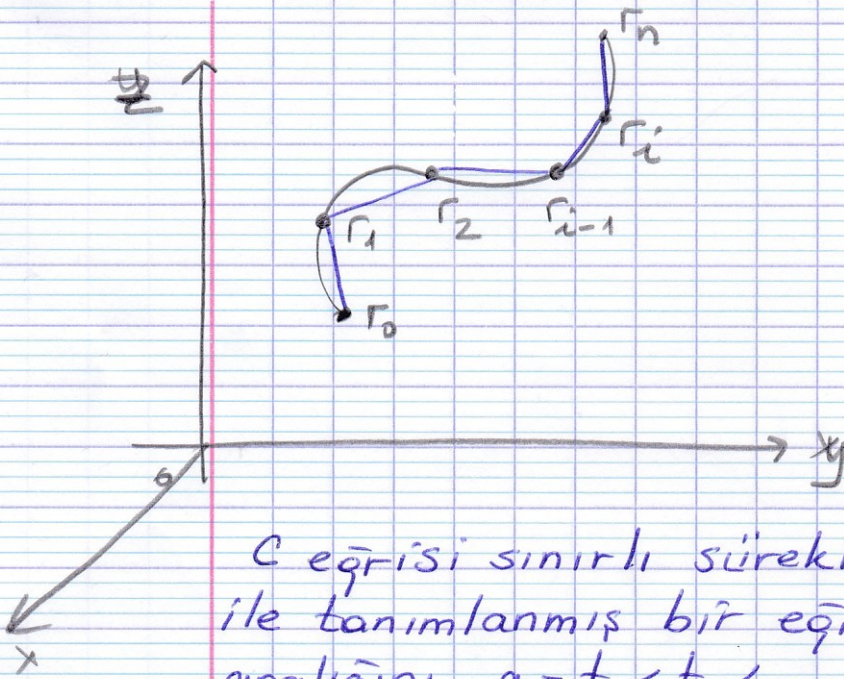


YAY UZUNLUĞU



C eğrisi sınırlı sürekli ve $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ ile tanımlanmış bir eğri olsun. $[a, b]$ kapalı aralığını $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ noktalarıyla n tane alt aralığa bölelim. $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$ ($0 \leq i \leq n$) noktaları C eğrisini n tane yaya bölecektir. Eğer $\vec{r}_{i-1}$ ve $\vec{r}_i$ arasındaki yay uzunluğuna bir yaklaşım olarak $|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|$ kirisinin uzunluğunu kullanırsak o zaman

$$L_n = \sum_{i=1}^n |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|$$

toplamı C 'nin uzunluğuna yaklaşıp. Eğer $\forall n$ seçimi için $L_n \leq L$ olacak şekilde bir L sabiti varsa o zaman C 'ye düzlenebilir eğri deriz. Bu en küçük L sayısına C 'nin uzunluğu deriz.

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad \Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} \quad \text{ise}$$

$$L_n = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i \quad \text{yazabiliriz.}$$

Eğer $\vec{r}(t)$ sürekli bir $\vec{v}(t)$ türeğine sahipse

0 zaman

$$L = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_i \rightarrow 0}} L_n = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b |\vec{v}(t)| dt$$

olacaktır. Burada $\vec{v}(t) dt = \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| dt = ds$ dir.

NOT: $[a, b]$ üzerindeki Kartezyen düzlem eğrisi $y=f(x)$ 'in yay uzunluğu elemanı ds , x 'i bir parametre gibi kullanarak elde edilebilir.

$$\vec{r} = x\vec{i} + f(x)\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = \vec{i} + f'(x)\vec{j} \text{ ve de}$$

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

olacaktır.

Benzer şekilde, kutupsal $r=f(\theta)$ düzlem eğrisinin yay uzunluğu elemanı ds

$$r(\theta) = f(\theta) \cos \theta \vec{i} + f(\theta) \sin \theta \vec{j} \text{ parametrizasyonu ile}$$

$$ds = \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

olarak elde edilir.

Yani C eğrisinin uzunluğu $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ olmak üzere

$$L = \int_a^b \underbrace{|\vec{v}(t)|}_{ds} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

dir.

|| Örnek: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \sin t\vec{k}$ eğrisinin $0 \leq t \leq \pi$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \vec{i} - \sin t\vec{j} + \cos t\vec{k}$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{\pi} |\vec{v}(t)| dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t \Big|_0^{\pi} \\ = \sqrt{2}(\pi - 0) \\ = \sqrt{2}\pi$$

|| ÖRNEK: $\vec{r}(t) = a \cos t\vec{i} + a \sin t\vec{j} + bt\vec{k}$ dairesel helisin $(a, 0, 0)$ ve $(a, 0, 2\pi b)$ noktaları arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \\ z &= bt \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\overbrace{(a, 0, 0)} \\ &a \cos t = a \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ &a \sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots \\ &bt = 0 \Rightarrow t = 0 \end{aligned} \right\} t_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overbrace{(a, 0, 2\pi b)} \\ &a \cos t = a \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ &a \sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots \\ &bt = 2\pi b \Rightarrow t = 2\pi \end{aligned} \left. \right\} \Rightarrow t_1 = 2\pi$$

$$\vec{r}'(t) = -a \sin t\vec{i} + a \cos t\vec{j} + b\vec{k}$$

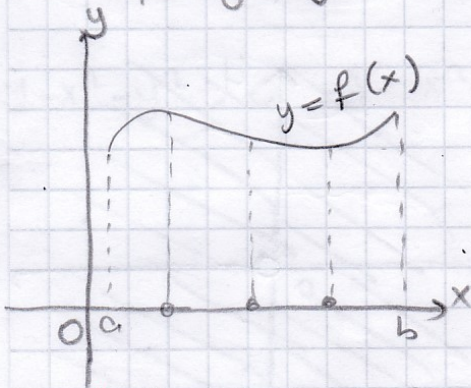
$$|\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} |\vec{v}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

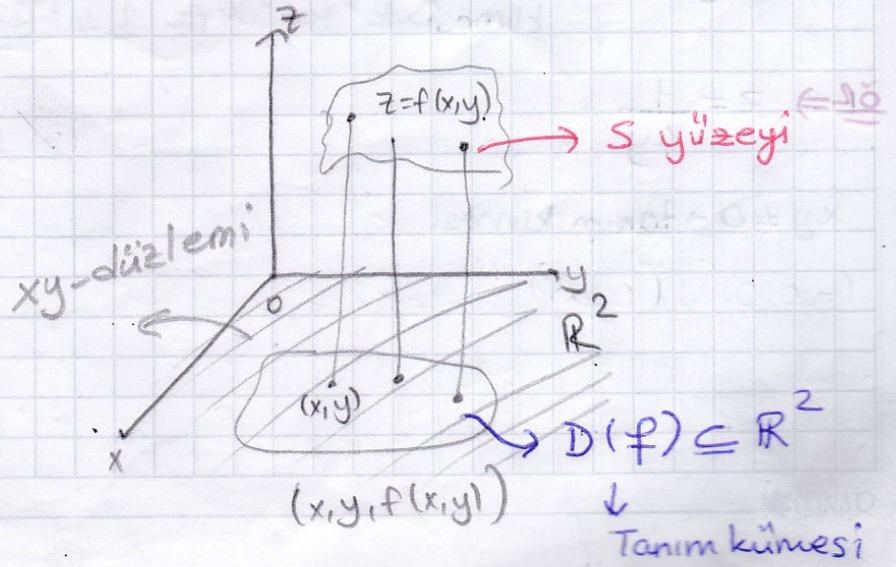
Tanım: İki reel değişkenli bir f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ 'nin bir $D(f)$ alt kümesindeki her bir (x,y) noktasına tek bir $f(x,y)$ reel sayısı karşılık getiren bir kuraldır. Burada $D(f)$ 'e f 'in tanım kümesi, tanım kümesindeki (x,y) noktalarından elde edilen $f(x,y)$ reel sayılarının kümesine de fonksiyonun görüntü kümesi ya da değer kümesi denir. İki değişkenli bir f fonksiyonunun grafiği (x,y) noktası fonksiyonun tanım kümesinde olmak üzere 3. boyutlu uzaydaki koordinatları $(x,y,f(x,y))$ olan noktaların kümesidir. Eğer $f(x,y)$ pozitif ise grafik fonksiyonun xy -düzlemindeki tanım kümesinin üzerinde $f(x,y) < 0$ ise de tanım kümesinin altında kalan $\mathbb{R}^3$ 'teki bir yüzeydir.

