

ÖR $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2+x}$ fonksiyonunun $(x-1)$ 'in kuvvetlerine göre olan bir seri temsilini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$x-1 = t$ dersek $x = t+1$ olur.

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3(1+\frac{t}{3})} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{t}{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$$

olduğundan

$$\frac{1}{1+\frac{t}{3}} = 1 - \frac{t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^2 - \left(\frac{t}{3}\right)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{3}\right)^n \text{ olur.}$$

$$0 \text{ halde } \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{t}{3}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{3^{n+1}} \quad \begin{aligned} -1 < \frac{t}{3} < 1 \\ \Rightarrow -3 < t < 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-1)^n}{3^{n+1}} \quad -3 < x-1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$$

bulunur.

ÖR $\Rightarrow$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

1. YOL Oran testini uygulayalım.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{2n+3}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} < 1 \text{ olduğundan yakınsaktır.}\end{aligned}$$

2. YOL Limit mukayese uygulayalım.

$$\begin{aligned}\sum b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ geometrik serisini seçelim.} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad r = \frac{1}{2}, |r| < 1 \text{ yakınsaktır.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n} \cdot 2^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

$L = 0$ ve $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan
verilen seri yakınsaktır.

ÖR $\Rightarrow a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\ln n}{n} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

olduğundan oran testine göre yakınsaktır.

ÖR $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+5n-6}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+5n-6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(5k-2)(5k+3)}$$

$$\frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \frac{A}{(5k-2)} + \frac{B}{(5k+3)}$$

$$A = \lim_{k \rightarrow \frac{2}{5}} (5k-2) \cdot \frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \lim_{k \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{1}{5k+3} = \frac{1}{5}$$

$$B = \lim_{k \rightarrow -\frac{3}{5}} (5k+3) \cdot \frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \lim_{k \rightarrow -\frac{3}{5}} \frac{1}{5k-2} = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5k-2} - \frac{1}{5k+3} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{18} \right) + \dots + \left(\frac{1}{5(n-1)-2} - \frac{1}{5(n-1)+3} \right) + \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{18} \right) + \dots + \left(\frac{1}{5n-7} - \frac{1}{5n-2} \right) + \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right) = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+5n-6} = \frac{1}{15}$$

OR $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$ ($|q| < 1$) serisinin toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^n k q^k = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n$$

$$\Rightarrow qS_n = \sum_{k=1}^n k q^{k+1} = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots + (n-1)q^n + nq^{n+1}$$

$$S_n - qS_n = \underbrace{q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n}_{\text{Geometrik seri}} - nq^{n+1} \quad a=r, r=q$$

$$\Rightarrow (1-q)S_n = \frac{q(1-q^n)}{1-q} - nq^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{q - q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{q - q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} = 0 \quad |q| < 1 \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^{n+1} &\stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^{-(n+1)}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-(n+1) q^{-(n+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-q^{n+2}}{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2} \text{ olur. } 0 \text{ halde}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \text{ dir.}$$

OR $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{5^k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{5^k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^k}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^k}$$

Bir önceki soru
geometrik seri

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{16} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

1) OR $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}}$ serisinin karakterini belirle-

yiniz.

1. yol: (Limit mukayese)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik serisini seçelim iraksak bir seridir.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}} \cdot n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{\sqrt[3]{n^3(2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}(n+2)}{\cancel{n}\sqrt[3]{2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}} = \infty\end{aligned}$$

$L = \infty$ ve $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi iraksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}}$ serisi de iraksaktır.

