Yüksek Mertebeden Dif Denklemler

$F(x,y,y',y''\dots y^{(n)})=0$ $(n\geqslant 2)$ şeklindeki diferansiyel denklemlere n. mertebeden dif denklem denir.

$G(x,y,c_1,c_2\dots c_n)=0$ genel çözümdür. (mertebe kadar keyfi sabit içerir.)

n. mertebeden Dif Denklemler

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

$i=0,1,2\dots n$ $\quad a_i(x)$; katsayılar

$a_i(x)=a_i \Rightarrow$ sabit katsayı

$f(x)=0 \Rightarrow$ 2. tarafsız dif denklem (homojen dif denk)

$f(x)\neq 0 \Rightarrow$ 2. taraflı " "

ÖR/ $y'''+3y''+y=0$ sabit katsayılı

$x^2y''+xy'+y=0$ Değişken " dif denk.

n. mertebeden sabit katsayılı Lineer Dif Denklemler

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_n y=f(x)$$

$i=0,1,2\dots n$ $\quad a_i\in\mathbb{R}$

Önce 2. tarafsız denklem çözülür. Sonra 2. taraflı diferansiyel denklem çözülür. 2 farklı yöntem vardır.

2. tarafsız Dif Denklem (Homojen dif denk)

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_n y=0 \quad (*)$$

Teorem ; $(*)$ dif denklemin çözümü $y=e^{rx}$ şeklindedir.

$y' + y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = +y$ Integre edelim.

$$\frac{dy}{dx} = +y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int +dx$$

$$\ln y = \ln c + x$$

$$\ln \frac{y}{c} = x \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{x} \qquad y = ce^{x}$$

$y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ $y'' = r^2 e^{rx}$ -- $y^{(n)} = r^n e^{rx}$

Dif denklemde yerlerine yazılırsa

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

$$a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) = 0$$

$$e^{rx} \neq 0$$

$$\boxed{a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0}$$

Karakteristik polinom

n tane kökü var.

$$\left.\begin{array}{l} r = r_1 \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x} \\ r = r_2 \Rightarrow y_2 = e^{r_2 x} \\ \vdots \\ r = r_n \Rightarrow y_n = e^{r_n x} \end{array}\right\}$$ mertebe sayısı kadar çözüm çıkacak

* dif denkleminin genel çözümü

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ şeklindedir.

n. mertebeden lineer dif denklenin genel çözümü $y_1, y_2 \cdots y_n$ ayrı ayrı çözüm fonksiyonları olmak üzere $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ şeklindedir.

Bu ifadenin genel çözüm olabilmesi için gerek ve yeter şart $y_1, y_2 \cdots y_n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olmasıdır.

Lineer bağımlılık - Bağımsızlık

$c_1, c_2, \ldots c_n$ sabitler olmak üzere eğer

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$ eşitliği $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

olduğunda da gerçekleniyorsa $y_1, y_2 \ldots y_n$ fonksiyonlarına

lineer bağımsız denir. Aksi halde lineer bağımlıdır.

Teorem; n tane fonksiyonun birbirinden lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart wronski determinantının 0 dan farklı olmasıdır.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2 \ldots y_n$$

lineer bağımsız

ÖR/ $y_1 = \sin ax \qquad y_2 = \cos ax \qquad (a \neq 0)$

a) Lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız.

b) Lineer bağımsızsa bu 2 fonksiyonu çözüm kabul eden dif denklemi kurunuz.

a) $$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin ax & \cos ax \\ +a\cos ax & -a\sin ax \end{vmatrix}$$

$$= -a\sin^2 ax - a\cos^2 ax$$

$$= -a\,\underbrace{(\sin^2 ax + \cos^2 ax)}_{1} = -a \neq 0$$

y_1, y_2 lineer bağımsız

b) $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$

$y' = +ac_1 \cos ax - ac_2 \sin ax$

$y'' = -a^2 c_1 \sin ax - a^2 c_2 \cos ax$

$= -a^2 (\underbrace{c_1 \sin ax + c_2 \cos ax}_{y})$

$y'' = -a^2 y \Rightarrow y'' + a^2 y = 0$ dif denk elde edilir.

ÖR/ $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

$y = e^{rx}$

$y' = re^{rx}$

$y'' = r^2 e^{rx}$

$y''' = r^3 e^{rx}$

$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} + 2re^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^3 - 3r^2 + 2r) = 0$

$e^{rx} \neq 0$ $\quad r^3 - 3r^2 + 2r = 0$ karakteristik pol.

$r_1 = 0 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 2$

$y_1 = e^{r_1 x} = e^{0x} = 1$

$y_2 = e^{r_2 x} = e^{1.x} = e^x$

$y_3 = e^{r_3 x} = e^{2x} = e^{2x}$

$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}$

$= 4e^{3x} - 2e^{3x}$

$= 2e^{3x} \neq 0$

y_1, y_2, y_3 lineer bağımsız

$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{1x} + c_3 e^{2x}$

$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$ genel çözüm.

ÖR/ $y'' + y' - 6y = 0$ dif denk çözünüz.

$y = e^{rx}$ $\quad y' = re^{rx}$ $\quad y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 e^{rx} + re^{rx} - 6e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 + r - 6) = 0$

$r^2 + r - 6 = 0$ karakteristik polinom

$2 \quad -3$

$r_1 = 2 \quad r_2 = -3$

$y_1 = e^{2x} \quad y_2 = e^{-3x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$= -5e^{-x} \neq 0$$

y_1, y_2 lineer bağımsız

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ dif denklemin çözümüdür.

Köklerin durumuna göre homojen diferansiyel denklemin (yani 2. tarafsız denklemin) genel çözümü bulunur.

Karakteristik denklemin kökleri;

1 durum; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ birbirinden farklı reel kökler ise

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}$ diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

ÖR./ $y'' + y' - 2y = 0$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^2 + r - 2 = 0 \qquad r_1 = 1 \qquad r_2 = -2$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

ÖR/ $y'' - 5y' + 6y = 0$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^2 - 5r + 6 = 0 \qquad r_1 = 2 \qquad r_2 = 3$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

ÖR/ $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$

$r^2(r-2) - (r-2) = 0 \qquad (r^2-1)(r-2) = 0$

$r_1 = 1 \qquad r_2 = -1 \qquad r_3 = 2$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

2. durum; Köklerin katlı (eşit) kök olması

$ay'' + by' + cy = 0$

$ar^2 + br + c = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-b}{2a} = r$$

$y = k(x) e^{rx}$

$y' = k' e^{rx} + k r e^{rx}$

$$y'' = k'' e^{rx} + \underbrace{r k' e^{rx} + k' r e^{rx}}_{2rk' e^{rx}} + k r^2 e^{rx}$$

Dif denklemde yerine yazılırsa

$$a(k''e^{rx}+2k're^{rx}+kr^2e^{rx})+b(k'e^{rx}+kre^{rx})+cke^{rx}=0$$

$$e^{rx}\left[a(k''+2k'r+kr^2)+b(k'+kr)+ck\right]=0$$

$e^{rx}\neq 0$

$$ak''+2k'ar+akr^2+bk'+bkr+ck=0$$

$$ak''+k'(\underbrace{2ar+b}_{0})+k(\underbrace{ar^2+br+c}_{0})=0$$

$-\frac{b}{2a}=r \Rightarrow 2ar+b=0$, $ar^2+br+c=0$

$ak''=0$ $\quad a\neq 0$ $\quad k''=0$

$$\frac{d^2k}{dx^2}=0 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dk}{dx}\right)=0$$

$$\int d\left(\frac{dk}{dx}\right)=\int 0.dx$$

$$\frac{dk}{dx}=c_1$$

$$\int dk=\int c_1dx$$

$$k(x)=c_1x+c_2$$

$$y=(c_1x+c_2)e^{rx}$$

$r_1=r_2=\cdots=r_k$ (k katlı kök) şeklindeyse homojen dif denklemin çözümü katlılık derecesinden bir düşük polinom ile e^{rx} in çarpımından oluşur.