Üç değişkenli bir fonksiyonun grafiği 4 boyutlu bir uzayda 3 boyutlu bir hiper yüzeydir.



$$D(f) = [a, b]$$

$D(f) \subseteq \mathbb{R}$
Tanım kümesi



ör $\Rightarrow z = f(x, y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$ ($0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4-2x$)

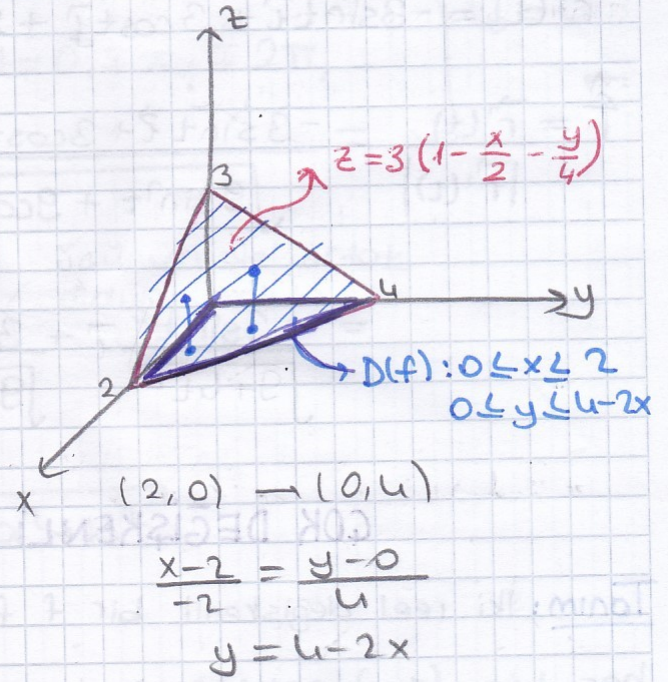
şeklini çiziniz

$$z = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)$$

$$\frac{z}{3} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

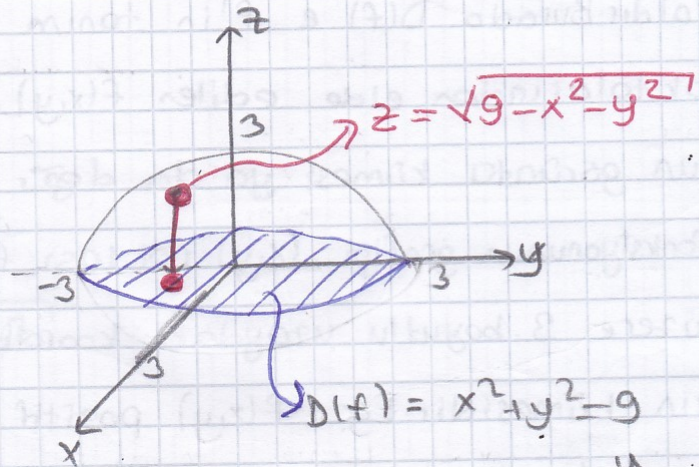
$$\begin{cases} y=0, z=0, x=2 \\ x=0, y=0, z=3 \\ x=0, z=0, y=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} A(2, 0, 0) \\ B(0, 4, 0) \\ C(0, 0, 3) \end{matrix}$$



ör $\Rightarrow z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$



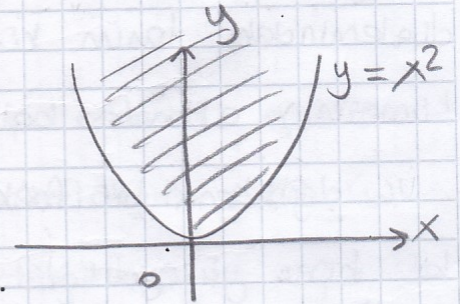
Tanım Kümeleri:

ör $\Rightarrow z = \sqrt{y - x^2} \Rightarrow$ tanım kümesi = ?

$$y - x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow y \geq x^2 \rightarrow \text{tanım kümesi}$$

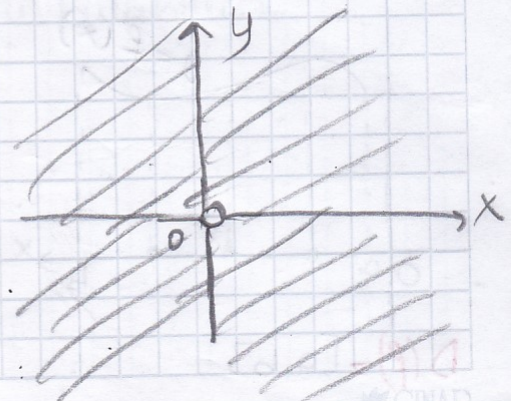
$$\text{Değer kümesi} = [0, \infty)$$



ör $\Rightarrow z = \frac{1}{x \cdot y}$

$$x \cdot y \neq 0 \rightarrow \text{tanım kümesi}$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$



$$\underline{\text{Öl}} \Rightarrow z = \sin(xy)$$

tanım kümesi $\rightarrow \mathbb{R}^2$

değer kümesi $\rightarrow [-1, 1]$

$$\underline{\text{Öl}} \Rightarrow w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

tanım kümesi $\rightarrow \mathbb{R}^3$

değer kümesi $[0, \infty)$

$$\underline{\text{Öl}} \Rightarrow w = x \cdot y \ln z$$

tanım kümesi $\rightarrow z > 0 \rightarrow$ üst yarı uzayda

değer kümesi $\rightarrow (-\infty, \infty)$

$$\underline{\text{Öl}} \Rightarrow z = \ln[x \cdot \ln(y-x)]$$

$$x \cdot \ln(y-x) > 0$$

$$x > 0$$

$$\ln(y-x) > 0$$

$$y-x > 1$$

$$y > 1+x$$

$$y-x > 0$$

$$y > x$$

$$x < 0$$

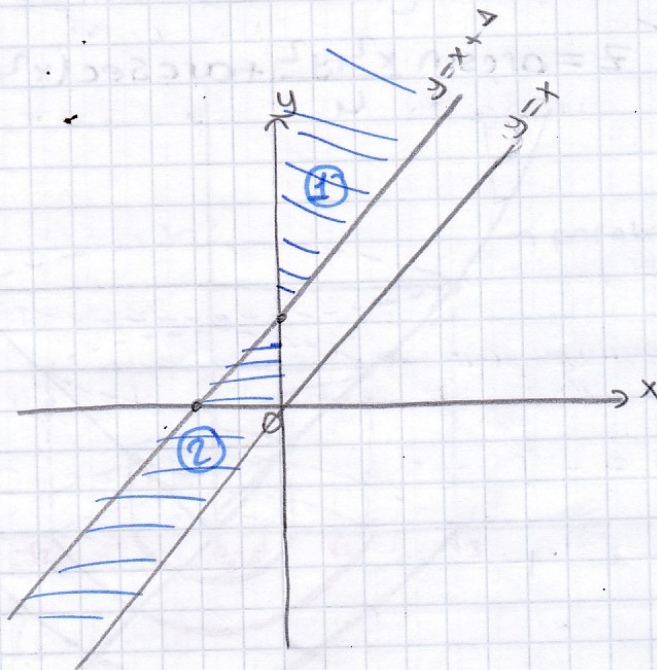
$$\ln(y-x) < 0$$

$$y-x < 1$$

$$y < 1+x$$

$$y-x > 0$$

$$y > x$$



$$\underline{\text{Öl}} \Rightarrow$$

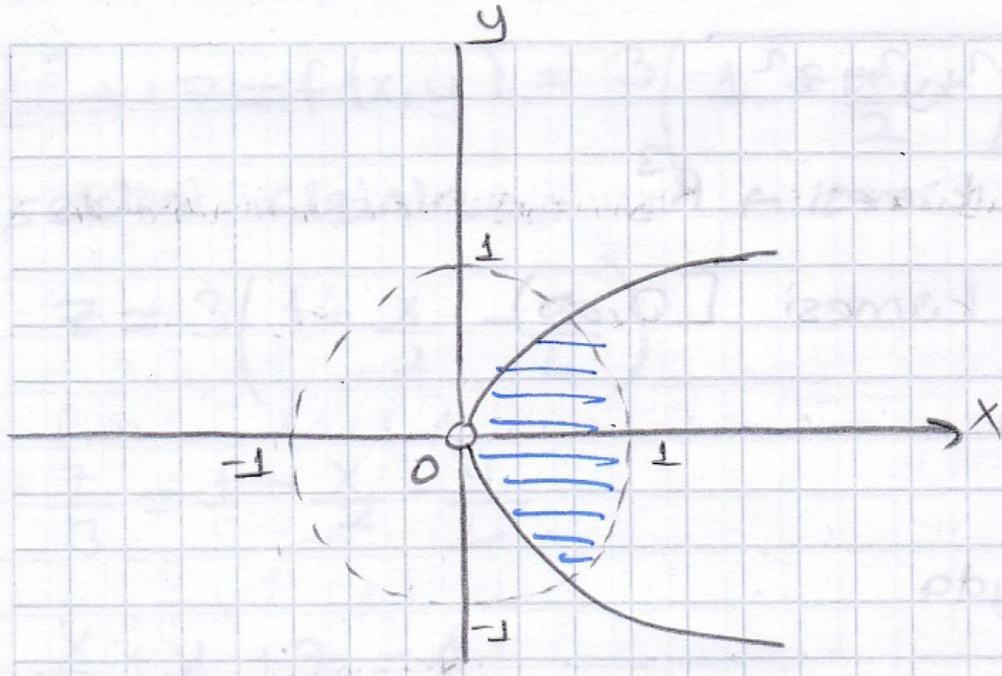
$$z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

tanım kümesini bulup çiziniz.

$$4x-y^2 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq y^2 \Rightarrow -2\sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}$$

$$\ln(1-x^2-y^2) \neq 0 \Rightarrow 1-x^2-y^2 \neq 1 \Rightarrow x^2+y^2 \neq 0$$

$$1-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2 < 1$$



ÖDEV

$z = \arcsin \frac{x^2+y^2}{4} + \operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulup düzlemde gösteriniz.

