

5.3 Sonlu Farklar Metodu

İkinci mertebeden lineer bir ADD olan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (125)$$

şeklindeki genel ADD'nin sonlu farklar metoduyla çözeceğiz.

Öncelikle Taylor açılımı ve türevler için geriye ve ileriye doğru Taylor açılımlarını hatırlayalım. İleriye doğru açılım şu şekildedir:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \Delta x_n y'(x_n) + \frac{\Delta x_n^2}{2!} y''(x_n) + \frac{\Delta x_n^3}{3!} y'''(x_n) + \dots$$

burada adım boyutu $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ olarak tanımlanır. Bu, x_n noktasından x_{n+1} noktasına doğru ileriye projeksiyon yapar. Geriye doğru açılım ise şu şekildedir (bu, önceki şekilden bir adım kaydırılmıştır):

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - \Delta x_{n-1} y'(x_n) + \frac{\Delta x_{n-1}^2}{2!} y''(x_n) - \frac{\Delta x_{n-1}^3}{3!} y'''(x_n) \pm \dots$$

Bu ifadeleri ikinci türevin birinci ve ikinci türevin ikinci türevin modellerini elde etmek için manipüle edebiliriz.

Eşitlikleri adım boyutu sabit ve $\Delta x_n = h$ olacak şekilde yazar ve formülleri tekrar düzenlersek:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \dots \quad (126)$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) \pm \dots \quad (127)$$

buradaki ilk denklem ileriye açılım, ikinci denklem ise geriye açılım olarak adlandırılır ve sabit adım boyutunu varsayar. Bu denklemleri $y'(x_n)$ için çözersek;

$$y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + \frac{1}{h} \left[-\frac{h^2}{2!} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) - \dots \right]$$

$$y'(x_n) = \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h} + \frac{1}{h} \left[+\frac{h^2}{2!} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) \pm \dots \right]$$

Bu denklemleri taraf tarafa toplarsak bazı terimler sadeleşir ve dolayısıyla aşağıdakini elde ederiz.

$$y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}) = 2h y'(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^5}{5!} y''''(x_n) + \dots$$

Şimdi bu denklemi $y'(x_n)$ için çözersek merkezi fark formülünü elde ederiz:

$$y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}))}{2h} - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) - \frac{h^5}{5!} y''''(x_n) + \dots$$

İkinci mertebeden ADD'lerde bulunan ikinci türev için benzer bir açılım elde etmemiz gerekiyor.

Denklem (126) ve denklem (127) denklemlerini taraf tarafa topladığımızda, birinci mertebe türevler sadeleşir ve şunu elde ederiz:

$$y(x_{n+1}) + y(x_{n-1}) = 2y(x_n) + 2\frac{h^2}{2!} y''(x_n) + 2\frac{h^4}{4!} y''''(x_n) + \dots$$

Bu denklemde ikinci türevi yalnız bırakırsak aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$y''(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1}))}{h^2} - \frac{1}{h^2} \left[\frac{h^4}{4!} y''''(x_n) + \dots \right]$$

Bu formül açılımlarını belirli bir nokta da keserek formülleri aşağıdaki gibi yalınlaştırabiliriz. Ve formüllerdeki diğer terimleri de $\mathcal{O}(\cdot)$ kesme hatası olarak gösterebiliriz.

Birinci türev yaklaşımları:

Merkezi fark:

$$y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

İleri fark:

$$y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Geri fark:

$$y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \mathcal{O}(h)$$

İkinci türev yaklaşımı:

$$y''(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Formülleri elde ettik şimdi bu formülleri ana denklemde yerine yazacağız. Görüldüğü gibi 2. mertebe türev için yerine yazılacak türev tek iken; birinci mertebe türev için 3 alternatif bulunmaktadır. Şimdi biz birinci mertebe türev için **merkezi fark** formülünü ele alarak problem denklem (125) problemi için genel bir formül vereceğiz. İlk olarak; denklem (125) de $x = x_n$ yazarsak;

$$y''(x_n) + p(x_n)y'(x_n) + q(x_n)y(x_n) = r(x_n)$$

olur.