$y=(c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1})e^{rx}$ dir

ÖR/ $y''+6y'+9y=0$ dif denk çözünüz

$r^2+6r+9=0$ $\quad (r+3)^2=0$ $\quad r_{1,2}=-3$ (2 katlı kök)

$$y=(c_1+c_2x)e^{-3x}$$

ÖR/ $4y''+4y'+y=0$ $\quad 4r^2+4r+1=0$ $\quad (2r+1)^2=0$ $\quad r_{1,2}=-1/2$

$$y=(c_1+c_2x)e^{-1/2x}$$

ÖR/ $y^{IV}+3y'''+3y''+y'=0$

$r^4+3r^3+3r^2+r=0$ $\quad r(r^3+3r^2+3r+1)=0$

$r(r+1)^3=0$

$r_1=0$ $\quad r_2=r_3=r_4=-1$ (3 katlı kök)

$$y=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{-x}$$

3. durum Kompleks kök durumu

$$r_{1,2} = \alpha \mp i\beta \qquad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

kökler kompleks kök olur.

Burada $i = \sqrt{-1}$ $\quad \alpha = \dfrac{-b}{2a}$ ve $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ dır.

Şimdi y_1 ve y_2 çözümlerine bakalım.

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-ix} = \cos x - i\sin x \\ e^{ix} = \cos x + i\sin x \end{array}\right\} \text{den}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1 (\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[\underbrace{(c_1 + c_2)}_{c_1}\cos\beta x + \underbrace{(c_1 i - c_2 i)}_{c_2}\sin\beta x\right]$$

$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 \\ c_1 i - c_2 i \end{array}\right\}$ sabit

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right]$$

veya

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x\right]$$ olarak genel

çözüm bulunur.

ÖR/ $y'' - 2y' + 3y = 0$ dif denklemini çözünüz

$$r^2 - 2r + 3 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \mp \sqrt{4 - 4.1.3}}{2}$$

$$r_{1,2} = 1 \mp \sqrt{2}\, i$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = \sqrt{2}$$

$y = e^x \left(c_1 \cos \sqrt{2} x + c_2 \sin \sqrt{2} x \right)$ bulunur.

ÖR/ $y^{IV} + 9y'' = 0$

$$r^4 + 9r^2 = 0 \qquad r^2 (r^2 + 9) = 0$$

$$r_{1,2} = 0 \qquad r^2 + 9 = 0$$

$$r_{3,4} = \mp 3i$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = 2$$

$$y = (c_1 x + c_2) \underbrace{e^{0x}}_{1} + \underbrace{e^{0x}}_{1} \left(c_3 \sin 3x + c_4 \cos 3x \right)$$

Bazen kompleks kökler katlı olabilir.
Bu durumda

$r_{1,2} = r_{3,4} = \alpha \mp i\beta$ ise çözüm

$$y = e^{\alpha x} \left((c_1 + c_2 x) \sin \beta x + (c_3 + c_4 x) \cos \beta x \right)$$

şeklinde yazılmalıdır.

ÖR/

$y^{IV} + 2y'' + y = 0$ dif denk çözünüz.

$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$(r^2+1)^2 = 0$ $r_{1,2} = \mp i$ (2 kat kök)

$r_{1,2} = \mp i$ $r_{3,4} = \mp i$

$\alpha = 0$ $\beta = 1$

$y_h = y = e^{0x}\left[(c_1x+c_2)\cos x + (c_3x+c_4)\sin x\right]$

n. mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerde 2. taraflı diferansiyel denklemin çözümü

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

$f(x) \neq 0$

$f(x) = 0$ homojen kısmın çözümü $\rightarrow y_h$

$f(x) \neq 0$ 2. taraflı dif denk çözümü $y_ö$ (yözel)

$\boxed{y = y_h + \underbrace{y_ö}}$ Genel Çözüm

3 tane yöntem vardır
Belirsiz katsayılar Yöntemi
Sabitlerin değişimi "
Türev Operatörü "

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

x^n, $e^{\alpha x}$, $\sin\beta x$, $\cos\beta x$ bu fonksiyonlar varsa bu yöntem kullanılır.

$n \geq 0$ $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ÇÖZÜM TABLOSU

	$f(x)$	Karakteristik denklemin kökü değilse	$y_ö$
1)	k (sabit)	0	A
2)	x^n	0	$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$
3)	$e^{\alpha x}$	α	$Ae^{\alpha x}$
4)	$x^n e^{\alpha x}$	α	$(A_0x^n + \dots + A_n)e^{\alpha x}$
5)	$\sin\beta x$, $\cos\beta x$	$\mp i\beta$	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
6)	$e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$	$\alpha \mp i\beta$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
7)	$x^n \sin\beta x$, $x^n\cos\beta x$	$\mp i\beta$	$(A_0x^n + \dots + A_n)\cos\beta x + (B_0x^n + \dots + B_n)\sin\beta x$

Not: Tablodaki 2. sütunda yer alan $0, \alpha, \mp i\beta, \alpha \mp i\beta$ değerleri karakteristik denklemin k katlı kökü ise 3. sütundaki ifadeler x^k ile çarpılır.

ÖR/ $y''' - y'' - y' + y = \underbrace{5e^x}_{y_{ö_1}} + \underbrace{6x^2e^{-x}}_{y_{ö_2}} - \underbrace{e^x \cos x}_{y_{ö_3}}$

$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$

$r^2(r-1) - (r-1) = 0$

$(r^2-1)(r-1) = 0$

$\underbrace{r_{1,2} = 1}_{2 \text{ katlı kök}} \quad r_3 = -1$

$y_h = e^x(c_1x + c_2) + c_3e^{-x}$

$y_h = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-x}$

$f_1(x) = 5e^x$ için $(\alpha = 1)$ (2 katlı kök)

$y_{ö_1} = x^2 \cdot Ae^x$ (özel durum)

$f_2(x) = 6x^2e^{-x}$ $\quad \alpha = -1$ (tek katlı kök)

$y_{ö_2} = x \cdot (a_0x^2 + a_1x + a_2)e^{-x}$ (özel durum)

$f_3(x) = -e^x \cos x$

$y_{ö_3} = e^x(A\cos x + B\sin x)$

ÖR/ $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = 3e^{-2x} - 5\sin 3x + 7x\cos 2x$

$r^3 - 3r^2 + 4r - 12 = 0$

$r^2(r-3) + 4(r-3) = 0$

$(r^2+4)(r-3) = 0$

$r^2 = -4 \quad r_{1,2} = \mp 2i$

$r_3 = 3$

$y = (c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + c_3e^{3x}$

$y_{ö_1} = Ae^{-2x}$ $\qquad y_{ö_2} = A\sin 3x + B\cos 3x$

$y_{ö_3} = [(a_0x + b_0)\cos 2x + (a_1x + b_1)\sin 2x] \cdot x$

özel durum

ÖR/ $y'' + 4y' + 29y = 4e^{-2x} - 4e^{-2x}\sin 5x + x^2 - 5$

$r^2 + 4r + 29 = 0$

$r_{1,2} = \dfrac{-4 \mp \sqrt{16 - 4.1.29}}{2}$

$r_{1,2} = \dfrac{-4 \mp \sqrt{-100}}{2} = \dfrac{-4 \mp 10i}{2} \Rightarrow \begin{matrix} -2+5i \\ -2-5i \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} r_1 = -2+5i \\ r_2 = -2-5i \end{matrix}\right\} y_h = e^{-2x}(c_1 \sin 5x + c_2 \cos 5x)$

$y_{ö_1} = Ae^{-2x}$

$y_{ö_2} = e^{-2x}(A_0 \sin 5x + B_0 \cos 5x) \cdot x$

$y_{ö_3} = ax^2 + bx + c$

ÖR/ $y'' + y' - 2y = x^2 - 1$ dif denklemini çözünüz.

