗	∞

215

(5) $y = x e^{\frac{x-1}{x}}$ 'in grafiğini çiziniz.

Çözüm: $y' = \frac{x+1}{x} e^{\frac{x-1}{x}}$, $y'' = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^3}$

⊢ Tanım kümesi $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dır.

⊢ Asimptotları bulalım: $\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{x-1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$ 'dır.

$\lim_{x \to 0^-} x e^{\frac{x-1}{x}} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^-} -e^{\frac{x-1}{x}} = -\infty$

$\Rightarrow x = 0$ düşey asimptot olur.

$\lim_{x \to \mp\infty} x e^{\frac{x-1}{x}} = \mp\infty$ olduğundan yatay asimptot yoktur.

Eğik asimptot arayalım:

$g(x) = ax + b$ olsun ve (varsa) a ve b 'yi bulalım:

$a = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x e^{\frac{x-1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e$

$b = \lim_{x \to \mp\infty} [y - ax] = \lim_{x \to \mp\infty} [x e^{\frac{x-1}{x}} - ex] = \lim_{x \to \mp\infty} x (e^{\frac{x-1}{x}} - e) = [\mp\infty \cdot 0]$

$b = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{e^{\frac{x-1}{x}} - e}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \mp\infty} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{x-1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = -e$ olur.

O halde $g(x) = ax + b = ex - e$ eğik asimptot olur.

⊢ Eksenleri kestiği noktalar: yoktur.

⊢ Fonksiyon ne tek ne de çifttir.

$\longrightarrow \longrightarrow$ ———

⊢ $x=-1$ için $f'(x)=0$ olduğundan, bu nokta kritik noktadır.

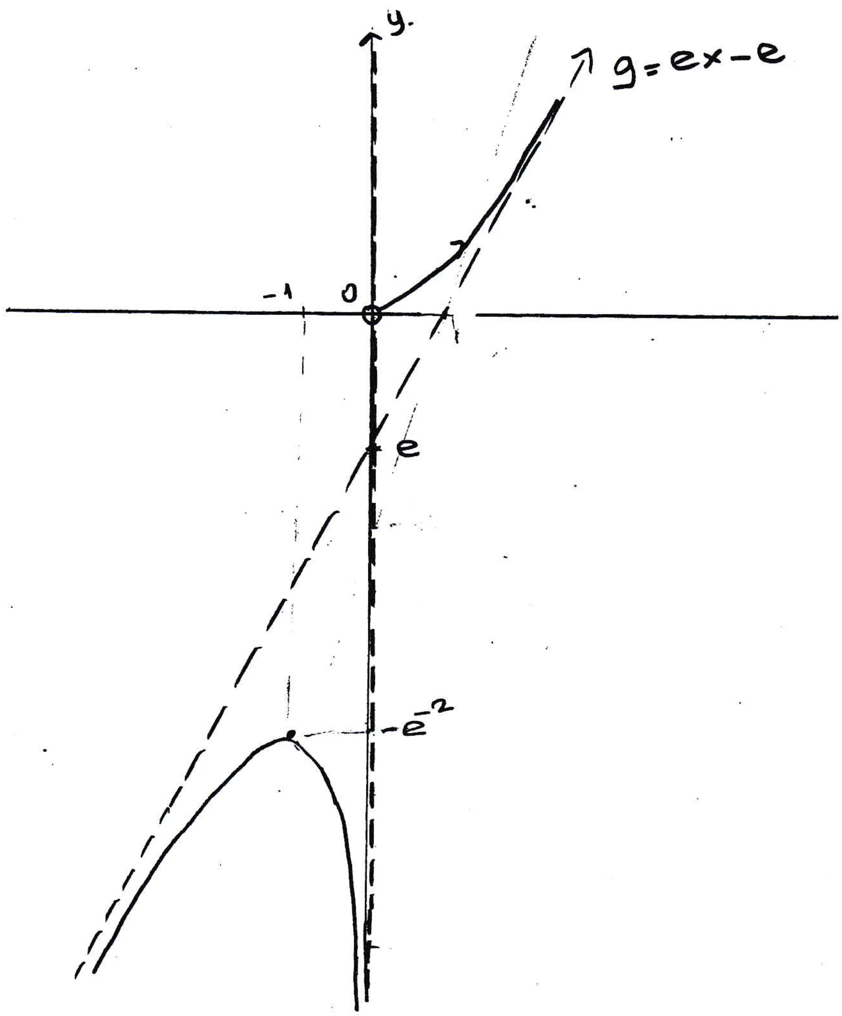
$(-\infty,-1)$ ve $(0,\infty)$ için $f'>0$ ve $(-1,0)$ için $f'<0$ dır.