2. yol: (n. terim testi)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{2n^3+5n-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+\frac{2}{n})}{\sqrt[3]{n^3(2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}{\cancel{n}\sqrt[3]{2+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

OR $\Rightarrow$ Genel terimi $a_n = \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$ serisinin karakterini bulunuz.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{(n!)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1) \cdot n!]^2 \cdot 3^{n^2}}{3^{n^2+2n+1} \cdot (n!)^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{3^{n^2}}}{\cancel{3^{n^2}} \cdot 3^{2n+1} \cdot \cancel{(n!)^2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{2n+1}} \\
 &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2} \cdot (n+1)}{\cancel{2} \cdot 3^{2n+1} \cdot \ln 3} \quad (\text{L'Hospital}) \\
 &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot 3^{2n+1} \cdot (\ln 3)^2} = 0 < 1
 \end{aligned}$$

Oran testine göre seri yakınsaktır.

OR $\Rightarrow$ Genel terimi $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{\frac{3}{2}}}$ olan serinin karakterini belirleyiniz.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{\frac{3}{2}}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+2}} \right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{n}+2+1}{\sqrt{n}+2}} \right)^{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)} \right)^{\sqrt{n}+2-2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)^{\sqrt{n}+2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}+2}} \right)^{-2} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{n}+2 = t \\ n \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{t}} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{e} < 1 \quad \text{ise seri Cauchy testine}$$

göre yakınsaktır.

ÖR $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ serisinin karakterini inceleyiniz. ($p > 0$)

Integral testini uygulayalım.

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

$f(n)$ fonksiyonu $[2, \infty)$ aralığında sürekli ve pozitiftir.

$$f'(n) = - \frac{[(\ln n)^p + n \cdot p(\ln n)^{p-1} \cdot \frac{1}{n}]}{n^2 (\ln n)^{2p}}$$

$$\Rightarrow f'(n) = - \frac{[(\ln n)^p + p(\ln n)^{p-1}]}{n^2 (\ln n)^{2p}}$$

$$= - \frac{(\ln n)^p \left[1 + \frac{p}{\ln n}\right]}{n^2 (\ln n)^{2p}}$$

$$= - \frac{1 + \frac{p}{\ln n}}{n^2 (\ln n)^p} = - \frac{\ln n + p}{n^2 (\ln n)^{p+1}} < 0$$

azalan fonk. 0 halde int. testi uygulanabilir.

$$\int_2^{\infty} f(n) dn = \int_2^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} dn$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_2^k \frac{1}{n(\ln n)^p} dn$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln n = u \\ \frac{dn}{n} = du \\ n=2 \Rightarrow u=\ln 2 \\ n=k \Rightarrow u=\ln k \end{array} \right\} \Rightarrow = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln k} \frac{du}{u^p}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left. \frac{u^{-p+1}}{-p+1} \right|_{\ln 2}^{\ln k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln k)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1} \\ +\infty \end{cases}$$

$p > 1$ ise yak.

$p \leq 1$ ise irak.

ÖR $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2-1}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Alterne seridir. Mutlak değerlerden oluşan seriye bakalım;

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2-1} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$$

Bu pozitif terimli serinin karakterini inceleyelim;

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik serisi ile karşılaştıralım.

$$a_n = \frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n \quad (\forall n \text{ için})$$

$\sum a_n$ serisinin her terimi $\sum b_n$ serisinde karşılığı olan her terimden daha büyük ve $\sum b_n$ serisi ıraksak olduğundan $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

Alterne seri testini uygularsak;

$$1^o) a_{n+1} \stackrel{?}{<} a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2-1} = \frac{n+1}{n^2+2n} = \frac{n+1}{n(n+2)}$$

$$a_n = \frac{n}{n^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n(n+2)} \cdot \frac{(n^2-1)}{n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+2n^2}$$

$$= 1 - \frac{n^2+n+1}{n^3+2n^2} < 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \quad \checkmark$$

$$2^o) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - 1} = 0 \quad \checkmark$$

0 halde Alterne seri yakınsaktır. Mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan Alterne seri şartlı yakınsaktır.

11
OR $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerlerini ve yakınsaklık aralığını inceleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3}}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \left| \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} \right|$$

$$= |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

aralığında seri mutlak yakınsaktır.