Şimdi birinci ve ikinci türevler için açılımlarımızı elde ettik ve bu denklemde yerine koyabiliriz.

$$\frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1}))}{h^2} + p(x_n)\frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}))}{2h} + q(x_n)y(x_n) = r(x_n) + \mathcal{O}(h^2)$$

Burada aynı terimleri bir araya toplarsak;

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_n)}{2h} \right] y(x_{n-1}) + \left[\frac{-2}{h^2} + q(x_n) \right] y(x_n) + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_n)}{2h} \right] y(x_{n+1}) = r(x_n) + \mathcal{O}(h^2)$$

elde edilir. Veya

$$\left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_n)}{2h} \right] y_{n-1} + \left[\frac{-2}{h^2} + q(x_n) \right] y_n + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_n)}{2h} \right] y_{n+1} = r(x_n) + \mathcal{O}(h^2)$$

elde edilir.

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b} \tag{128}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 - \frac{h}{2} p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N) & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right) w_0 \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{N-1}) \\ -h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) w_{N+1} \end{bmatrix} \quad (129)$$

Sonuç olarak, bu cebirsel denklemi Gauss eliminasyon veya Thomas metodu gibi metotlarla çözülerek çözüm elde edilmiş olur.

Uyarı 5.1. *Peki, bu denklem sistemi her zaman yakınsar mı? Bunun için yeter koşulumuz şudur: Eğer denklem sistemi köşegen olarak baskınsa, o zaman her zaman yakınsar.*

Örnek 5.2.

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2, \quad h = \frac{1}{2} \quad (130)$$

Merkezi farklar yöntemini kullanarak çözünüz.

Çözüm.

$$\begin{array}{ccccc} w_0 = 0 & & w_1 = ? & & w_2 = 2 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ x_0 = 0 & & x_1 = 1/2 & & x_2 = 1 \\ \leftarrow & & \times & & \rightarrow \\ & h = 0.5 & & h = 0.5 & \end{array}$$

Bu denklemin merkezi farklarla yaklaşık çözümü için aşağıdaki formülü kullanacağız:

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Ana denklemde yani, denklem (130) de y'' yerine yukarıdaki yaklaşık değerini yazarsak;

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = x_i \quad (131)$$

elde ederiz. $i = 1$ için

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + y_1 = x_1$$

olur. Başlangıç koşullarından $y_0 = 0, y_2 = 2, x_1 = 0.5$ olduğunu biliyoruz. bu değerleri ve $h = 1$ i yerine yazıp denklemi y_1 için çözersek:

$$\frac{2 - 2y_1 + 0}{(0.5)^2} + y_1 = 0.5$$

Bulunur. Sadeleştirirsek:

$$8 - 8y_1 + y_1 = 0.5$$

elde edilir.

$$-7y_1 = 0.5 - 8$$

$$-7y_1 = -7.5$$

Son olarak, y_1 değerini bulmak için her iki tarafı da 7'ye böleriz:

$$y_1 = \frac{7.5}{7} \approx 1.0714$$

Örnek 5.3. Şimdi aynı problemi $h = 1/3$ için çözelim. Yani;

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2, \quad h = \frac{1}{3}$$

Merkezi farklar yöntemini kullanarak çözelim.

Çözüm.

Öncelikle, genel formülümüzü merkezi farklar yöntemi için yazalım:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = x_i$$

Bu problem için $h = 1/3$ olduğunu biliyoruz, böylece ağ noktalarımız $x = 0, 1/3, 2/3, 1$ olacaktır. Bilinen değerler $y_0 = 0$ ve $y_3 = 2$ 'dir ve y_1 ve y_2 değerlerini bulmak istiyoruz.

Bu örnekte, y_1 ve y_2 'nin birbirine bağlı olduğu iki denklem elde edeceğiz.

$i = 1$ için:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{(1/3)^2} + y_1 = x_1$$

Bu denkleme $y_0 = 0$ ve $x_1 = 1/3$ değerlerini koyarsak, y_1 için ilk denklemimiz oluşur:

$$9y_2 - 18y_1 + y_1 = 1/3$$

$i = 2$ için;

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(1/3)^2} + y_2 = x_2$$

bulunur. Bu denkleme $y_3 = 2$ ve $x_2 = 2/3$ değerlerini koyarsak, y_2 için ikinci denklemimiz oluşur:

$$18 - 18y_2 + 9y_1 + y_2 = 2/3$$

Bu iki denklemi çözerek $y_1 = 0.722756$, $y_2 = 1.40224$ değerlerini bulabiliriz.

Örnek 5.4.

$$y'' - y' + 2y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad h = 1/2$$

Merkezi farklar yöntemini kullanarak çözüünüz.