$r^2 + r - 2 = 0$

$-2 \quad 1$

$r_1 = -2 \quad r_2 = 1$

$\underline{y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}}$

$\left.\begin{matrix} y_ö = ax^2 + bx + c \\ y_ö' = 2ax + b \\ y_ö'' = 2a \end{matrix}\right\}$ $2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2 - 1$

$-2a = 1 \quad a = -1/2$

$2a - 2b = 0 \quad 2a = 2b$

$b = -1/2$

$2a - 2c + b = -1$

$2\left(-1/2\right) - 2c - 1/2 = -1 \quad c = -\frac{1}{4}$

$-1 - \frac{1}{2} + 1 = 2c$

$-2 - 1 + 2 = 2c$

$c = -1/4$

$y_ö = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$y = y_h + y_ö$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

ÖR/ $y'' - y' = 2x+1$

$r^2 - r = 0 \quad r(r-1) = 0 \quad r_1 = 0 \quad r_2 = 1$

$\underline{y_h = c_1 + c_2 e^x}$

$y_ö = (ax+b)x = ax^2 + bx$

$y_ö' = 2ax + b$

$y_ö'' = 2a$

$2a - 2ax - b = 2x + 1$

$-2ax + 2a - b = 2x + 1$

$-2a = 2 \quad a = -1$

$2a - b = 1 \Rightarrow -b = 1 - 2a$

$-b = 1 - 2.(-1)$

$-b = 3 \quad b = -3$

$\underline{y_ö = -x^2 - 3x}$

$y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 e^x - x^2 - 3x$

ÖR/ $y'' - 4y' + 3y = 4e^{2x}$ dif denk çözünüz.

$r^2 - 4r + 3 = 0 \quad r_1 = 3 \quad \underline{y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^x}$

3 1 $\quad r_2 = 1$

$y_ö = Ae^{2x} \quad y_ö' = 2Ae^{2x} \quad y_ö'' = 4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 4e^{2x}$

$-A = 4 \quad A = -4$

$\underline{y_ö = -4e^{2x}}$

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x - 4e^{2x}$

ÖR/ $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$

$r^2 - 5r + 6 = 0$ $\quad r_1 = 2$

$\quad\;\; 2 \;\; 3$ $\quad r_2 = 3$

$\underline{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$

$\alpha = 2$ karakteristik denklemin kökü (tek katlı kök)

$y_ö = A e^{2x} \cdot x$ (özel durum)

$y_ö' = 2Ae^{2x} \cdot x + Ae^{2x}$

$y_ö'' = 4Ae^{2x} \cdot x + 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x}$

$y_ö'' = 4Ae^{2x} \cdot x + 4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x} \cancel{\cdot x} + 4Ae^{2x} - 10\cancel{A}e^{2x} \cdot x - 5Ae^{2x} + 6\cancel{A}e^{2x} \cdot x = 5e^{2x}$

$-Ae^{2x} = 5e^{2x} \qquad A = -5$

$\underline{y_ö = -5xe^{2x}}$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - 5xe^{2x}$

* Karakteristik polinomun kökleri şöyle olsaidi

$r_1 = r_2 = 2 \qquad r_3 = 3$

$y_ö = Ae^{2x} \cdot x^2$ ($\alpha = 2$ karakteristik denklemin 2 katlı kökü)

ÖR /

$y'' + 5y' + 6y = 2\cos x$ dif denk çöz.

$r^2 + 5r + 6 = 0$ $\quad r_1 = -3$ $\quad y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$

$-3 \quad -2$ $\quad r_2 = -2$

$y_ö = A\cos x + B\sin x$

$y_ö' = -A\sin x + B\cos x$

$y_ö'' = -A\cos x - B\sin x$

$$-A\cos x - B\sin x + 5(-A\sin x + B\cos x) + 6(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x$$

$$-A\cos x - B\sin x - 5A\sin x + 5B\cos x + 6A\cos x + 6B\sin x = 2\cos x$$

$$(5A + 5B)\cos x + (5B - 5A)\sin x = 2\cos x$$

$$\left.\begin{matrix} 5A + 5B = 2 \\ 5B - 5A = 0 \end{matrix}\right\} \quad 10B = 2 \quad B = 1/5 \quad A = 1/5$$

$y_ö = \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

$$y = y_h + y_ö = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

ÖR/ $y'' + 4y = \sin 2x$ dif denk çöz.

$r^2 + 4 = 0 \quad r_{1,2} = \mp 2i \quad \alpha = 0 \quad \beta = 2$

$y_h = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

$y_ö = (A \sin 2x + B \cos 2x) \cdot x$

özel durum

$y_ö = Ax \sin 2x + Bx \cos 2x$

$y_ö' = A \sin 2x + 2Ax \cos 2x + B \cos 2x - 2Bx \sin 2x$

$y_ö'' = \underbrace{2A \cos 2x + 2A \cos 2x}_{} - 4Ax \sin 2x - \underbrace{2B \sin 2x - 2B \sin 2x}_{} - 4Bx \cos 2x$

$y_ö'' = 4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4Ax \sin 2x - 4Bx \cos 2x$

$4A \cos 2x - 4B \sin 2x - \cancel{4Ax \sin 2x} - \cancel{4Bx \cos 2x} + \cancel{4Ax \sin 2x} + \cancel{4Bx \cos 2x} = \sin 2x$

$4A = 0 \qquad -4B = 1$

$A = 0 \qquad B = -1/4$

$y_ö = -\dfrac{1}{4} x \cos 2x$

$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x - \dfrac{x}{4} \cos 2x$

ÖR/ $y'' - 2y' + 2y = xe^x$ dif denk çöz.

$r^2 - 2r + 2 = 0$

$r_{1,2} = 1 \mp i \qquad r_1 = 1 + i \qquad r_2 = 1 - i$

$y_h = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$y_ö = (ax + b)e^x = axe^x + be^x$

$y_ö' = ae^x + axe^x + be^x$

$y_ö'' = ae^x + ae^x + axe^x + be^x = 2ae^x + axe^x + be^x$

$\cancel{2ae^x} + axe^x + be^x - \cancel{2ae^x} - \cancel{2axe^x} - \cancel{2be^x} + \cancel{2axe^x} + \cancel{2be^x} = xe^x$

$axe^x + be^x = xe^x \qquad a = 1 \quad b = 0$

$y_{ö} = xe^{x}$

$y = y_h + y_ö \qquad y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + xe^{x}$

ÖR/ $y'' + y = e^{-x} \cos x$ dif denk çöz.

$r^2 + 1 = 0 \qquad r_{1,2} = \mp i$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_ö = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$

$y_ö = e^{-x} A \cos x + e^{-x} B \sin x$

$y_ö' = -e^{-x} A \cos x - e^{-x} A \sin x - e^{-x} B \sin x + e^{-x} B \cos x$

$y_ö'' = \cancel{e^{-x} A \cos x} + e^{-x} A \sin x + e^{-x} A \sin x - \cancel{e^{-x} A \cos x} + \cancel{e^{-x} B \sin x}$
$- e^{-x} B \cos x - e^{-x} B \cos x - \cancel{e^{-x} B \sin x}$

$y_ö'' = 2Ae^{-x} \sin x - 2Be^{-x} \cos x$

$2Ae^{-x} \sin x - 2Be^{-x} \cos x + e^{-x} A \cos x + e^{-x} B \sin x = e^{-x} \cos x$

$(2A + B)e^{-x} \sin x + (-2B + A)e^{-x} \cos x = e^{-x} \cos x$

$$\left.\begin{array}{r} 2A + B = 0 \\ -2B + A = 1 \end{array}\right\} \quad A = 1/5 \quad B = -2/5$$

$y_ö = e^{-x}\left(\frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x\right)$

$y = y_h + y_ö = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^{-x}\left(\frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x\right)$

ÖR/ $y'' + y = \sin^2 x$ dif denk çöz.

$r^2 + 1 = 0 \qquad r_{1,2} = \mp i$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cos 2x$

$y'' + y = \underbrace{\dfrac{1}{2}}_{y_{ö_1}} - \underbrace{\dfrac{1}{2} \cos 2x}_{y_{ö_2}}$

$y_{ö_1} = A$

$y_{ö_2} = A_0 \cos 2x + B \sin 2x$

ÖR/ $y'' + 4y = x \sin x$ dif denk çöz.

