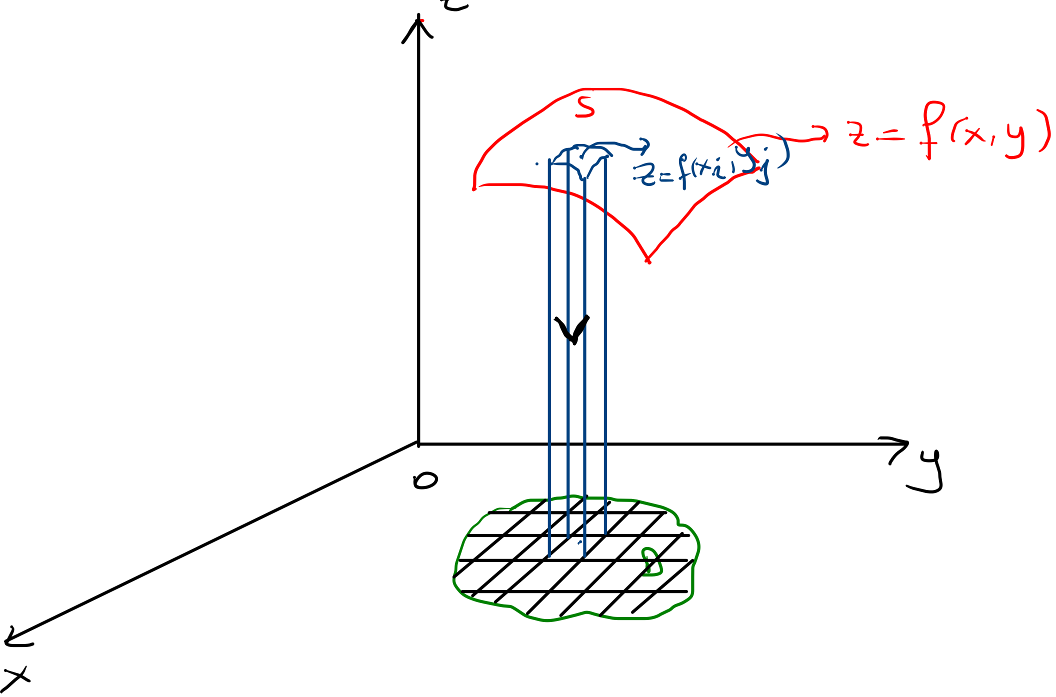
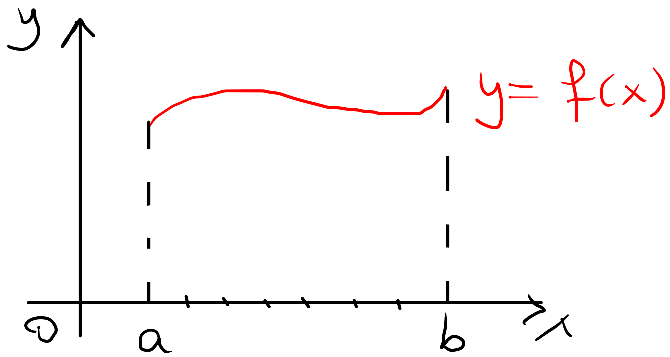
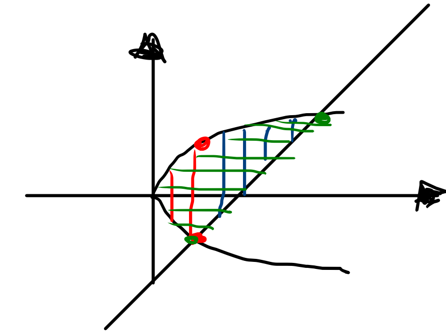
İKİ KATLI İNTEGRALLER