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}} \quad \text{Alterne seri}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ile mukayese edelim. (Harmonik seri ıraksak)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{3}{n^2})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = 1 \neq 0, \infty \end{aligned}$$

olduğundan her iki seri aynı karakterdedir. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \text{ serisi de ıraksaktır. Alterne seri testine göre;}$$

$$1^o) a_{n+1} < a_n$$

$\forall n$ için

$$n < n+1$$

$$\Rightarrow n < n+1$$

$$\Rightarrow n^2 < (n+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 + 3 < (n+1)^2 + 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2 + 3} < \sqrt{(n+1)^2 + 3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 3}} \quad \checkmark$$

$$2^o) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}} = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Altern seri yakınsaktır. Mutlak değerlerden oluşan seri ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 3}}$ şartlı yakınsaktır.

$x = 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}}$ bulunur ki ıraksaktır.

0 halde verilen kuvvet seri $(-1, 1)$ aralığında mutlak yakınsak, $x = -1$ 'de şartlı yakınsak ve $x \geq 1$ için ıraksaktır. Kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $[-1, 1)$ 'dir.

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(n-1)!}{n^2}}_{a_n} (x-2)^n$ serisinin yakınsaklık yarı-
çapını ve yakınsaklık ara-
lığını bulunuz.

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n-1)!}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\cancel{(n-1)!}}{n \cdot \cancel{(n-1)!}} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^3} \right| = 0 \end{aligned}$$

olduğundan seri sadece yakınsaklık merkezi olan $x=2$ 'de yakınsaktır.

ÖR: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x-1)^n}{3^n}$ serisinin yakınsaklık mer-
kezini ve yakınsaklık ara-
lığını bulunuz.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x-1)^n}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left[2 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]^n}{3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n \left(x - \frac{1}{2} \right)^n}{3^n} \end{aligned}$$

şeklinde seriyi düzenlersek $C = \frac{1}{2}$ yakınsaklık merkezidir.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n 2^{n+1} \left(x - \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(-1)^{n-1} 2^n \left(x - \frac{1}{2} \right)^n} \right| \\ &= \frac{2}{3} \left| x - \frac{1}{2} \right| < 1 \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \quad \text{serinin mutlak yakınsak olduğu aralıktır.}$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-2-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-1} \rightarrow \text{ıraksak.}$$

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (4-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \rightarrow \text{ıraksak.}$$

0 halde serinin yakınsaklık aralığı $(-1, 2)$ aralığıdır.

ÖR: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapının 3 olması için b ne olmalıdır?

$$R = \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^n}{\ln n} \cdot \frac{\ln n+1}{b^{n+1}} \right| \\ = \frac{1}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{3} \text{ veya}$$

$$b = -\frac{1}{3} \text{ olmalıdır.}$$

ör: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n^2 \ln n}$

serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3-2x)^{n+1}}{(n+1)^2 \ln(n+1)} \cdot \frac{n^2 \ln n}{(3-2x)^n} \right|$$

$$= |3-2x| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 3-2x < 1$$

$$\Rightarrow -4 < -2x < -2$$

$$\Rightarrow 2 > x > 1 \Rightarrow 1 < x < 2$$

$x=1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ olur. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-serisi ile mukayese edersek ($p=2 > 1$ yakınsak)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \text{ olduğundan}$$

ve seçtiğimiz seri yakınsak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ de yakınsaktır.

$x=2 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln n}$

Alterne serisi elde edilir.

Mutlak değerlerden oluşan seri $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ yakınsak olduğundan

alterne seri mutlak yakınsaktır.

O halde serinin yakınsaklık aralığı $[1, 2]$ dir.