$r^2 + 4 = 0 \qquad r_{1,2} = \mp 2i \qquad y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_ö = (ax+b) \cos x + (cx+d) \sin x$

$y_ö' = a \cos x - (ax+b) \sin x + c \sin x + (cx+d) \cos x$

$y_ö'' = -2a \sin x - (ax+b) \cos x + 2c \cos x - (cx+d) \sin x$

$-2a \sin x - (ax+b) \cos x + 2c \cos x - (cx+d) \sin x + 4(ax+b) \cos x + 4(cx+d) \sin x = x \sin x$

$(3ax + 3b + 2c) \cos x + (-2a + 3cx + 3d) \sin x = x \sin x$

$3ax \cos x + (3b + 2c) \cos x + (-2a + 3d) \sin x + 3c x \sin x = x \sin x$

$3c = 1 \qquad c = 1/3$

$3a = 0 \qquad a = 0$

$3b + 2c = 0 \qquad b = -2/9$

$-2a + 3d = 0 \qquad d = 0$

$y_ö = -\dfrac{2}{9} \cos x + \dfrac{1}{3} x \sin x$

$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \dfrac{2}{9} \cos x + \dfrac{x}{3} \sin x$

ÖR/ $y''' - 2y'' = xe^{2x}$

$$r^3 - 2r^2 = 0$$

$$r^2(r-2) = 0 \qquad r_{1,2} = 0 \qquad r_3 = 2$$

$$y_h = c_1 x + c_2 + c_3 e^{2x}$$

$$y_ö = (ax+b)e^{2x} \cdot x$$

özel durum

$$y_ö = (ax^2 + bx)e^{2x}$$

$$y_ö' = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx)e^{2x}$$

$$y_ö'' = 2ae^{2x} + 2(2ax+b)e^{2x} + 2(2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx) \cdot 2e^{2x}$$

$$y_ö'' = 2ae^{2x} + 4(2ax+b)e^{2x} + 4e^{2x}(ax^2+bx)$$

$$y_ö''' = 4ae^{2x} + 8a \cdot e^{2x} + 8(2ax+b)e^{2x} + 8e^{2x}(ax^2+bx) + 4e^{2x}(2ax+b)$$

$$y_ö''' = 4ae^{2x} + 8ae^{2x} + 12(2ax+b)e^{2x} + 8e^{2x}(ax^2+bx)$$

$$4ae^{2x} + 8ae^{2x} + 12(2ax+b)e^{2x} + 8e^{2x}(ax^2+bx) - 4ae^{2x} - 8(2ax+b)e^{2x}$$
$$- 8e^{2x}(ax^2+bx) = xe^{2x}$$

$$e^{2x}(12a + 24ax + 12b + \cancel{8ax^2} + \cancel{8bx} - 4a - 16ax - 8b - \cancel{8ax^2} - \cancel{8bx}) = xe^{2x}$$

$$8ax + 8a + 4b = x \qquad \begin{array}{ll} 8a = 1 & a = 1/8 \\ 8a + 4b = 0 & b = -1/4 \end{array}$$

$$y_ö = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4}\right)e^{2x}$$

$$y = c_1 x + c_2 + c_3 e^{2x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4}\right)e^{2x}$$

$y^{IV}+2y''+y=0$ dif denk çözünüz.

$r^4+2r^2+1=0$

$r^2=t$

$t^2+2t+1=0$

$(t+1)^2=0$

$t_1=t_2=-1$

$t_1=-1=r^2 \begin{cases} r_1=i \\ r_2=-i \end{cases} \quad r_{1,2}=\mp i$

$t_1=-1=r^2 \begin{cases} r_3=i \\ r_4=-i \end{cases} \quad r_{3,4}=\mp i$

$r_{1,2}=\mp i \quad r_{3,4}=\mp i$ (2 katlı köktür)

$y=e^{0x}\left[(c_1+c_2x)\sin x+(c_3+c_4x)\cos x\right]$ bulunur.

İkinci Taraflı dif denklemin çözümü

Homojen dif denklemin (ikinci tarafsız) genel çözümünün nasıl bulunacağını öğrendik. Şimdi ikinci taraflı dif denklemin $y_ö$ özel çözümünü bulacağız. Buradan sabit katsayılı dif denklemin genel çözümü

$$y=y_h+y_ö$$ olarak elde edilir.

Homojen olmayan denklemler;
Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Homojen olmayan bir diferansiyel denklemi çözmenin en basit yolu belirsiz katsayılar yöntemidir.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = R(x)$$

dif denklemi için $R(x)$ in alacağı bazı haller için bu yöntem son derece kullanışlıdır.

1) İkinci taraf n. dereceden bir polinom ise;

$y_ö$, n. dereceden bir polinom seçilir.

ÖR/ $y'' + y' - 2y = x^2 - 1$ dif denk çözünüz.

$$r^2 + r - 2 = 0 \qquad r_1 = -2$$

$$-2 \quad 1 \qquad r_2 = 1$$

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

$$y_ö = ax^2 + bx + c$$

$$y_ö' = 2ax + b \qquad y_ö'' = 2a$$

$$2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx + 2c = x^2 - 1$$

$$-2a = 1 \qquad 2a - 2b = 0$$

$$2a + b - 2c = -1$$

$$a = -1/2 \qquad b = -1/2 \qquad c = -1/4$$

$$y_ö = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$y = y_h + y_ö = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Özel durum: Karakteristik denklemin köklerinde 0 varsa (yani $r^k(r^{n-k} + \cdots)$ şeklinde ise) önerilen özel çözüm $x^k(\quad)$ şeklindedir. k, sıfırın katlılığıdır.

ÖR/ $y^{(IV)} = x+2$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^4 = 0 \qquad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$ (0, 4 katlı kök)

$$y_h = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)\underbrace{e^{0x}}_{1}$$

$$\underline{y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3}$$ (ikinci tarafsız denklemin genel çözümü)

$$y_ö = x^4 \cdot (Ax+B) = Ax^5 + Bx^4$$

$$y_ö' = 5Ax^4 + 4Bx^3$$

$$y_ö'' = 20Ax^3 + 12Bx^2$$

$$y_ö''' = 60Ax^2 + 24Bx$$

$$y_ö^{IV} = 120Ax + 24B$$

$$y^{(IV)} = x+2$$

$$120Ax + 24B = x + 2$$

$120A = 1$

$A = 1/120$

$24B = 2$

$B = 1/12$

$$\underline{y_ö = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{12}x^4}$$ (ikinci taraflı denklemin özel çözümü)

$$y = y_h + y_ö$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{12}x^4$$

2) İkinci taraf $R(x) = M e^{\alpha x}$ şeklinde ise

$y_ö = k e^{\alpha x}$ seçilir.

ÖR $y'' - 4y = 10 e^{3x}$ dif denklemini çözünüz.

$r^2 - 4 = 0 \quad r^2 = 4 \quad r_1 = 2 \quad r_2 = -2$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y_ö = k e^{3x} \quad y_ö' = 3k e^{3x} \quad y_ö'' = 9k e^{3x}$

$9k e^{3x} - 4k e^{3x} = 10 e^{3x}$

$5k e^{3x} = 10 e^{3x} \quad 5k = 10$

$k = 2$

$y_ö = 2e^{3x} \qquad y = y_h + y_ö = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + 2e^{3x}$

Özel durum:

Karakteristik denklemin kökü $r = \alpha$ durumunda ise r nin katlılığına göre seçilen $y_ö$, x^k ile çarpılır.

ÖR/ $y''' - y'' - 4y = e^{2x}$ dif denk çözünüz.

$r^3 - r^2 - 4 = 0$

$r_1 = 2 \quad r_{2,3} = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{7}}{2} i \qquad \alpha = -\frac{1}{2}$

$\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$y_h = c_1 e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_3 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right)$

$y_ö = x\,(ke^{2x})$ $\qquad r_1 = 2 = \alpha$ özel durum (Tek katlı x ile) Çarp

$y_ö = k\,[x e^{2x}]$

$y_ö' = k\,[e^{2x} + 2x e^{2x}]$

$y_ö' = ke^{2x} + 2xke^{2x}$

$y_ö'' = 2ke^{2x} + 2ke^{2x} + 4xke^{2x}$

$y_ö'' = 4ke^{2x} + 4xke^{2x}$

$y_ö''' = \underbrace{8ke^{2x} + 4ke^{2x}}_{12ke^{2x}} + 8xke^{2x}$

$$y''' - y'' - 4y = e^{2x}$$

$$12ke^{2x} + \cancel{8xke^{2x}} - 4ke^{2x} \underbrace{- 4xke^{2x} - 4xke^{2x}}_{\cancel{}} = e^{2x}$$

$$8ke^{2x} = e^{2x} \qquad 8k = 1 \quad k = 1/8$$

$$y_ö = \frac{1}{8} x e^{2x}$$

$$y = y_h + y_ö$$

$$y = c_1 e^{2x} + e^{-1/2\,x}\left(c_2 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \frac{1}{8} x e^{2x}$$

3) İkinci taraf $f(x) = M\cos\lambda x + N\sin\lambda x$ ise

$$y_ö = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \quad \text{seçilir.}$$

ÖR/ $y'' + 2y' + y = 2\sin x + 4\cos x$ dif denk çöz.