Düzey Eğrileri: (Seviye Eğrileri):

$f(x,y)$ fonksiyonunun grafik olarak temsil edilmesinin yöntemlerinden biri fonksiyon yüzeyinin iki boyutlu bir topografik haritasını çıkarmaktır. Bunun için xy düzleminde c sabitinin çeşitli değerleri için $f(x,y)=c$ eğrilerini alırız. Bu eğrilere fonksiyonun seviye (düzey) eğrileri denir. Bunlar $z=f(x,y)$ grafiğinin yatay $z=c$ düzlemleriyle kesişimi olan eğrilerin xy düzlemi üzerine olan dikey izdüşümleridir.

Ör/ $z=x^2+y^2$ fonksiyonunun grafiği ve bazı seviye eğrileri

$$c=0 \rightarrow x^2+y^2=0$$

$$c=1 \rightarrow x^2+y^2=1$$

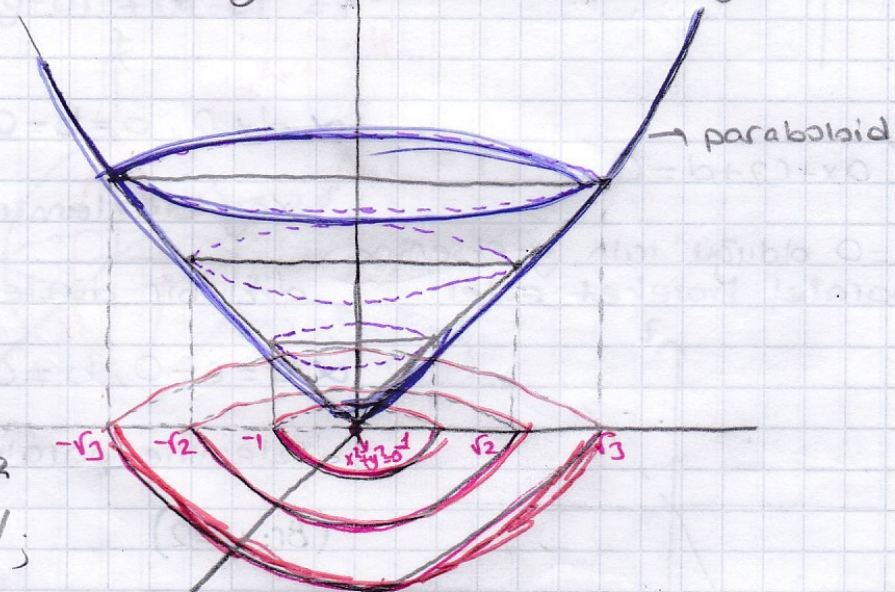
$$c=2 \rightarrow x^2+y^2=2$$

$$c=3 \rightarrow x^2+y^2=3$$

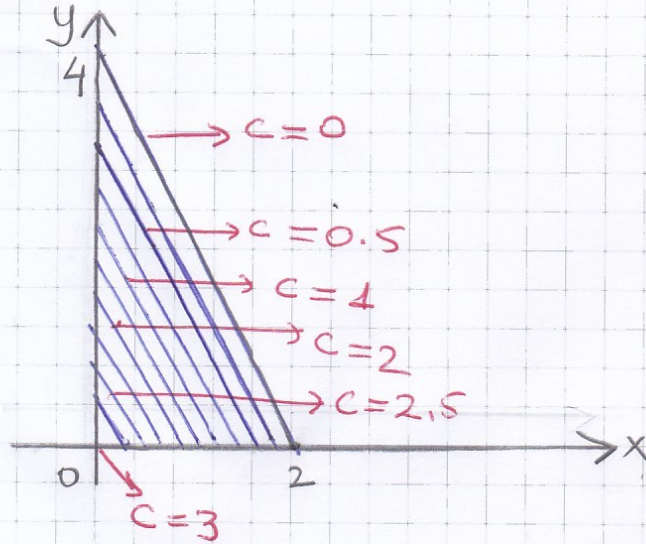
Grafik 3-boyutlu uzayda

bir dairesel paraboloid;

seviye eğrileri ise xy -düzleminde orijin merkezli çemberlerdir.



~~Ör~~ $f(x,y) = 3(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4})$ fonksiyonunun seviye eğrileri



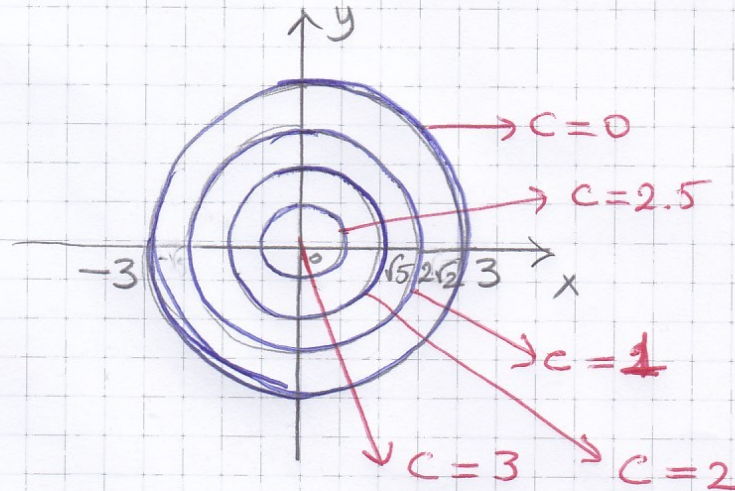
$$3(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}) = C$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 - \frac{C}{3}$$

$$0 \leq C \leq 3$$

doğruların ilk çeyrek te kalan parçalarıdır.

~~Ör~~ $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ fonksiyonunun düzey eğrileri



$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = C$$

$$x^2 + y^2 = 9 - C^2$$

$$0 \leq C \leq 3$$

şeklindeki merkezli çemberlerdir.

Lineer ve Kuadratik Yüzeyler:

Düzlem:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$0x + by + cz = -d$$

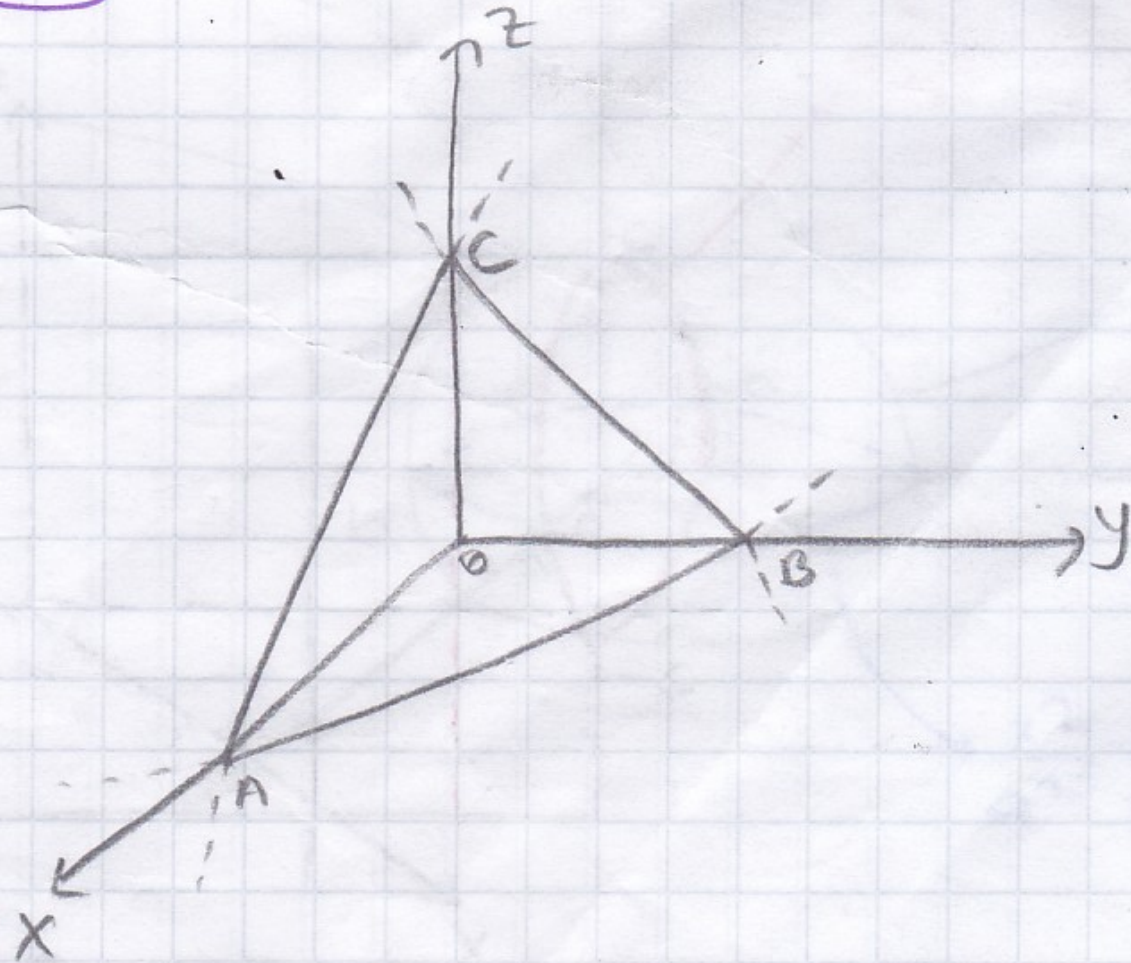
$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

$$\frac{-a}{d} = A$$

$$\frac{-b}{d} = B$$

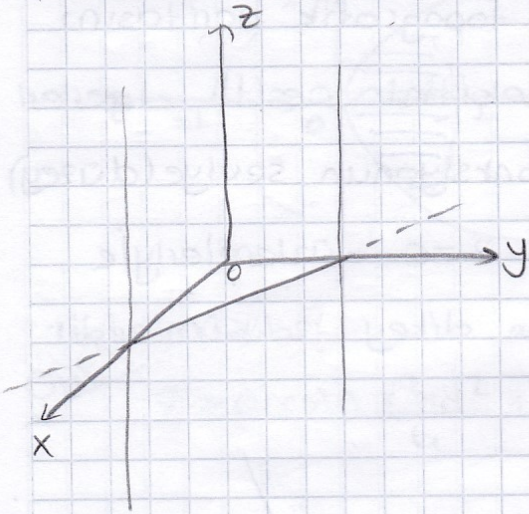
$$\frac{-c}{d} = C$$

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$



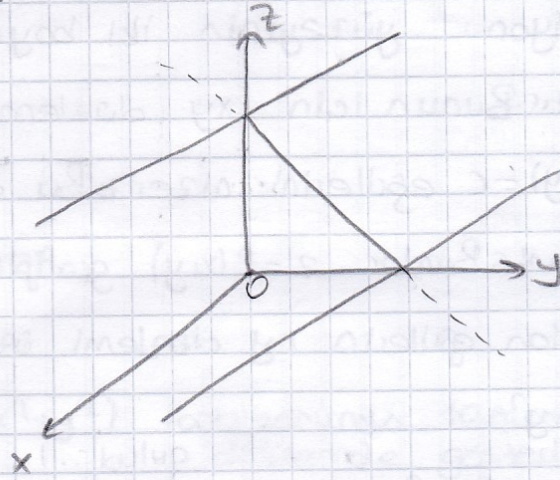
✓ $ax+by+d=0$

$z=0$ olduğu için z -eksenine paralel hareket eder



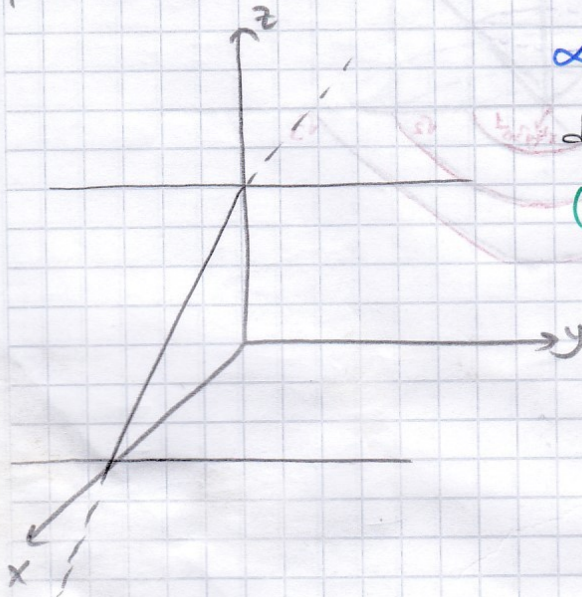
✓ $by+cz+d=0$

$x=0$ olduğu için x -eksenine paralel hareket eder



✓ $ax+cz+d=0$

$y=0$ olduğu için y -eksenine paralel hareket eder



✗ $d \neq 0, a=b=0, c \neq 0 \Rightarrow cz+d=0$ düzlemi

xoy düzlemine paralel, z -eksenine

dik bir düzlemdir. (ör: $z=3$)

✗ $a=c=0, b \neq 0 \Rightarrow by+d=0$ düzlemi xoz

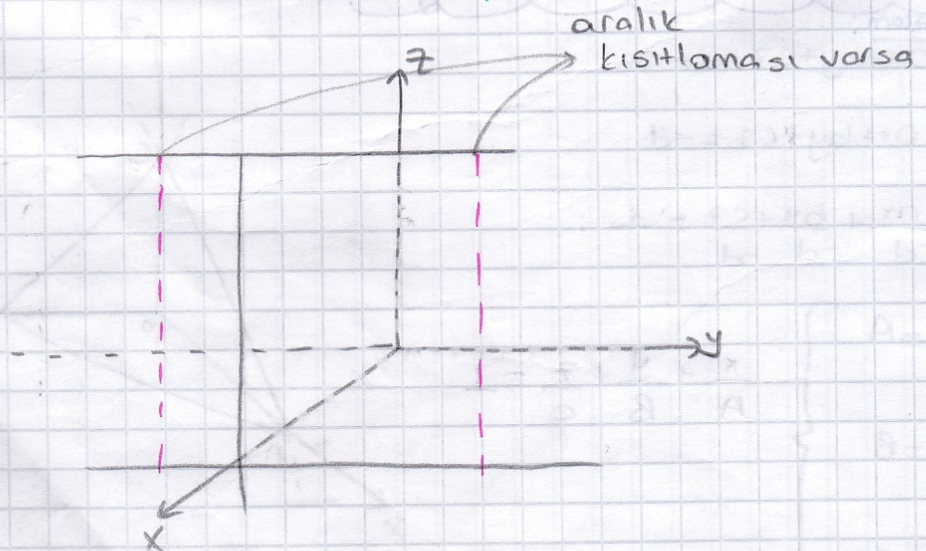
düzlemine paralel y -eksenine dik bir düzlemdir.

