Tam kareye tamamlama

$$\underbrace{Ax^2+Bx+C}_{\text{Çarpanlarına ayrılamıyor}} = A\left(\underbrace{x^2+\frac{B}{A}x}+\frac{C}{A}\right)$$

$$\underbrace{x^2+x}+1$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}$$

$$=A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{4A^2}\right)$$

$$=A\left[\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}\right)+\left(\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right)\right]$$

$$=A\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A}$$

$$x+\frac{B}{A}=u$$

Ör/ $$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-[(x-1)^2-1]}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C$$

$$=\arcsin(x-1)+C$$

$$x-1=u$$

$$dx=du$$

Ör

$$\int \frac{x\,dx}{4x^2+12x+13} = \frac{1}{8}\int \frac{8x\,dx}{4x^2+12x+13} = \frac{1}{8}\int \frac{8x+12-12}{4x^2+12x+13}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{(8x+12)\,dx}{4x^2+12x+13} - \frac{12}{8}\int \frac{dx}{4x^2+12x+13}$$

$4x^2+12x+13 = u$

$(8x+12)\,dx = du$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{4\left(x^2+3x+\frac{13}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|u| - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{13}{4}}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|4x^2+12x+13| - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{13}{4}} = \frac{1}{8}\ln|4x^2+12x+13| - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+1}$$

$x+\frac{3}{2} = t$

$dx = dt$

$$= \frac{1}{8}\ln|4x^2+12x+13| - \frac{3}{8}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{1}{8}\ln|4x^2+12x+13| - \frac{3}{8}\arctan t + c = \frac{1}{8}\ln|4x^2+12x+13| - \frac{3}{8}\arctan\left(x+\frac{3}{2}\right) + c$$

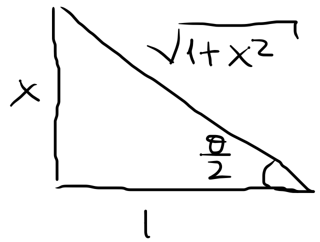
$$\int \frac{dt}{3t^2+4} \qquad \sqrt{3}\,t = 2\tan\theta$$

$\tan\frac{\theta}{2}$ dönüşümü

İntegre edilecek olan fonksiyon sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bir rasyonel fonksiyonu olarak verildiğinde kullanılan bir dönüşümdür.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$x = \tan\frac{\theta}{2}$ → integral değişkeni.



$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\boxed{\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2x}{1+x^2}}$$

$$2\,dx = (1+x^2)\,d\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

Ör/

$$\int \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int \frac{\frac{2\,dx}{1+x^2}}{2+\frac{1-x^2}{1+x^2}} = 2\int \frac{dx}{3+x^2} = 2\int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = x$$

$$d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}\right] + C$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{-\frac{2t}{1+t^2}+1} = 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = 2\int \frac{du}{u^2} = \frac{-2}{u}+C = \frac{-2}{t-1}+C = \frac{-2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}+C$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ $\qquad$ $t-1=u$

$\frac{2dt}{1+t^2} = dx$ $\qquad$ $dt = du$

$\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$

RASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

$P(x)$ m. dereceden ve $Q(x)$ n. dereceden polinomlar olmak üzere $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ şeklindeki integrallerdir.

Eğer $m \geq n$ ise polinom bölmesi ile çözüme gidilir.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & R(x) \\ \overline{S(x)} & \end{array}$$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} \longrightarrow$ derecesi n'den küçüktür.

Ör/ $\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left[x+3+\frac{(-x-3)}{x^2+1} \right] dx = \int x\,dx + 3\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + C$

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \cancel{-x^3} \mp x & x+3 \\ \hline 3x^2 - x & \\ \cancel{-3x^2} \mp 3 & \\ \hline -x-3 & \end{array}$$

Ör/ $\int \frac{x\,dx}{2x-1} = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \right] dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

$$\begin{array}{l|l} x & 2x-1 \\ \cline{2-2} \cancel{-x} \pm \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \end{array}$$

Eğer $m<n$ ise paydadaki polinomun derecesine bağlı olarak çözüme gidilir.

1°) Paydada 1. dereceden (Lineer) bir polinom varsa

$$\int \frac{d\,dx}{ax+b} = \int \frac{d\frac{du}{a}}{u} = \frac{d}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{d}{a}\ln|u| + C = \frac{d}{a}\ln|ax+b| + C$$

$ax+b=u$

$a\,dx = du$

$dx = \frac{du}{a}$

2°) Paydada 2. dereceden (kuadratik) bir polinom bulunuyorsa;

2. dereceden bir ifade daima kareye tamamlanarak ve uygun değişken dönüşümü yapılarak x^2+a^2 veya x^2-a^2 şekline getirilebilir. Bu durumda pay ya $Ax+B$ şeklinde ya da D şeklinde olacağından karşılaşacağımız rasyonel integraller

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}\ , \quad \int \frac{x\,dx}{x^2-a^2}\ , \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2}\ , \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2}$$

integrallerine benzer olacaktır.