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad r_1 = r_2 = -1$$

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

$$y_ö = A\cos x + B\sin x \quad \text{seçilir.}$$

$$y_ö' = -A\sin x + B\cos x$$

$$y_ö'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$\cancel{-A\cos x} \cancel{-B\sin x} - 2A\sin x + 2B\cos x + \cancel{A\cos x} + \cancel{B\sin x} = 2\sin x + 4\cos x$$

$$-2A = 2 \qquad A = -1$$

$$2B = 4 \qquad B = 2$$

$$y_ö = -\cos x + 2\sin x$$

$$y = y_h + y_ö$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} - \cos x + 2\sin x$$

bulunur.

Özel durum; ikinci taraf $M\cos\lambda x + N\sin\lambda x$ şeklinde ve karakteristik denklemin köklerinde $\mp\lambda i$ varsa katlılığına göre x^k ile özel çözüm çarpılır.

ÖR/ $y'' + 9y = \cos 3x$ dif denk çözünüz.

$r^2 + 9 = 0 \qquad r_{1,2} = \mp 3i \qquad \alpha = 0 \quad \beta = 3 = \lambda$

$$y_h = e^{0x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$$

$y_ö = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$ özel durum var

$y_ö' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$

$y_ö'' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$

$y_ö'' = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$

$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x - \cancel{9Ax\cos 3x} - \cancel{9Bx\sin 3x} + \cancel{9Ax\cos 3x} + \cancel{9Bx\sin 3x} = \cos 3x$

$-6A = 0 \quad A = 0 \qquad 6B = 1 \quad B = 1/6$

$$y_ö = \frac{1}{6}x\sin 3x$$

$$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{6}x\sin 3x$$

ÖR/ $y^{IV}+2y''+y=\sin x$ dif denk özel çöz yazınız.

$r^4+2r^2+1=0$

$(r^2+1)^2=0$ $\qquad r_{1,2}=r_{3,4}=\mp i$ (2 katlı kök)

$y_ö = x^2.(A\cos x + B\sin x)$ $\qquad \lambda=1=\beta$

özel durum

ÖR/ $y''+y'+1=\cos 2x+\sin 2x$ dif denk özel çöz yaz.

$r^2+r+1=0$

$r_{1,2}=\dfrac{-1\mp\sqrt{1-4.1.1}}{2}=\dfrac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=-\frac{1}{2}$ $\quad \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

özel durum yok

$y_ö = A\cos 2x + B\sin 2x$ seçilir. $\qquad \alpha=0$ değil $\lambda\neq\beta$

ÖR/ $y^{IV}+2y''+y=\cos 2x$

$r_{1,2}=r_{3,4}=\mp i$ $\qquad \alpha=0$ ama $\lambda=2\neq\beta=1$

özel durum yok

$y_ö = A\cos 2x + B\cos 2x$ seçilir.

4) İkinci taraf $M(x)e^{\alpha x}$ şeklinde ise,

$y_{ö} = u(x)\, e^{\alpha x}$ seçilir.

ÖR/ $y'' - 5y' + 6y = xe^{x}$ dif denk çöz.

$r^2 - 5r + 6 = 0$ $\quad r_1 = 2 \quad r_2 = 3$ $\quad y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

2 3

$y_{ö} = u(x)e^{x}$ $\quad y_{ö}' = u'e^{x} + ue^{x}$ $\quad y_{ö}'' = u''e^{x} + u'e^{x} + u'e^{x} + ue^{x}$

$y_{ö}'' = u''e^{x} + 2u'e^{x} + ue^{x}$

$y'' - 5y' + 6y = xe^{x}$

$u''e^{x} + 2u'e^{x} + ue^{x} - 5(u'e^{x} + ue^{x}) + 6ue^{x} = xe^{x}$

$u''e^{x} - 3u'e^{x} + 2ue^{x} = xe^{x}$

$u'' - 3u' + 2u = x$

$u = ax + b \quad u' = a \quad u'' = 0$

$0 - 3a + 2ax + 2b = x$

$2a = 1 \quad a = 1/2$ $\quad -3a + 2b = 0$

$-\frac{3}{2} = -2b$

$b = \frac{3}{4}$

$u = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

$y_{ö} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{x}$

$y = y_h + y_{ö} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{x}$

5. İkinci taraf $M(x)\sin\lambda x + N(x)\cos\lambda x$ şeklinde ise

$M(x) \longrightarrow m.$ dereceden polinom } derecesi büyük

$N(x) \longrightarrow n.$ dereceden polinom | olan polinoma göre

ÖR/ $y''+2y'+y = 2x\sin x + \cos x$ dif denk çözünüz.

$r^2+2r+1=0$

$(r+1)^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=-1 \quad y_h=(c_1+c_2x)e^{-x}$

$y_ö = (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x$

$y_ö' = a\sin x + (ax+b)\cos x + c\cos x + (cx+d)(-\sin x)$

$y_ö'' = a\cos x + a\cos x + (ax+b)(-\sin x) - c\sin x + c(-\sin x)$
$+ (cx+d)(-\cos x)$

$y_ö'' = 2a\cos x - 2c\sin x + (ax+b)(-\sin x) + (cx+d)(-\cos x)$

$y''+2y'+y = 2x\sin x + \cos x$

$2a\cos x - 2c\sin x - ax\cancel{\sin x} - b\cancel{\sin x} - cx\cancel{\cos x} - d\cancel{\cos x} + 2a\sin x$
$- 2cx\sin x - 2d\sin x$
$+ 2ax\cos x + 2b\cos x + 2c\cos x$
$+ ax\cancel{\sin x} + b\cancel{\sin x} + cx\cancel{\cos x} + d\cancel{\cos x} = 2x\sin x + \cos x$

$\sin x\left[-2c+2a-2d\right] + \cos x\left[2a+2b+2c\right] + 2ax\cos x -$

$2cx\sin x = 2x\sin x + \cos x$

$$\left.\begin{aligned} -2c+2a-2d&=0 \\ 2a+2b+2c&=1 \end{aligned}\right\}$$

$2c = 2 \qquad c = 1$ ✓

$2a = 0 \qquad a = 0$ ✓

$b = -1/2$ ✓

$2a + 2b + 2c = 1$

$2.0 + 2b + 2.1 = 1$

$2b = 1 - 2$

$2b = -1$

$b = -1/2$

$-2c + 2a - 2d = 0$

$-2 - 2d = 0 \Rightarrow -2 = 2d \qquad d = -1$ ✓

$$y_{\ddot{o}} = -\frac{1}{2}\sin x + (x-1)\cos x$$

$y = y_h + y_{\ddot{o}}$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + (x-1)\cos x$$

ÖR/ $y'' - 2y' + 2y = \cos x \cdot e^x$ dif denk çözünüz.

$r^2 - 2r + 2 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{4-4.1.2}}{2} = \frac{2 \mp \sqrt{-4}}{2} = 1 \mp i$$

$\alpha = 1 \quad \beta = 1$

$$y_h = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

$y_{\ddot{o}} = u(x)e^x$

$y_{\ddot{o}}' = u'e^x + ue^x$

$y_{\ddot{o}}'' = u''e^x + u'e^x + u'e^x + ue^x$

$y_{\ddot{o}}'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$

$$y'' - 2y' + 2y = \cos x e^{x}$$

$$u''e^{x} + \underbrace{2u'e^{x}} + ue^{x} - \underbrace{2u'e^{x}} - \underbrace{2ue^{x}} + \underbrace{2ue^{x}} = \cos x . e^{x}$$

$$u''e^{x} + ue^{x} = \cos x . e^{x}$$

$$u'' + u = \cos x$$ } burada karakteristik polinom köküne bak özel çözüm var mı?