Buna göre $x=-1$ yerel maksimum noktası olur.

⊢ Her $x \in D(f)$ için $f''(x) \neq 0$ olduğundan büküm noktası yoktur

$x>0$ için $f''(x)>0$, $x<0$ için $f''(x)<0$ dır.

x	$-\infty$		-1		0		$-\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y''		$-$		$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-e^2$ max	$\searrow$	$-\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	∞
		$\frown$		$\frown$		$\smile$	



212

② $y = \cot x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\quad y' = -(1+\cot^2 x)$, $\; y'' = 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$

+ Tanım kümesi $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

+ cotx fonksiyonu π periyodlu olduğundan $[0,\pi]$ aralığında inceleme yapmak yeterlidir.

(+ Cotx fonksiyonu tek fonksiyondur.)

+ $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x = \lim\limits_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$

olduğundan $x=0$ ve $x=\pi$ doğruları düşey asimptotlardır.

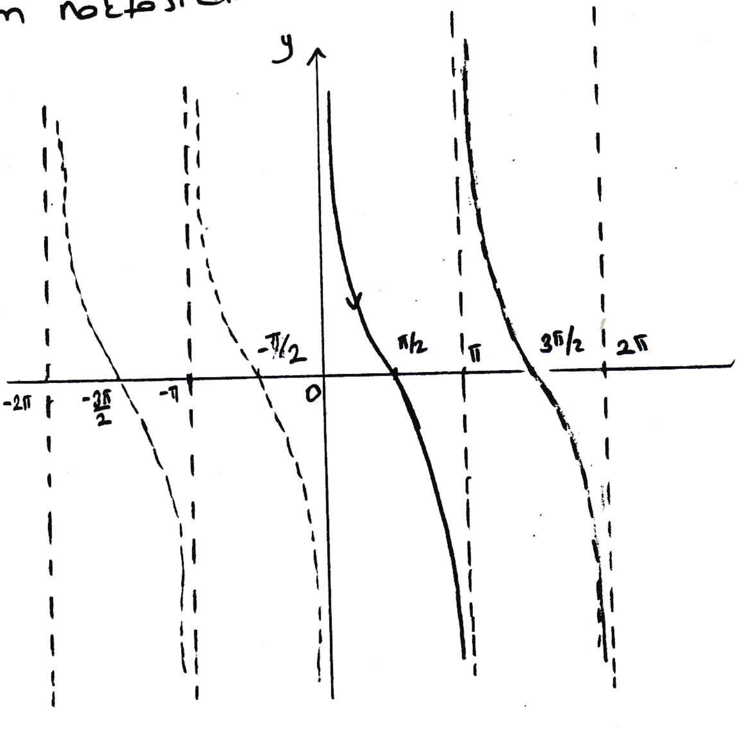
+ Eksenleri kestiği noktalar : $(\frac{\pi}{2}, 0)$

+ $y'<0$ olduğundan fonk. azalan fonksiyondur, dolayısıyla max-min yoktur.

($x=0$ ve $x=\pi$ tekil noktalardır.)

+ $x=\frac{\pi}{2}$ için $f''(x) = 0$'dır. $(0,\frac{\pi}{2})$ için $f''>0$ ve $(\frac{\pi}{2},\pi)$ için $f''<0$ olduğundan bu nokta büküm noktasıdır.

x	0		π/2		
y'		−		−	
y''		+	0	−	
y	∞	↘ ∪	0 büküm	↘ ∩	−∞



3) $y = \operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x$ 'in grafiğini çiziniz.

Çözüm: $y' = -\frac{1}{1+x^2}$, $y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

+ Tanım kümesi = $\mathbb{R}$ (değer kümesi = $[0, \pi]$)

+ $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0$ ve $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$ olduğundan

$y=0$ ve $y=\pi$ doğruları yatay asimptot olur.

(dikey ve eğik asimptot yoktur)

+ Eksenleri kestiği noktalar : $(0, \frac{\pi}{2})$.

+ $y' < 0$ olduğundan azalan bir fonksiyondur, (dolayısıyla max-min yoktur.)

Kritik ve tekil nokta yoktur.

+ $x=0$ için $f''(x)=0$ 'dır. $(-\infty, 0)$ için $f''<0$, $(0,\infty)$ için $f''>0$

olduğundan, bu nokta büküm yeridir.

x	$-\infty$		0		∞
y'		−		−	
y''		−	0	+	
y	π	↘ ⌢	$\frac{\pi}{2}$ büküm	↘ ⌣	0