İlk üç integral şu ana kadar öğrendiğimiz bilgilerle rahatlıkla çözebileceğimiz integrallerdir. İlk iki integralde $x^2 \mp a^2 = u$ dönüşümü yapılarak integral çözülür. 3. integral ise integrandının hangi fonksiyonun türevidir sorusuna cevap verebildiğimiz ya da $x = a\tan t$ dönüşümü ile çözebileceğimiz bir integraldir.

4. integral ise yeni bir yöntem olarak göreceğimiz basit kesirlere ayırma yöntemi ile çözülebilir.

$\dfrac{1}{x^2-a^2}$ ifadesini iki kesrin toplamı şeklinde ifade etmeye çalışalım:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x+a)\,(x-a)}$$

$$1 \equiv Ax + Aa + Bx - Ba$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv x(A+B) + a(A-B) \Rightarrow \begin{array}{r} A+B=0 \\ A-B=1 \\ \hline 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2a},\ B=-\frac{1}{2a} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{x-a} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+a} \right] dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + c$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

$Q(x)$'in n. dereceden olduğunu ve çarpanlarına ayrılabildiğini kabul edelim. Bu durumda $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesini basit kesirlerin toplamı şeklinde ifade edebiliriz.

1°) $Q(x)$'in çarpanları birbirinden farklı reel köklere sahip çarpanlar ise

$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ şeklinde ise,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$ şeklinde yazarız. Amacımız $A_1, A_2, \ldots A_n$ katsayılarını bulmaktır. Bu katsayıları bulmak için bir yol payda eşitlemek ve polinom özdeşliğinden istenilene ulaşmaktır($\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ örneğinde olduğu gibi)

Diğer bir yol ise ;

$$A_i = \lim_{x \to a_i} \cancel{(x-a_i)} \cdot \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cancel{(x-a_i)}\cdots(x-a_n)} = \frac{P(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

şeklinde limit hesabıdır.

Ör/ $$\int \frac{(x+4)\,dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{(x+4)\,dx}{(x-2)(x-3)} = \int \left[\frac{-6}{x-2} + \frac{7}{x-3}\right] dx = -6\int \frac{dx}{x-2} + 7\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= -6 \ln|x-2| + 7 \ln|x-3| + C$$

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{x-3} =$$

$$A = \frac{6}{-1} = -6, \quad B = \frac{7}{1} = 7$$

Ör/ $\displaystyle\int \frac{x^{3}+2}{x^{3}-x}\,dx = \int\left[1+\frac{x+2}{x^{3}-x}\right]dx = \int dx + \int \frac{(x+2)\,dx}{x^{3}-x} = x + \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

$$= x + \int\left[\frac{-2}{x} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right]dx$$

$$= x + -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$\begin{array}{r|l} x^{3}+2 & x^{3}-x \\ \cline{2-2} -x^{3}+x & 1 \\ \cline{1-1} x+2 & \end{array}$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$x+2 \equiv A(x^{2}-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$x+2 \equiv (A+B+C)x^{2} + (B-C)x + (-A)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \Rightarrow B+C=2 \\ B-C=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B=\frac{3}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$-A=2 \Rightarrow A=-2$$

2°) $Q(x)$'in çarpanlarında kompleks köklü çarpanlar varsa

$$Q(x) = (x^2+a_1^2)(x-a_3)(x-a_4)\cdots(x-a_n)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+A_2}{x^2+a_1^2} + \frac{A_3}{(x-a_3)} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Payda eşitlenir ve polinom özdeşliğinden bilinmeyen katsayılar bulunur.

Ör/

$$I = \int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}dx = \int \left[\frac{2}{x} + \frac{-x+3}{x^2+1}\right]dx = 2\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + 3\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\arctan x + C$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C).x$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2 \equiv (A+B)x^2 + Cx + A$$

$A+B=1$

$C=3$

$A=2 \Rightarrow B=-1$

Ör/ $I = \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+c)(x+1)$$

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C$$

$A+B=0$

$-A+B+C=0$

$A+C=1$

$-2A+C=0$

$A+C=1$

$3C=2$

$C=\frac{2}{3} \Rightarrow A=\frac{1}{3} \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow I = \int \left[\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$x^2-x+1=u$

$(2x-1)\,dx = du$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx - \frac{(-3)}{6}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$I = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$x-\frac{1}{2}=t \Rightarrow dx = dt$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|u| + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

3°) Paydadaki 1. dereceden ve 2. dereceden çarpanların tekrarlanması durumu