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \mp i$$ özel durum var.

$$\alpha = 0 \quad \beta = 1 = \lambda$$

$$u = x \cdot (A\cos x + B\sin x)$$

$$u' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$u'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$$

$$u'' = -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x$$

$$u'' + u = \sin x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x - \cancel{Ax\cos x} - \cancel{Bx\sin x} \cancel{+Ax\cos x} + \cancel{Bx\sin x} = \cos x$$

$$-2A = 0 \quad A = 0 \qquad 2B = 1$$

$$B = 1/2$$

$$u = \frac{1}{2} x \sin x$$

$$y_ö = u(x)e^{x} = \frac{1}{2} x \sin x . e^{x}$$

$$y = e^{x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{1}{2} x \sin x . e^{x}$$

6) $R(x)$ ayrı cinsten birkaç fonksiyonun toplamı ise herbiri için ayrı yö bulunur.

ÖR/ $y'' + 2y' - 4y = 8x^2 - 3x + 1 + 2\sin x + 4\cos x - 6e^{2x}$ dif denklemini çözünüz.

$r^2 + 2r - 4 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4.1(-4)}}{2} = -\frac{2 \mp \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \mp 2\sqrt{5}}{2}$

$r_{1,2} = -1 \mp \sqrt{5}$

$y_h = c_1 e^{(-1-\sqrt{5})x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{5})x}$

$R_1(x) = 8x^2 - 3x + 1$

$y_{ö_1} = ax^2 + bx + c$

$y_{ö_1}' = 2ax + b \qquad y_{ö_1}'' = 2a$

$2a + 4ax + 2b - 4ax^2 - 4bx - 4c = 8x^2 - 3x + 1$

$-4a = 8 \qquad a = -2$ ✓

$4a - 4b = -3 \qquad -4b = -3 - 4a$

$-4b = -3 - 4.(-2)$

$2a + 2b - 4c = 1 \qquad -4b = 5 \quad b = -\frac{5}{4}$ ✓

$2a + 2b - 4c = 1$

$-4 - \frac{10}{4} - 1 = 4c$

$\frac{-16 - 10 - 4}{4} = 4c \qquad -\frac{30}{4} = 4c \qquad -30 = 16c$

$c = -\frac{30}{16}$

$c = -\frac{15}{8}$

$y_{ö_1} = -2x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{15}{8}$

$$y_{ö_2} = A\sin x + B\cos x \qquad R_2(x) = 2\sin x + 4\cos x$$

$$y_{ö_2}' = A\cos x - B\sin x \qquad y_{ö_2}'' = -A\sin x - B\cos x$$

$$y'' + 2y' - 4y = 2\sin x + 4\cos x$$

$$\underbrace{-A\sin x} - B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x \underbrace{-4A\sin x} - 4B\cos x = 2\sin x + 4\cos x$$

$$-5A\sin x - 5B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x = 2\sin x + 4\cos x$$

$$(-5A - 2B)\sin x + (2A - 5B)\cos x = 2\sin x + 4\cos x$$

$$2 / \ -5A - 2B = 2 \qquad -10A - 4B = 4$$

$$5 / \ 2A - 5B = 4 \qquad 10A - 25B = 20$$

$$-29B = 24$$

$$B = -24/29$$

$$2A - 5B = 4$$

$$2A = 4 + 5B = 4 + 5\cdot\left(-\frac{24}{29}\right)$$

$$2A = 4 - \frac{120}{29} = \frac{116 - 120}{29} = \frac{-4}{29}$$

$$2A = -4/29 \qquad A = \frac{-2}{29}$$

$$y_{ö_2} = -\frac{2}{29}\sin x - \frac{24}{29}\cos x$$

$$R_3(x) = -6e^{2x}$$

$$y_{ö_3} = ke^{2x} \quad y_{ö_3}' = 2ke^{2x} \quad y_{ö_3}'' = 4ke^{2x}$$

$$y'' + 2y' - 4y = -6e^{2x}$$

$$4ke^{2x} + \cancel{4ke^{2x}} - \cancel{4ke^{2x}} = -6e^{2x} \qquad 4k = -6 \quad k = -3/2$$

$$y_{ö_3} = -\frac{3}{2}e^{2x}$$

$$y = c_1 e^{(-1-\sqrt{5})x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{5})x} - 2x^2 - \frac{5}{4}x - 15/8 - 2/29\sin x - \frac{24}{29}\cos x - 3/2\, e^{2x}$$

ÖR/ $y'' - 4y' + 8y = 1 - e^{2x}\sin x$ dif denk çözümünü bulunuz.

$r^2 - 4r + 8 = 0 \qquad r_{1,2} = \dfrac{4 \mp \sqrt{16 - 4.1.8}}{2} = \dfrac{4 \mp \sqrt{-16}}{2}$

$\underline{y_h = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)} \qquad r_{1,2} = 2 \mp 2i$

$f_1(x) = 1$ için

$y_{ö_1} = A \qquad y_{ö_1}' = 0 \qquad y_{ö_1}'' = 0$

$y'' - 4y' + 8y = 1$

$0 - 4.0 + 8.A = 1 \qquad A = 1/8 \qquad \underline{y_{ö_1} = \frac{1}{8}}$

$f_2(x) = -e^{2x}\sin x$ için

$y_{ö_2} = u(x)e^{2x}$

$y_{ö_2}' = u'e^{2x} + 2ue^{2x}$

$y_{ö_2}'' = u''e^{2x} + 2u'e^{2x} + 2u'e^{2x} + 4ue^{2x}$

$y_{ö_2}'' = u''e^{2x} + 4u'e^{2x} + 4ue^{2x}$

$y'' - 4y' + 8y = -e^{2x}\sin x$

$u''e^{2x} + \cancel{4u'e^{2x}} + 4ue^{2x} - \cancel{4u'e^{2x}} - \cancel{8ue^{2x}} + \cancel{8ue^{2x}} = -e^{2x}\sin x$

$u'' + 4u = -\sin x$

$r^2 + 4 = 0 \qquad r_{1,2} = \mp 2i$ özel durum yok

$u_ö = A\sin x + B\cos x$

$u_ö' = A\cos x - B\sin x \qquad u_ö'' = -A\sin x - B\cos x$

$u'' + 4u = -\sin x$

$-A\sin x - B\cos x + 4A\sin x + 4B\cos x = -\sin x$

$3A = -1 \qquad 3B = 0 \quad B = 0 \quad A = -1/3$

$\underline{u_ö = u = -1/3 \sin x} \qquad y = y_h + y_{ö_1} + y_{ö_2}$

$\underline{y_{ö_2} = -\frac{1}{3}\sin x\, e^{2x}} \qquad y = e^{2x}(c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{3}\sin x\right)e^{2x}$

SABİTİN DEĞİŞİMİ YÖNTEMİ (LAGRANGE YÖNTEMİ)

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

sabit katsayılı diferansiyel denkleminin 2. tarafsız denkleminden karakteristik denklem yazılır. Diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$ şeklindedir.

$$\left.\begin{aligned}
c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n &= 0 \\
c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' &= 0 \\
c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + \dots + c_n' y_n'' &= 0 \\
&\vdots \\
c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{f(x)}{a_0}
\end{aligned}\right\}$$

den $c_1', c_2' \dots c_n'$ ler bulunur.

$c_1' = \dfrac{dc_1}{dx}$, $c_2' = \dfrac{dc_2}{dx}$, ... $c_n' = \dfrac{dc_n}{dx}$ olduğundan

$c_1, c_2 \dots c_n$ leri bulduktan sonra

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ de yerine yazılarak diferansiyel denklemin çözümü bulunur.

ÖR/ $y'' + y = \sec^3 x$ dif denk çözünüz.

$r^2 + 1 = 0 \qquad r_{1,2} = \mp i$

$$y = e^{0x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\left.\begin{aligned} c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x &= \frac{1}{\cos^3 x} \end{aligned}\right\}$$

$$c_1' \cos x . \sin x + c_2' \sin^2 x = 0$$

$$-c_1' \sin x . \cos x + c_2' \cos^2 x = \frac{\cos x}{\cos^3 x}$$

$$c_2' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dc_2}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int dc_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$c_2 = \int \sec^2 x \, dx$$

$$c_2 = \tan x + k_2$$

$$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$$

$$c_1' \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \sin x = 0$$

$$c_1' \cos x = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$c_1' = -\frac{\sin x}{\cos x . \cos^2 x} = -\tan x . \sec^2 x$$

$$\frac{dc_1}{dx} = -\tan x . \sec^2 x \qquad \int dc_1 = \int -\underbrace{\tan x}_{u} \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{du}$$

$$c_1 = -\frac{u^2}{2} \qquad c_1 = -\frac{\tan^2 x}{2} + k_1$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y = \left(-\frac{\tan^2 x}{2} + k_1\right) \cos x + (\tan x + k_2) \sin x$$

$$y = k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{\tan^2 x}{2} \cos x + \tan x \sin x$$ bulunur.