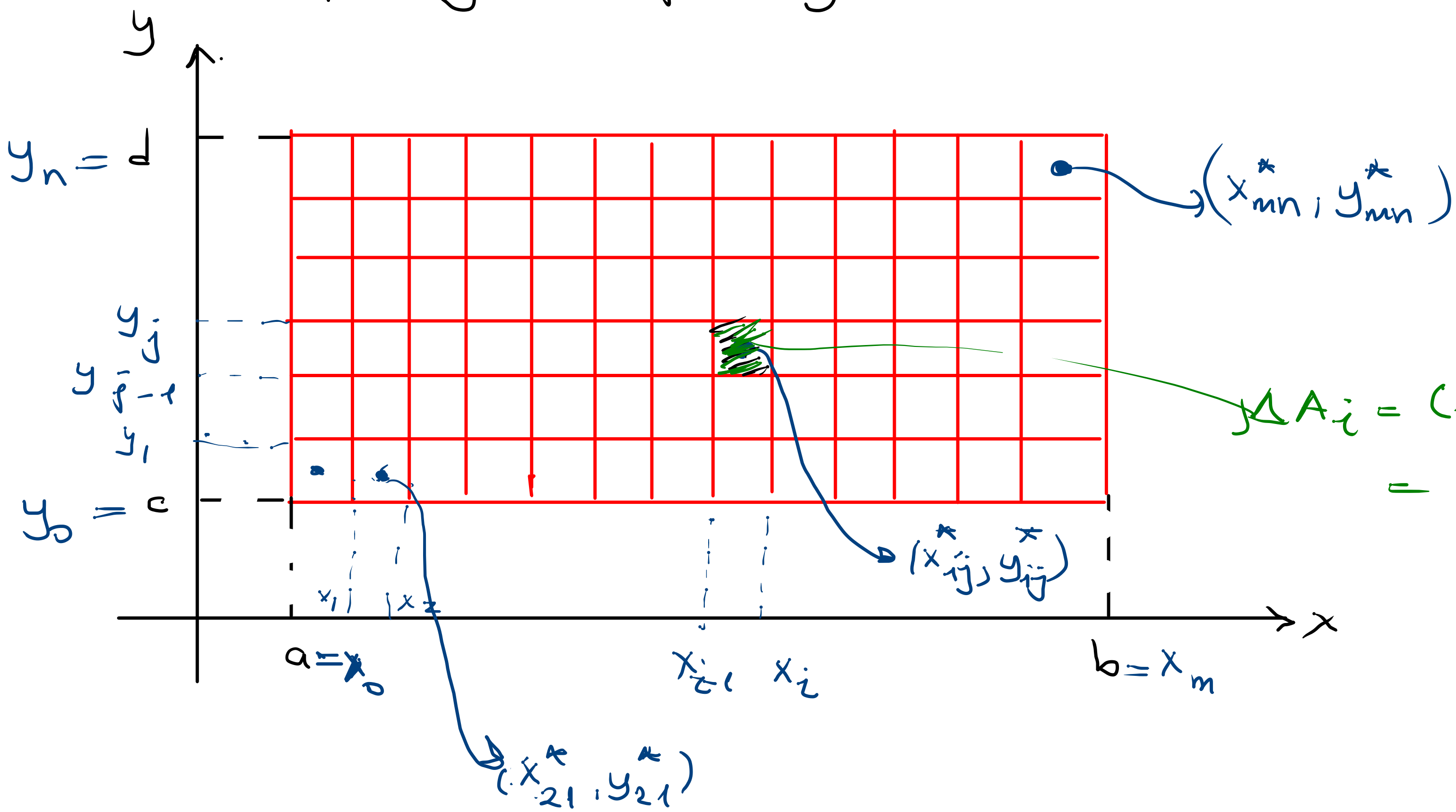


$z = f(x,y)$ yüzeyi, xy-düzlemi ve düzlemdeki bir D bölgesinin sınırından geçen, z-eksenine paralel olan silindir ile sınırlı üç boyutlu V bölgesinin standard hacim problemi iki değişkenli bir fonksiyonun iki katlı integralidir.
V bölgesine cisim denir. D bölgesi üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonunun iki katlı integrali

$$\iint_D f(x,y)\, dA$$

şeklinde gösterilir. Burada D düzgün bir bölge ve f fonksiyonu pozitif değerli bir fonksiyondur. Bu iki katlı integralin değeri V cisminin hacmini verir.