Çözüm.

x 'in alacağı değerler: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$.

Bu durumda $y_0 = 1$ ve $y_2 = 2$ bilinir ve y_1 'i bulmamız gerekmektedir.

Sonlu farklar formülümüz:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = 2x_i$$

Bu durumda $i = 1$ için denklemimiz şu şekilde olacak:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - \frac{y_2 - y_0}{2h} + 2y_1 = 2x_1$$

Verilen değerleri yerine koyarsak:

$$\frac{2 - 2y_1 + 1}{(1/2)^2} - \frac{2 - 1}{2 * (1/2)} + 2y_1 = 2 * (1/2)$$

Sadeleştirirsek:

$$\frac{3 - 2y_1}{1/4} - 1 + 2y_1 = 1$$

Daha da sadeleştirirsek:

$$12 - 8y_1 - 1 + 2y_1 = 1$$

$$-6y_1 = -10$$

$$y_1 = 1.66667$$

Sonuç olarak, $h = 1/2$ için ara değerler şunlardır: $y_0 = 1$, $y_1 = 1.66667$, $y_2 = 2$. Burada gerçek çözüm:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(2x + e^{\frac{x-1}{2}} \csc \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{7}x}{2} \right) - e^{x/2} \csc \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right) \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{7}(x-1) \right) + 1 \right)$$

dir. $x = 1/2$ noktasında gerçek çözüm $y(1/2) \approx 1.65353$ elde edilir.

$x = 1/2$ noktasında Mutlak Hata:

$$|1.653529 - 1.66667| = 0.013141$$

dir.

Örnek 5.5.

$$y'' - y' + 2y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad h = 1/2$$

İleri farklar yöntemini kullanarak çözünüz.

Çözüm.

x 'in alacağı değerler: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$.

Bu durumda $y_0 = 1$ ve $y_2 = 2$ bilinir ve y_1 'i bulmamız gerekmektedir.

Sonlu farklar formülümüz:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + 2y_i = 2x_i$$

Bu durumda $i = 1$ için denkleminiz şu şekilde olacak:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - \frac{y_2 - y_1}{2h} + 2y_1 = 2x_1$$

Verilen değerleri yerine koyarsak:

$$\frac{2 - 2y_1 + 1}{(1/2)^2} - \frac{2 - y_1}{2 * (1/2)} + 2y_1 = 2 * (1/2)$$

Sadeleştirirsek:

$$\frac{3 - 2y_1}{1/4} - 2 + y_1 + 2y_1 = 1$$

Daha da sadeleştirirsek:

$$12 - 8y_1 - 2 + 3y_1 = 1$$

$$-5y_1 = -9$$

$$y_1 = 1.8$$

Sonuç olarak, $h = 1/2$ için ara değerler şunlardır: $y_0 = 1$, $y_1 = 1.8$, $y_2 = 2$.

$x = 1/2$ noktasında Mutlak Hata:

$$|1.653529 - 1.42857| = 0.146471$$

dir.

Örnek 5.6.

$$y'' - y' + 2y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad h = 1/2$$

Geri farklar yöntemini kullanarak çözünüz.

Çözüm.

x 'in alacağı değerler: $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$.

Bu durumda $y_0 = 1$ ve $y_2 = 2$ bilinir ve y_1 'i bulmamız gerekmektedir.

Sonlu farklar formülümüz:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_i - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = 2x_i$$

Bu durumda $i = 1$ için denklemimiz şu şekilde olacak:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - \frac{y_1 - y_0}{2h} + 2y_1 = 2x_1$$

Verilen değerleri yerine koyarsak:

$$\frac{2 - 2y_1 + 1}{(1/2)^2} - \frac{y_1 - 1}{2 * (1/2)} + 2y_1 = 2 * (1/2)$$

Sadeleştirirsek:

$$\frac{3 - 2y_1}{1/4} - y_1 + 1 + 2y_1 = 1$$

Daha da sadeleştirirsek:

$$12 - 8y_1 + 1 + y_1 = 1$$

$$-7y_1 = -10$$

$$y_1 = 1.42857$$

Sonuç olarak, $h = 1/2$ için ara değerler şunlardır: $y_0 = 1, y_1 = 1.42857, y_2 = 2$.
 $x = 1/2$ noktasında Mutlak Hata:

$$|1.653529 - 1.42857| = 0.224958$$

dir.