ÖR/ $y'' - 2y' + y = xe^x$ dif denk çözünüz.

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 1$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$$

$$-\quad c_1' e^x + c_2' (e^x + xe^x) = xe^x$$

$$-c_2' e^x = -xe^x \qquad \int dc_2 = \int e^x \, dx$$

$$c_2' = x \qquad c_2 = e^x + k_2$$

$$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$$

$$c_1' e^x - x \cdot x e^x = 0$$

$$c_1' e^x = x^2 e^x$$

$$c_1' = x^2 \Rightarrow \int dc_1 = \int x^2 \, dx$$

$$c_1 = \frac{x^3}{3} + k_1$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$y = \left[\frac{x^3}{3} + k_1 \right] e^x + \left[e^x + k_2 \right] x e^x$$

$$y = \underbrace{k_1 e^x + k_2 x e^x}_{y_h} + \underbrace{\frac{x^3}{3} e^x + x e^{2x}}_{y_ö}$$

ÖR/ $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$ dif denk çözünüz.

$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 3$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

$$c_1' e^{3x} + c_2' x e^{3x} = 0$$

$$- \; c_1' e^{3x} \mp c_2' \left[e^{3x} + 3x e^{3x}\right] \mp \frac{e^{3x}}{x^2}$$

$$-c_2' e^{3x} = \frac{-e^{3x}}{x^2}$$

$$c_2' = \frac{1}{x^2} \qquad c_2 = \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$c_2 = -\frac{1}{x} + k_2$$

$$c_1' e^{3x} + c_2' x e^{3x} = 0$$

$$c_1' e^{3x} + \frac{1}{x^2} x e^{3x} = 0$$

$$c_1' e^{3x} + \frac{e^{3x}}{x} = 0$$

$$c_1' e^{3x} = \frac{-e^{3x}}{x} \qquad c_1' = -\frac{1}{x}$$

$$c_1 = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$c_1 = -\ln x + k_1$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

$$y = \left[-\ln x + k_1\right] e^{3x} + \left[-\frac{1}{x} + k_2\right] x e^{3x}$$

$$y = k_1 e^{3x} + k_2 x e^{3x} - (1 + \ln x) e^{3x}$$

ÖR/ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ dif denk çözünüz.

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$r_1 = r_2 = 1$

$y = (c_1 + c_2 x)e^x$

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$

$c_1' e^x + c_2' \left[e^x + x e^x\right] = \frac{e^x}{x}$

$$\begin{array}{rl} & c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \\ + & -c_1' e^x - c_2' e^x - c_2' x e^x = -\frac{e^x}{x} \\ \hline & -c_2' \cdot e^x = -\frac{e^x}{x} \Rightarrow c_2' = \frac{1}{x} \end{array}$$

$\frac{dc_2}{dx} = \frac{1}{x}$

$\int dc_2 = \int \frac{1}{x} dx$

$c_2 = \ln x + k_2$

$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$

$c_1' e^x + \frac{1}{x} \cdot x e^x = 0$

$c_1' e^x = -e^x$

$c_1' = -1$

$\frac{dc_1}{dx} = -1 \quad \int dc_1 = \int -dx \Rightarrow c_1 = -x + k_1$

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$y = (-x + k_1)e^x + (\ln x + k_2) x e^x$

$y = \underbrace{k_1 e^x + k_2 x e^x}_{y_h} \underbrace{- x e^x + \ln x \cdot x \cdot e^x}_{y_ö}$

Değişken katsayılı Lineer Dif Denklemler

Şimdiye kadar sabit katsayılı lineer denklemler üzerinde durduk. Katsayıların değişken olması durumunda dönüşümle diferansiyel denklem sabit katsayılı lineer bir denkleme dönüşür.

Euler (Euler_Cauchy) Denklemi

$$a_0 x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

formunda verilir. $a_0, a_1 \ldots a_n$ sabitlerdir.

$x = e^t$ dönüşümü yapılır.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t}$$

1) $$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

2) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot \left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right) \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{e^t}}$$

$$= \left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right) \cdot e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

3) $$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$$

Türevleri türev operatörü ile ifade edersek

$$\frac{d}{dt}=D$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}Dy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(D^2y-Dy\right)=e^{-2t}\left[D(D-1)\right]y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-3t}\left[D(D-1)(D-2)\right]y$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=e^{-nt}\left[D\ (D-1)(D-2)\cdots(D-(n-1))\right]y$$

bu dönüşümle değişken katsayılı dif denklem sabit katsayılı dif denkleme dönüşür.

ÖR/ $x^2y''-2xy'+2y=x^5\ln x$ dif denk çözünüz.

$x=e^t$

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-2e^{t}e^{-t}\frac{dy}{dt}+2y=e^{5t}\cdot\underbrace{\ln e^{t}}_{t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=t\,e^{5t}$$

$$r^2-3r+2=0 \qquad r_1=1 \quad r_2=2$$

$$y_h=c_1e^{t}+c_2e^{2t}$$

$f_1(t)=te^{5t}$ $\quad \alpha=5$ karakteristik polinomun köki olmadığından

$y_ö=(at+b)e^{5t}$

$y_ö'=ae^{5t}+(at+b).5e^{5t}=ae^{5t}+5be^{5t}+5ate^{5t}$

$y_ö''=5ae^{5t}+25be^{5t}+\underline{5ae^{5t}}+25ate^{5t}$

$y_ö''=10ae^{5t}+25be^{5t}+25ate^{5t}$

$y''-3y'+2y=te^{5t}$

$10ae^{5t}+25be^{5t}+2\cancel{5}ate^{5t}-3ae^{5t}-15be^{5t}-15\cancel{a}te^{5t}+2\cancel{a}te^{5t}+2be^{5t}=te^{5t}$

$7ae^{5t}+12be^{5t}+12ate^{5t}=te^{5t}$

$12a=1 \quad a=1/12$ ✓ $\quad 7a+12b=0$

$7.1/12=-12b$

$b=\frac{-7}{144}$ ✓

$$y_ö=\left(\frac{1}{12}t-\frac{7}{144}\right)e^{5t}$$

$x=e^t$

$t=\ln x$

$y=y_h+y_ö$

$$y=c_1e^t+c_2e^{2t}+\left(\frac{t}{12}-\frac{7}{144}\right)e^{5t}$$

$$y=c_1x+c_2x^2+\left(\frac{\ln x}{12}-\frac{7}{144}\right)x^5$$

ÖR/ $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x\ln x$ dif denk çözünüz.

$x = e^t$

$y' = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$ $\qquad y'' = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)$

$$\underbrace{e^{2t}e^{-2t}}_{1}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2\underbrace{e^{t}e^{-t}}_{1}\frac{dy}{dt} + 2y = 2t.e^t$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2te^t$$

$r^2 - 3r + 2 = 0$ $\qquad y_h = c_1e^{2t} + c_2e^t$

2 1

$r_1 = 2 \quad r_2 = 1$

$y_ö = (at+b)e^t \,.\, \underline{\underline{t}}$ $\qquad \alpha = 1 = r_2$

$y_ö = at^2e^t + bte^t$

$y_ö' = 2ate^t + at^2e^t + be^t + bte^t$

$y_ö'' = 2ae^t + \underbrace{2ate^t + 2ate^t} + at^2e^t + \underbrace{be^t + be^t} + bte^t$

$y_ö'' = 2ae^t + 4ate^t + 2be^t + at^2e^t + bte^t$

$$y'' - 3y' + 2y = 2te^t$$

$2ae^t + \underbrace{4ate^t} + 2be^t + \cancel{at^2e^t} + \cancel{bte^t} \underbrace{- 6ate^t} - 3\cancel{at^2e^t} - 3be^t - 3\cancel{bte^t}$

$+ 2\cancel{at^2}e^t + 2\cancel{bt}e^t = 2te^t$

$2ae^t - 2ate^t - be^t = 2te^t$

$-2a = 2 \quad a = -1$ $\qquad 2a - b = 0$

$2a = b \quad b = -2$

$2.(-1) = b$

$y_ö = (-t^2 - 2t)e^t$

$y = y_h + y_ö = c_1e^{2t} + c_2e^t - t^2e^t - 2te^t$

$y = c_1x^2 + c_2x - x(\ln x)^2 - 2x\ln x$

ÖR/ $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$ dif denk genel çözümünü bulunuz.