(ör: $y=2$)

✗ $b=c=0, a \neq 0 \Rightarrow ax+d=0$ düzlemi yo

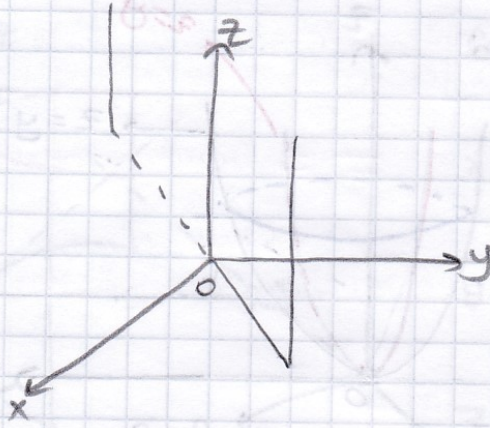
düzlemine paralel x -eksenine dik bir düz-

lemdir. (ör: $x=1$)



α $d=0$ ve a, b, c 'den birisi sıfır ise düzlem koordinat eksenlerinden geçer

$$x-y=0 \Rightarrow$$



Küre:

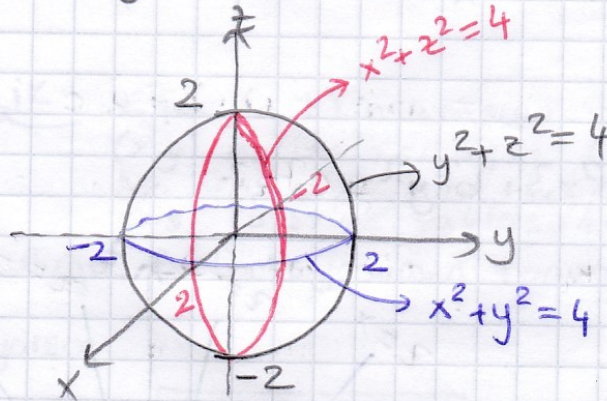
Genel denklemi $\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$x=0 \Rightarrow y^2 + z^2 = 4$$

$$y=0 \Rightarrow x^2 + z^2 = 4$$

$$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



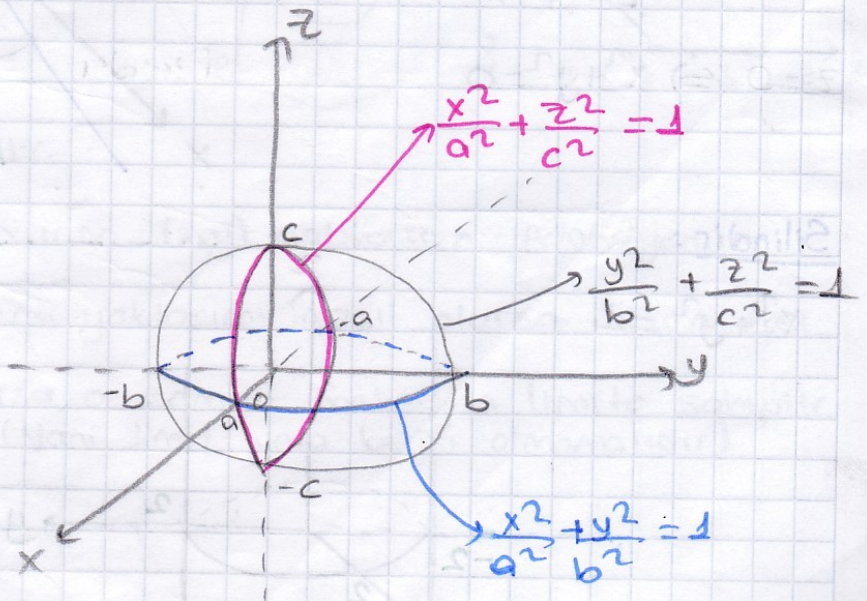
Elipsoid:

Genel denklemi $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Paraboloid:

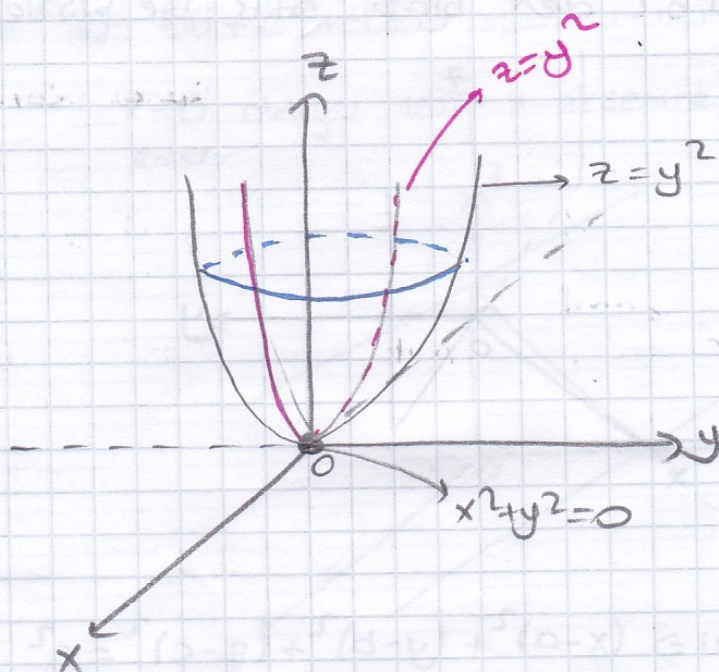
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$$

$$x^2 + y^2 = z$$

$$x=0 \Rightarrow z=y^2$$

$$y=0 \Rightarrow z=x^2$$

$$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$



Koni:

$$\text{Genel denklemi} \Rightarrow a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

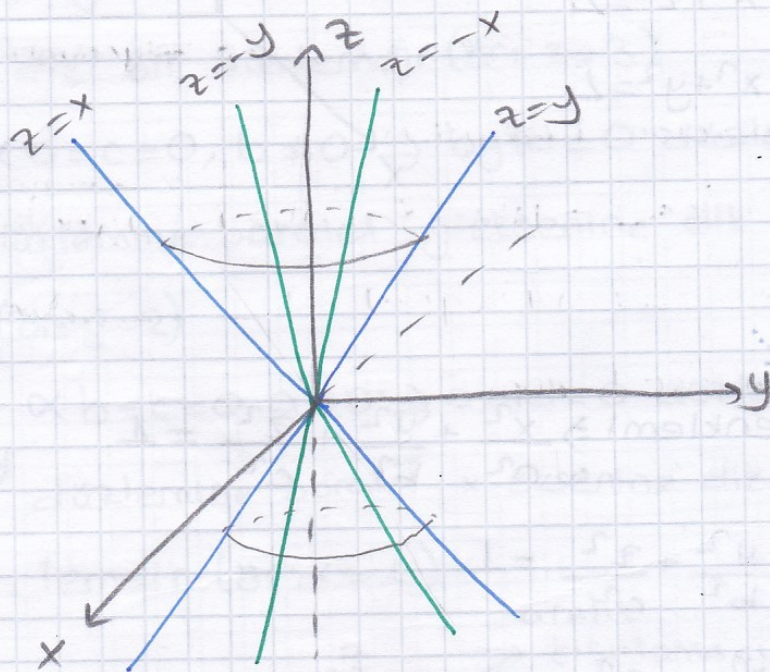
$$x=0 \Rightarrow z^2 = y^2$$

$$z = \pm y$$

$$y=0 \Rightarrow z^2 = x^2$$

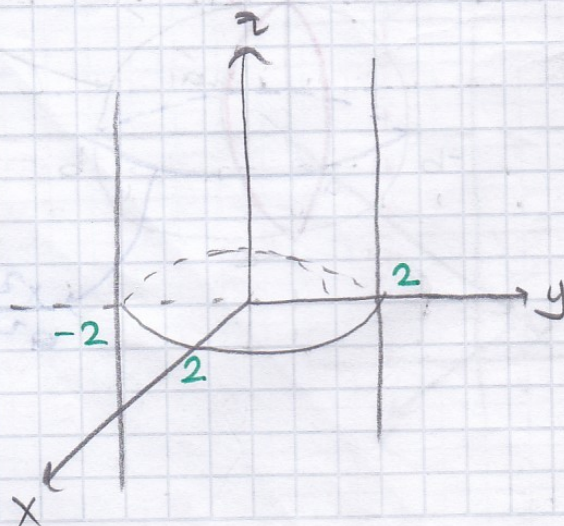
$$z = \pm x$$

$$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$



Silindir:

$$x^2 + y^2 = 4$$

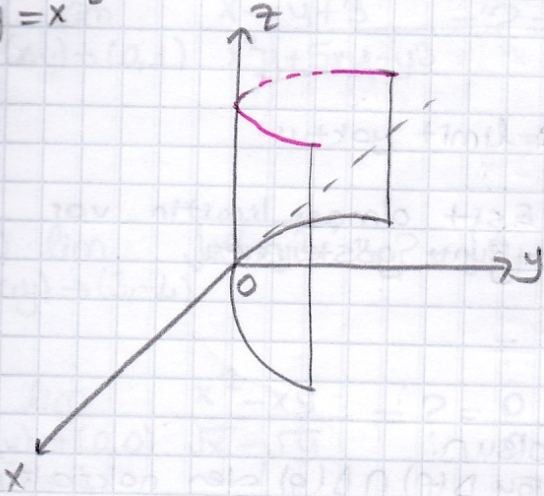


$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Parabolik Silindir:

$$y = x^2$$



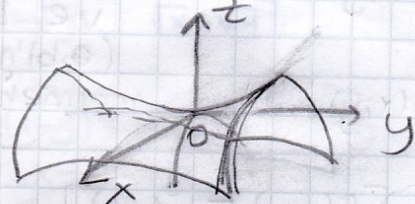
Hiperbolik Paraboloid

$$\text{Genel denklemi} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

$$x=0 \Rightarrow z = c \cdot \frac{y^2}{b^2} \quad (c>0)$$

$$y=0 \Rightarrow z = -c \cdot \frac{x^2}{a^2}$$

$$z=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$



LİMİT VE SÜREKLİLİK

Tanım: Eğer

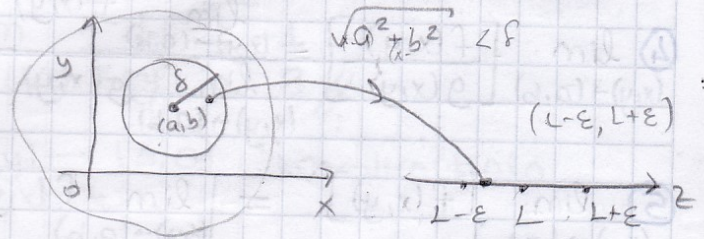
Eğer (a, b) noktasına yeterince yakın tüm (x, y) noktaları için $f(x, y)$ 'nin değerleri belli bir reel L sayısına keyfi derecede yakın ise (x, y) (a, b) 'ye yaklaşıırken f L limitine yaklaşıyor.