D bölgesinin, kenarları xy-düzlemindeki koordinat eksenlerine paralel bir dikdörtgensel bölge olduğunu ve $f(x,y)$ fonksiyonunun da bu bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olduğunu göz önüne alalım



$$\Delta A_i = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \, \Delta y_j$$

Eğer D bölgesi, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ şeklindeki (x,y) noktalarından oluşuyorsa, $[a,b]$ ve $[c,d]$ aralıklarının herbirini

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$$

şeklinde parçalayarak D bölgesinin küçük dikdörtgenlerden oluşan bir P parçalanışını oluşturabiliriz. P parçalanışı mn tane A_{ij} dikdörtgeninden oluşur.

A_{ij} dikdörtgeninin alanı $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j$

ve diagonal uzunluk

$$\operatorname{diam}(A_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$ 'dir.

P parçalanışının normu, bu küçük dikdörtgenlerin diagonal uzunluklarının en büyüğüdür.

$$\|P\| = \max_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \left[\operatorname{diam}(A_{ij})\right]$$

Herbir A_{ij} dikdörtgeninden bir (x_{ij}^*, y_{ij}^*) noktası alarak elde edilecek $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ değerleri ile A_{ij} dikdörtgeninlerinin alanları çarpılmak suretiyle

$$A(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \overbrace{\Delta A_{ij}}^{\Delta x_i \Delta y_j}$$

toplamını oluşturalım. Herbir A_{ij} dikdörtgenine karşılık gelen terim, eğer $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \geq 0$ ise tabanı A_{ij} ve yüksekliği $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ olan dikdörtgensel kutunun hacmidir.

Dolayısıyla pozitif f fonksiyonları için bu Riemann toplamı $A(f,P)$, D bölgesinin üstünde ve $z=f(x,y)$ grafiğinin altında kalan hacme yaklaşır. $f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesi üzerindeki iki katlı integrali, (x_{ij}^*, y_{ij}^*) noktalarının seçiminden bağımsız olarak $\|P\| \to 0$ için limitin mevcut olması koşuluyla bu Riemann toplamının limiti olarak tanımlanır.

Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için D bölgesinin $\|P\| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her P parçalanışı için ve P parçalanışının dikdörtgenlerindeki (x_{ij}^*, y_{ij}^*) noktalarının her seçimi için

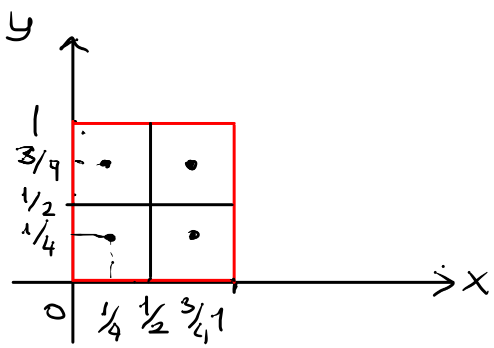
$$|A(f,P) - I| < \varepsilon$$

olacak şekilde, ε'na bağlı bir δ sayısı varsa f, D üzerinde integrallenebilirdir ve

$$I = \iint_D f(x,y)\, dA$$

iki katlı integraline sahiptir.

Ör/ $D: \left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{array}\right\}$ karesi olsun. D bölgesi üzerinde $\iint_D (x^2+y)\,dA$ integraline yaklaşık bir değer bulmak için D'nin 4 tane küçük kareye parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamını, herbir dikdörtgenin merkezindeki noktalarını seçerek hesaplayınız.



$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{4}$$

$$A(f,P) = f\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right)\cdot \Delta A_{11} + f\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}\right)\Delta A_{21} + f\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right)\cdot \Delta A_{12} + f\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4}\right)\cdot \Delta A_{22}$$

$$\iint_D (x^2+y)\,dA \cong A(x^2+y, P)$$

$$f(x,y) = x^2+y$$

$$\cong \left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{9}{16}+\tfrac{1}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{3}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{9}{16}+\tfrac{3}{4}\right)\cdot\tfrac{1}{4}$$

$$\cong \frac{5}{64} + \frac{13}{64} + \frac{13}{64} + \frac{21}{64} = \frac{52}{64} = \frac{13}{16}$$

$$\int_0^1\left[\int_0^1 (x^2+y)\,dy\right]dx = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)dx = \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$