ÖR: $f(x) = \sqrt{1+2x}$ ile tanımlı fonksiyonun n . merteye
Maclaurin polinomunu bulunuz.

$$f(x) = \sqrt{1+2x}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = (1+2x)^{-1/2}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2 (1+2x)^{-3/2}$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2 (1+2x)^{-5/2}$$

$$f'''(0) = 1 \cdot 3$$

$$f^{(4)}(x) = 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 2 (1+2x)^{-7/2}$$

$$f^{(4)}(0) = -1 \cdot 3 \cdot 5$$

$$f^{(5)}(x) = 1 \cdot 3 \cdot (-5) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot 2 (1+2x)^{-9/2}$$

$$f^{(5)}(0) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{3!}x^3 + \frac{(-1) \cdot 3 \cdot 5}{4!}x^4 + \dots \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2} x^n \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)]}{n!} \end{aligned}$$

dir.

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[3^{n+1} + (-2)^{n+1}]}{n+1} (x+1)^{n+1} \cdot \frac{n}{(x+1)^n [3^n + (-2)^n]} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^{n+1} \left[1 + \left(\frac{-2}{3} \right)^{n+1} \right]}{3^n \left[1 + \left(\frac{-2}{3} \right)^n \right]} \right| \cdot |x+1|$$

$$= 3 |x+1| < 1 \Rightarrow |x+1| < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left[1 + \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right]}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

Alt-Harmonik
serisi şartlı
yakınsak.

2. seriyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ geometrik seriyle mukayese edersek;

$$a = \frac{2}{3} \quad |r| = \frac{2}{3} < 1 \quad \text{yakınsak.}$$

$$\frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} \right)^n < \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad (\forall n \text{ için}) \quad \text{olduğundan seri yakınsaktır.}$$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3} \right)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

Harmonik seri ıraksak yine geometrik seri yakınsak.

yakınsak ve ıraksak serilerin toplamı ıraksak olduğundan seri de ıraksaktır. O halde yakınsaklık aralığı $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ 'dir.

ÖR: Genel terimi $a_n = \frac{n}{(n^2+4)^2}$ olan serinin karakterini bulunuz.

1.yol (Mukayese Testi)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ serisini seçelim. Bir p-serisidir.

$p=3>1$ olduğundan yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n^2+4)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{(n^2+4)^2} = 1 = L \neq 0, \infty$$

olduğundan her iki seri aynı karakterdedir. Yani genel terimi verilen seri yakınsaktır.

2.yol (Integral Testi)

$f(n) = a_n = \frac{n}{(n^2+4)^2}$ $[2, \infty)$ aralığında sürekli ve pozitifdir.

$$f'(n) = \frac{(n^2+4)^2 - 2(n^2+4) \cdot 2n \cdot n}{(n^2+4)^4} = \frac{(n^2+4)[(n^2+4) - 4n^2]}{(n^2+4)^4}$$

$$= \frac{-3n^2+4}{(n^2+4)^3} < 0 \text{ azalan}$$

olduğundan integral testi uygulanabilir.

$$\int_2^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2} dn = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{n}{(n^2+4)^2} dn = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_8^{4+b^2} \frac{du}{2u^2}$$

$$\begin{aligned} n^2+4 &= u \\ 2n dn &= du \\ n dn &= \frac{du}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} n=2 &\Rightarrow u=8 \\ n=b &\Rightarrow u=4+b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{2u} \right|_8^{4+b^2} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4+b^2} - \frac{1}{8} \right) \end{aligned}$$

$= \frac{1}{16}$ olduğundan integral yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}$ serisi de yakınsaktır. Serinin baş tarafına sonlu sayıda terim eklemek serinin karakterini değiştirmeyeceğinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}$ serisi de yakınsaktır.

OR: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}$ olduğunu gösteriniz.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)}$ olduğundan serinin genel terimi basit kesirlere ayrılabilir.

$$\frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow$$

$$A = \lim_{n \rightarrow 1} (n-1) \cdot \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{2}{n+1} = 1$$

$$B = \lim_{n \rightarrow -1} (n+1) \cdot \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow -1} \frac{2}{n-1} = -1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right]$$

$$\Rightarrow S_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} = S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$