(i) (a, b) nin her komsuluğu f fonksiyonunun tanım kümesinden (a, b) 'den farklı) noktalar içeriyorsa

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ (x, y) nin tanım kümesinde) iken $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa

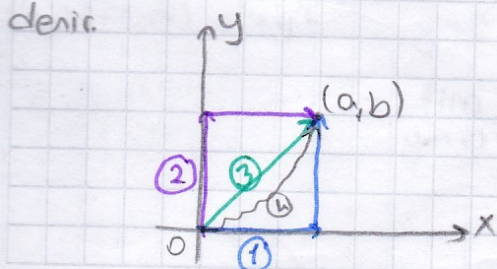
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \quad \text{denir.}$$

$$(x,y) \rightarrow (a,b) \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \end{array} \right.$$



NOT $\Rightarrow$ Eğer bir limit varsa tektir.

$\Rightarrow$ İki değişkenli bir fonksiyon için (x, y) noktasının fonksiyonun tanım kümesinde (a, b) noktasına yaklaşımı nasıl olursa olsun eğer $f(x, y)$ aynı L sayısına yaklaşıyorsa o zaman fonksiyon limite sahiptir (yani limit yola bağlı olmamalıdır)



Limitin Hesaplanması

Tek değişkenli bir $y=f(x)$ fonksiyonunda, x değişkeninin bir a değerine yaklaşması, bilindiği gibi tanım aralığı içinde sağdan ve soldan olabilir. Fonksiyonun $x \rightarrow a$ için bir limitinin mevcut olabilmesi için, sağdan ve soldan yaklaşım limitlerinin birbirine eşit olması gerekir.

İki değişkenli bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunda x ve y değişkenlerinin sırasıyla a ve b değerlerine yaklaşması, tanım bölgesi içinde sonsuz şekilde olabilir. Bu yaklaşım (a,b) 'den geçen herhangi eğriler veya doğrularla yapılabilir.

Farklı iki yolla alınan limitler birbirine eşit değilse, fonksiyonun limiti mevcut değildir. Limitin mevcut olabilmesi için tüm yollarla alınan limitlerin birbirine eşit olması gerekir. Yani limit yola bağlı olmamalıdır.

Herhangi bir yolla hesaplanan limitin, fonksiyonun limiti olduğunu limitin ϵ - δ tanımını kullanarak gösterebiliriz.

İki Kot Limit: (Çift yol testi)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right]$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right]$$

$\neq \Rightarrow$ limit yoktur

$\neq$ eşit olması limitin var olduğunu göstermez

Teorem:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

$\forall L, M, k \in \mathbb{R}$ olsun.

(a,b) 'nin her komsuluğu $D(f) \cap D(g)$ 'den noktalar içermek üzere

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$$

$$\textcircled{1} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \mp g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \mp \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L \mp M$$

$$\textcircled{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [k \cdot f(x,y)] = k \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = k \cdot L$$

$$\textcircled{3} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right] \cdot \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \right] = L \cdot M$$

$$\textcircled{4} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right] = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0 \text{ olmak koşuluyla})$$

$$\textcircled{5} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)]^n = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right]^n = L^n$$

$$\textcircled{6} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L} \quad (n \in \mathbb{Z}^+, n \text{ çift ise } L > 0 \text{ olmak koşuluyla})$$

ÖRNEKLER

x yerine "0", y yerine "1" yazarsınız

$$\textcircled{1} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = ? = \frac{0-0+3}{0+0-1} = \underline{\underline{-3}}$$

$$\textcircled{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = ? = \sqrt{9+16} = \underline{\underline{5}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = ? = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \underline{\underline{0}}$$

$$\textcircled{4} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1 \\ (x \neq y)}} \frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)} = ? = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-y)^2}{x-y}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x-y) = \underline{\underline{0}}$$

$$\textcircled{5} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2x^2-3xy+y^2}{2x^2+xy-y^2} = ? = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(2x-y)(x-y)}{(2x-y)(x+y)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x-y}{x+y} = \underline{\underline{\frac{-1}{3}}}$$

6) $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 'iken limitinin varlığını araştırınız.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{0}{x^4} \right] = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{0}{y^2} \right] = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$y=x$ boyunca yaklaşıalım.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^2(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

$y=x^2$ boyunca yaklaşıalım.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{y=x^2} = 1$$

Farklı noktalardan alınan limitler farklı çıktığından fonksiyon

bu noktada limite sahip değildir.

7) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y \sin \pi x}{x+y-2}$ fonksiyonunun limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y \sin \pi x}{x+y-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y \sin \pi x}{x+y-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sin \pi x}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{1}$$

$= -\pi$ $\neq$ limit yoktur.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y \sin \pi x}{x+y-2} = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{y \sin \pi x}{x+y-2} \right] = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\frac{0}{y-1} \right] = 0$$

8) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun orijinde limite sahip olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{0}{x^2} \right] = 0$$

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken $\left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ olacak şekilde

bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var mıdır?

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \leq |y| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$\delta = \varepsilon$ alırsak

$$\delta = \varepsilon > \underline{\underline{0}}$$

Süreklilik:

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise fonksiyon (a,b) noktasında süreklidir.

1) fonksiyon (a,b) 'de tanımlı

2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \rightarrow$ mevcut olmalı

3) (a,b) 'de limit değeri fonksiyonun (a,b) 'deki değerine eşit olmalı.

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x,y)$ (a,b) 'de süreklidir denir.

Ör $\Rightarrow$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz

$$f(0,0) = 0 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{0}{x^2} \right] = 0$$

$$y = kx \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2k)x^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{2k}{1+k^2}$$

fonksiyon süreksizdir

Ör $\Rightarrow$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x+y}} & x > 0, y > 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz

$$f(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0 = f(0,0)$$

$(x \neq y)$ ise;

$$\begin{aligned} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{y(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{y(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = y(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

$$x=y \Rightarrow f(x,x) = \frac{x^2-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{0}{2\sqrt{x}} = 0 = f(0,0)$$

ÖR $\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin.

$$f(0,0) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ sayısı için } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ iken } \left| \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var mıdır?

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\left| \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| = |x| \left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \left| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \right| < |x| < \delta$$

$$|x^2-y^2| \leq x^2+y^2$$

$\delta = \varepsilon$ alınırsa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) \rightarrow \text{sürekli dir.}$$

→ Üstel fonksiyon her noktada sürekli bir fonksiyondur

Bileşmelerin Sürekliliği:

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x_0, y_0)$ 'da sürekli olan tek değişkenli bir fonksiyon ise bu durumda $g(f(x,y))$ fonksiyonu ($h = g \circ f$) (x_0, y_0) 'da sürekli dir.

Ör $\Rightarrow e^{x-y}, \ln(1+x^2+y^2)$

KISMI TÜREVLER

Tanım: $f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre birinci mertebe kısmi türevleri: $z = f(x,y)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

limitlerinin mevcut olması koşuluyla sırasıyla $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$

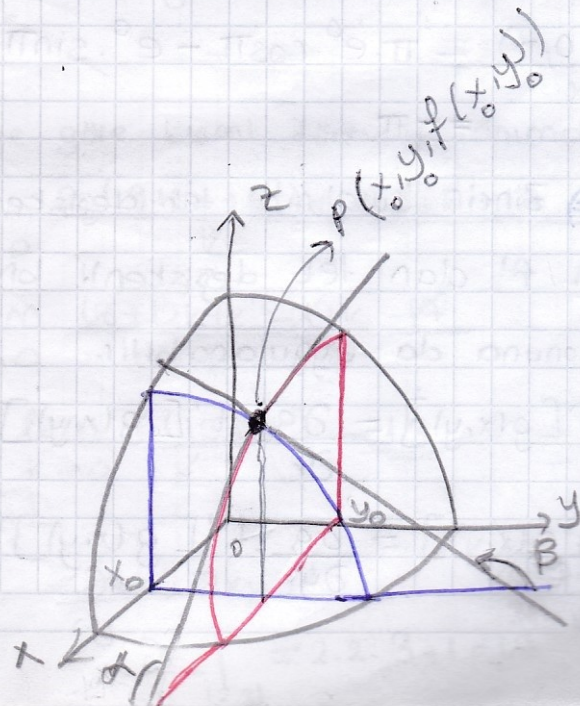
fonksiyonlarıdır. Burada $\frac{\partial z}{\partial x}$ y sabit bir parametre olmak üzere

sadece x 'in bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x,y)$ fonksiyonunun birinci mertebe türevidir.

Ör $\Rightarrow f(x,y) = x^2 \sin y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y$$

Kısmi Türevin Geometrik Anlamı:



$\frac{\partial z}{\partial x}$ | kısmi türevi $y=y_0$ 'da sabit bırakılmak üzere $f(x,y)$ fonksiyonunun $x=x_0$ 'da x 'e göre olan değişim oranını ölçer.

Grafik olarak $z=f(x,y)$ yüzeyi $y=y_0$ dikey düzlemi ile bir eğri boyunca kesilir. Eğer $y=y_0$ düzleminde $(0, y_0, 0)$ noktasından geçen yatay ve dikey doğruları koordinat eksenleri olarak alırsak o zaman eğrinin denklemi $z=f(x, y_0)$ olur. ve $x=x_0$ 'daki eğri $\frac{\partial z}{\partial x}$ 'in (x_0, y_0) 'daki değeridir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = D_x f = D_x z$$

↳ birinci değişkene göre türev

NOT $\Rightarrow$ Toplamlar, çarpımlar ve bölümler için geçerli olan standart tüm türev kuralları kısmi türevler için de geçerlidir.

ÖR $\Rightarrow z = x^3 y^2 + x^4 y + y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 3x^3 y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x^4 + 4y^3$$

ÖR $\Rightarrow f(x, y) = e^{xy} \cos(x+y) \Rightarrow \frac{\partial f(0, \pi)}{\partial x} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} \cos(x+y) - e^{xy} \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial f(0, \pi)}{\partial x} = \pi e^0 \cos \pi - e^0 \sin \pi = -\pi$$

NOT $\Rightarrow$ Zincir kuralının tek değişkenli versiyonu f fonksiyonunun türevi f' olan tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere $f[g(x, y)]$ fonksiyonuna da uygulanabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} f[g(x, y)] = \frac{\partial g}{\partial x} f'[g(x, y)]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f[g(x, y)] = \frac{\partial g}{\partial y} f'[g(x, y)]$$

ÖR $\Rightarrow$ f her yerde türevlenebilir, tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ 'nin $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left[\frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) \right] + y \left[-\frac{x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right) \right]$$

$$= \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ÖR} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2xy}{1+xz+yz} \right) &= \frac{0 \cdot (1+xz+yz) - (x+y) \cdot 2xy}{(1+xz+yz)^2} \\ &= \frac{-2xy(x+y)}{(1+xz+yz)^2} \end{aligned}$$

Kısmi Türevler ve Süreklilik

NOT $\Rightarrow$ Eğer tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasında türeğe sahip ise fonksiyon bu noktada süreklidir denir. Fakat bu özellik kısmi türevler için geçerli değildir. Yani bir $f(x,y)$ fonksiyonu belirli bir noktada hem x 'e hem de y 'ye göre kısmi türevlere sahip olduğu halde o noktada sürekli olmayabilir.

ÖR $\Rightarrow z = xy^2 - x^2 + y$

fonksiyonunun $(2,3)$ noktasındaki y 'ye göre kısmi türevini tanımdan yararlanarak hesaplayınız

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(2, 3+k) - f(2, 3)}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (3+k)^2 - 4 + (3+k) - [2 \cdot 9 - 4 + 3]}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (9 + 6k + k^2) - 4 + 3 + k - 14}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{18 + 12k + k^2 - 4 + 3 + k - 14}{k}$$

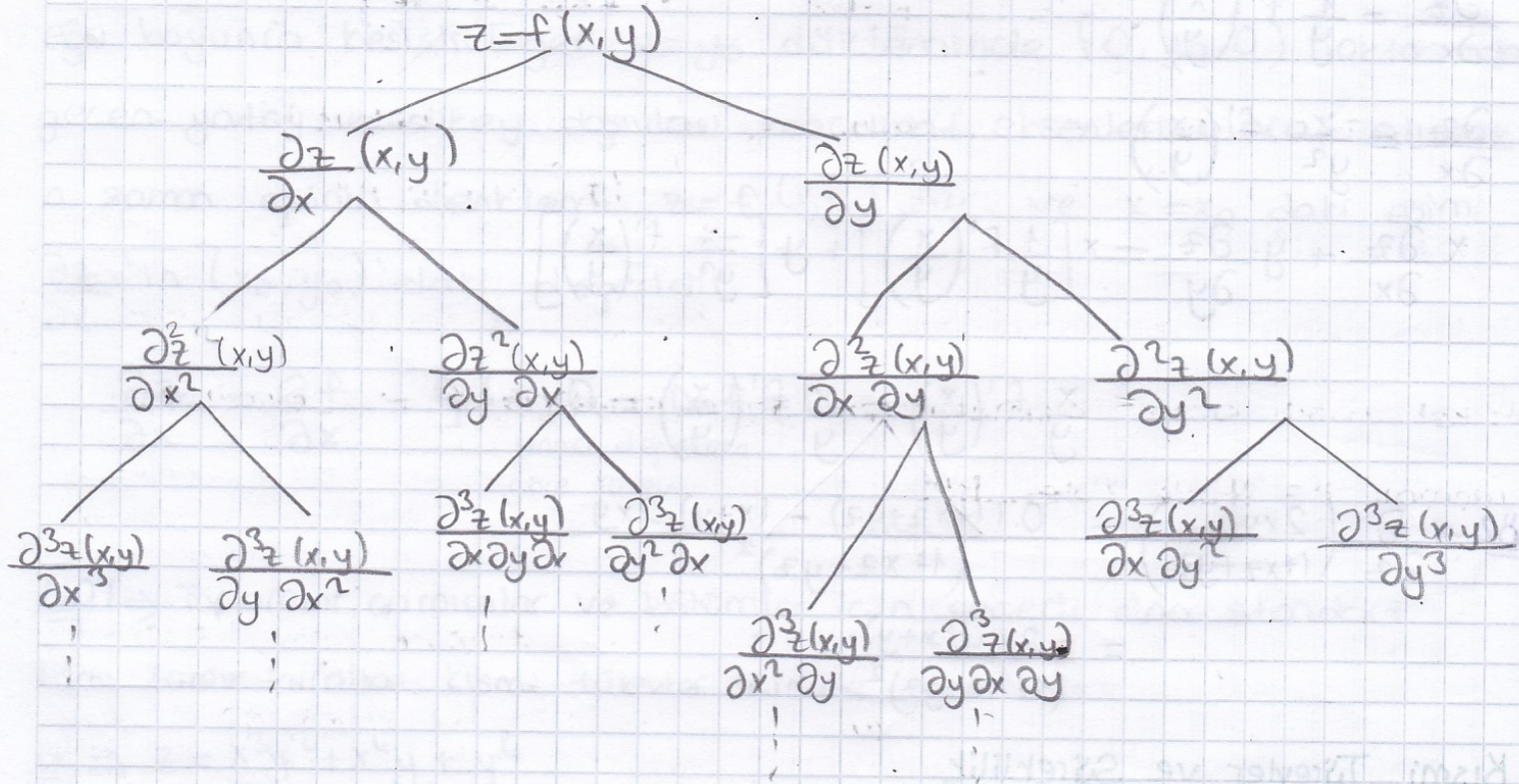
$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k(13 + 2k)}{k} = \underline{\underline{13}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2,3)} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 13$$

Yüksek Mertebeden Türevler

İki ve daha yüksek mertebeden kısmi türevler hesaplanmış mevcut kısmi türevlerin kısmi türevleri alınarak elde edilir.



✓ Türev alma sırası kullanılan notasyona göre farklıdır

$$\frac{\partial}{\partial x} = D_x \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = f_x(x, y) = z_x = D_x f = D_x z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx} \quad w = f(x, y, z)$$

ör: $f_{zyyxy} = \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z}$

ör: $f(x, y) = x^3 y^4$ fonksiyonunun ikinci mertebeye kısmi türevlerini bulunuz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^4 \rightarrow \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x y^4 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^2 y^3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3 y^3 \rightarrow \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 y^3 \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^3 y^2 \end{aligned}$$

Ör $\Rightarrow f(x, y, z) = e^{x-2y+3z}$ $\Rightarrow f_{yyz}, f_{yzy}, f_{zyy}$ türevlerini hesaplayınız.

$$f_y = -2 \cdot e^{x-2y+3z}$$

$$f_{yy} = -2 \cdot e^{x-2y+3z} \rightarrow f_{yyz} = -2 \cdot 3 \cdot e^{x-2y+3z} = -6e^{x-2y+3z}$$

$$f_{yz} = -6e^{x-2y+3z} \rightarrow f_{zyz} = -6 \cdot 3 \cdot e^{x-2y+3z} = -18e^{x-2y+3z}$$

$$f_z = 3e^{x-2y+3z} \rightarrow f_{zy} = 3 \cdot (-2) \cdot e^{x-2y+3z} = -6e^{x-2y+3z} \rightarrow f_{zyy} = -6 \cdot (-2) \cdot e^{x-2y+3z} = 12e^{x-2y+3z}$$

$\Rightarrow$ Verilen her iki örnekte karışık türevler aynı değişkenlere göre fakat farklı sırada alınmalarına karşın eşittirler. Bunu "Schwarz Teoremi" ile ifade edebiliriz.

Teorem: (Schwarz Teoremi) (Karışık Türevlerin Eşitliği):

Bir f fonksiyonunun n . mertebeye kadar karışık türevinin aynı türevleri farklı bir sıralamayla alındığını kabul edelim. Eğer bu kısmi türevler bir P noktasında sürekli ve eğer f ve onun n . mertebeden daha yüksek mertebeli kısmi türevleri bu P noktasının komşuluğunda sürekli iseler o zaman bu iki karışık kısmi türev P noktasında eşittir.

Ör $\Rightarrow f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y \Rightarrow \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y} = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xyz + x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4yz + 2x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = -4z$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y} = -4$$

Ör $\Rightarrow z = e^{kx} \cdot \sin(ky)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Laplace denklemi})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx} \sin(ky)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = k e^{kx} \cos(ky)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 e^{kx} \sin(ky)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2 e^{kx} \sin(ky)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 e^{kx} \sin(ky) + [-k^2 e^{kx} \sin(ky)] = \underline{\underline{0}}$$

Ör $\Rightarrow f, g$ iki kez türevlenebilir tek değerli fonksiyonlar olmak üzere

$w = f(x-ct) + g(x+ct)$ fonksiyonunun $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ sağladığını

gösteriniz

Dalga denklemi

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$= c^2 [f''(x-ct) + g''(x+ct)]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Bileşik Fonksiyonlar ve Türevleri: Zincir Kuralı

$z = f(x, y)$ fonksiyonunda x ve y bağımsız değişkenlerinin herhangi biri veya her ikisi bir başka değişkenin ya da değişkenlerin fonksiyonları iseler z 'e bileşik fonksiyon denir. Çok değişkenli bileşik fonksiyonların kısmi türevlerini hesaplamak tek değişkenliye göre daha karmaşıktır. Mümkün olan tüm olasılıkları kapsayacak şekilde kısmi türevler için basit bir formül yoktur.

Teorem: $z = f(x, y)$, $x = h(t, s)$, $y = g(t, s)$ fonksiyonları ve bunların 1. mertebeden kısmi türevleri, bir $P(a, b)$ noktasında tanımlı, ve sözlü iseler

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{dir.}$$

$$y = f(x)$$

$$x = h(t) \rightarrow y = f[h(t)]$$

$$1^{\circ}) z = f(x, y) = f[x(t), y(t)] = f(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$2^{\circ}) z = f(x, y) = f[x(s, t), y(s, t)] = F(s, t)$$

$$x = x(s, t)$$

$$y = y(s, t)$$

$$3^{\circ}) z = f(x, y) = f[x(r, s, t), y(k, m)] = F(r, s, t, k, m)$$

$$x = x(r, s, t)$$

$$y = y(k, m)$$

$$4^{\circ}) w = f(x, y, z) = f[x(u, v), y(u, v, r), z(r)] = F(u, v, r)$$

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v, r)$$

$$z = z(r)$$

$$\begin{aligned} 5) z = f(u, v, r) &= f[u(x, y, r), v(x, y, r), r(x, y)] = \\ &= f[u[x, y, r(x, y)], v[x, y, r(x, y)], r(x, y)] \\ &= F(x, y) \end{aligned}$$

Türevleri:

$$1^{\circ}) z = f(x, y) = f[x(t), y(t)] = F(t)$$

$$x = x(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$y = y(t)$$

} Tek değişkenli olduğu için
adi türevelere sahip

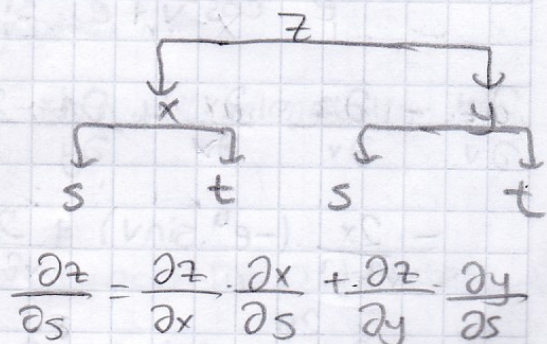
$$2^{\circ}) z = f(x, y) = f[x(s, t), y(s, t)] = F(s, t)$$

$$x = x(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$y = y(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$



ÖRNEKLER

1) Çok değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralını kullanarak

$w = x \cdot y$ denkleminin t 'ye göre türevini $\left. \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right\}$ yolu üzerinde hesaplayınız ve

$t = \pi/2$ 'deki değeri = ?

$$w = f(x, y) = f(x(t), y(t)) = f(t)$$

$$x = \cos t \quad x = x(t)$$

$$y = \sin t \quad y = y(t)$$

Leibnitz notasyonu

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= y(-\sin t) + x \cdot \cos t$$

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t$$

$$= \cos 2t$$

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

2)

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

$$x = e^u \cos v$$

$$y = e^u \sin v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot e^u \cos v + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot e^u \sin v$$

$$= \frac{2e^{2u} \cos^2 v + 2e^{2u} \sin^2 v}{e^{2u} \cos^2 v + e^{2u} \sin^2 v} = \underline{\underline{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot (-e^u \sin v) + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot (e^u \cos v)$$

$$= \frac{-2e^{2u} \cos v \sin v + 2e^{2u} \sin v \cos v}{e^{2u} (\cos^2 v + \sin^2 v)}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$w = f(u, v)$$

$$u = u(x, y) = x^2 y$$

$$v = v(x, y) = x + 2y$$

$$3) w = f(x^2 y, x + 2y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f_u(x^2 y, x + 2y) \cdot 2xy + f_v(x^2 y, x + 2y) \cdot 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f_u(x^2 y, x + 2y) \cdot x^2 + f_v(x^2 y, x + 2y) \cdot 2$$

$$4) T(x, y, z, t) = \frac{xy}{1+z} (1+t)$$

$$x = t$$

$$y = 2t$$

$$z = t - t^2$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = ?$$

$$9^o) z = f(x, y)$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

old. göster.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{y(1+t)}{1+z} \cdot 1 + \frac{x(1+t)}{1+z} \cdot 2 + \left[\frac{-xy(1+t)}{(1+z)^2} \right] \cdot (1-2t) + \frac{xy}{1+z} \cdot 1$$

$$= \frac{2t(1+t)}{1+t-t^2} + \frac{2t(1+t)}{1+t-t^2} - \frac{2t^2(1+t)(1-2t)}{(1+t-t^2)^2} + \frac{2t^2}{1+t-t^2}$$

$$5) z = \sin(x^2 y)$$

$$x = st^2$$

$$y = s^2 + \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = ?$$

$$6^o) w = xy + z, x = \cos t, y = \sin t, z = t$$

$$5 \text{ ile aynı}$$

$$z = \sin(x^2 y) \quad x = st^2 \quad y = s^2 + \frac{1}{t}$$

a) Dep. dönüşümü yap

b) iki dep. için zincir kuralı.

$$8^o) w = x + 2y + z^2, x = \frac{r}{s}, y = r^2 + \ln s, z = 2r$$

Kopalı Fonksiyonların Türevleri:

İki değişkenli zincir kuralı kopalı türevin bazı cebirsel formüllerini ortaya çıkarır. Aşağıdaki koşulları varsayalım:

→ $f(x, y)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyondur

→ $f(x, y) = 0$ denklemi y 'yi kopalı bir şekilde x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlar.

$z = f(x, y) = 0$ olduğundan $\frac{\partial z}{\partial x}$ sıfır olmak zorundadır. O halde;