$x = e^t$

$\frac{dy}{dx} = y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}$ $\quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$y''' = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$

$e^{3t}e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) + e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2e^{t}e^{-t}\frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{4t}$

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{4t}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{4t}$$

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \quad r_1 = 1 \quad r_2 = -1 \quad r_3 = 2$

$y_h = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}$

$y_ö = Ae^{4t} \quad y_ö' = 4Ae^{4t} \quad y_ö'' = 16Ae^{4t} \quad y_ö''' = 64Ae^{4t}$

$64Ae^{4t} - 32Ae^{4t} - 4Ae^{4t} + 2Ae^{4t} = 2e^{4t}$

$30Ae^{4t} = 2e^{4t}$

$A = 1/15 \quad y_ö = \frac{1}{15}e^{4t}$

$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + \frac{1}{15}e^{4t}$

$y = c_1x + \frac{c_2}{x} + c_3x^2 + \frac{1}{15}x^4$

ÖR/ $x^3y'' + 4x^2y' = -1$ dif denk çözünüz

$$\frac{x^3y'' + 4x^2y'}{x} = \frac{-1}{x} \Rightarrow x^2y'' + 4xy' = -\frac{1}{x}$$

$$x^2y'' + 4xy' = -\frac{1}{x}$$

$$x = e^t$$

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 4e^te^{-t}\frac{dy}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = -e^{-t}$$

$$r^2 + 3r = 0 \qquad r(r+3) = 0 \qquad r_1 = 0 \quad r_2 = -3$$

$$y_h = c_1 + c_2e^{-3t}$$

$$y_ö = Ae^{-t} \qquad y_ö' = -Ae^{-t} \qquad y_ö'' = Ae^{-t}$$

$$Ae^{-t} + 3(-Ae^{-t}) = -e^{-t}$$

$$-2A = -1 \qquad A = 1/2$$

$$y_ö = \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$y = y_h + y_ö = c_1 + c_2e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$y = c_1 + \frac{c_2}{x^3} + \frac{1}{2x}$$

Yüksek Mertebeden Lineer olmayan dif denklemler.

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ x bağımsız değişken, y bağımlı değişken

a) Bağımlı değişken içermeyenler (y içermeyen)

$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (y yok)

En düşük türev t diyoruz.

$y' = t \quad y'' = t'$

$F(x, t, t'' \dots t^{(n-1)}) = 0$

$t = \varphi(x, c_1, c_2 \dots c_{n-1}) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1, c_2 \dots c_{n-1})$

$y = \phi(x, c_1, c_2 \dots c_{n-1})$

Genel Çözüm

ÖR/ $y''' - (y'')^2 = 0$ dif denk çözünüz.

$y'' = t \quad y''' = t'$

$t' - t^2 = 0$

$\dfrac{dt}{dx} = t^2$

$\displaystyle\int \frac{dt}{t^2} = \int dx$

$-\dfrac{1}{t} = x + c_1$

$\displaystyle\int \ln u \, du = u \ln u - u + c$

$t = -\dfrac{1}{x+c_1}$

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{x+c_1}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = -\dfrac{1}{x+c_1}$

$\displaystyle\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int -\frac{1}{x+c_1}\, dx$

$\dfrac{dy}{dx} = -\ln(x+c_1) + c_2$

$\displaystyle\int dy = \int (-\ln(x+c_1) + c_2)\, dx$

$y = -(x+c_1)\ln(x+c_1) + x + c_1 + c_2 x + c_3$

ÖR/ $xy^{IV} - 4y''' = 0$ dif denk çözünüz.

$y''' = t$

$y^{IV} = t'$

$xt' - 4t = 0$

$x\frac{dt}{dx} = 4t$

$\int \frac{dt}{t} = 4\int \frac{dx}{x}$

$\ln t = 4\ln x + \ln c_1$

$t = c_1 x^4$

$\frac{d^3y}{dx^3} = c_1 x^4$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = c_1 x^4$

$\int d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \int c_1 x^4 dx$

$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1\frac{x^5}{5} + c_2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = c_1\frac{x^5}{5} + c_2$

$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int\left(c_1\frac{x^5}{5} + c_2\right)dx$

$\frac{dy}{dx} = c_1\frac{x^6}{30} + c_2 x + c_3$

$\int dy = \int\left(c_1\frac{x^6}{30} + c_2 x + c_3\right)dx$

$y = c_1\frac{x^7}{210} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$

Ör/

$xy'' - y' = \sqrt{x^2+(y')^2}$ dif denk çözünüz.

$y' = t \qquad y'' = t'$

$x t' - t = \sqrt{x^2+t^2}$

$x t' = t + \sqrt{x^2+t^2}$

$t' = \frac{t}{x} + \sqrt{\frac{x^2+t^2}{x}}$

$t' = \frac{t}{x} + \sqrt{\frac{x^2+t^2}{x^2}} = \frac{t}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}$

$t' = \frac{t}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}$ homojen dif denk

$\frac{t}{x} = u \qquad t = xu$

$t' = u + xu'$

$\cancel{u} + x u' = \cancel{u} + \sqrt{1+u^2}$

$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}$

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow \ln x + \ln c_1 = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$

$\ln x c_1 = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$

$x c_1 = u + \sqrt{1+u^2}$

$(x c_1 - u)^2 = \left(\sqrt{1+u^2}\right)^2$

$c_1^2 x^2 - 2 x c_1 u + \cancel{u^2} = 1 + \cancel{u^2}$

$u = \frac{c_1^2 x^2 - 1}{2 c_1 x}$

$\frac{t}{x} = \frac{c_1^2 x^2 - 1}{2 c_1 x}$

$t = \frac{c_1^2 x^2 - 1}{2 c_1 x} \cdot x = \frac{c_1^2 x^2}{2 c_1} - \frac{1}{2 c_1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1^2 x^2}{2 c_1} - \frac{1}{2 c_1}$

$\int dy = \int \frac{c_1^2 x^2}{2 c_1} dx - \int \frac{1}{2 c_1} dx$

$y = c_1 \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2 c_1} + c_2$

2) $f(y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$

Bağımsız değişkeni içermeyen (x'i içermeyen)

$y' = p \qquad y'' = p\frac{dp}{dy} \qquad y''' = \underbrace{p\frac{dp}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)}_{\text{bu}}$ kullanılmayacak.

ÖR/ $y'' - (y')^3 = 0$ dif denk çöz.

$p\frac{dp}{dy} - p^3 = 0 \qquad p\left(\frac{dp}{dy} - p^2\right) = 0$

1) $p = 0 \qquad y = c$

2) $\frac{dp}{dy} = p^2$

$\int\frac{dp}{p^2} = \int dy \Rightarrow -\frac{1}{p} = y + c_1$

$p = -\frac{1}{y+c_1}$

$\downarrow$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y+c_1}$

$\int dx = \int -(y+c_1)\,dy$

$x = -\frac{y^2}{2} - c_1 y + c_2$

ÖR/ $yy'' = (y')^2$ dif denk çöz

$yp\frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$

1) $p = 0 \qquad y = c$

2) $y\frac{dp}{dy} = p \qquad \int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y} \qquad \ln p = \ln y + \ln c_1$

$p = y \cdot c_1$

$\frac{dy}{dx} = y c_1$

$\int\frac{dy}{y} = \int c_1\, dx$

$\ln y = c_1 x + c_2$

$y = e^{c_1 x + c_2}$

ÖR/ $y'' = \tan y + \tan^3 y$, $y(\pi/4) = 0$, $y'(\pi/4) = 1$

dif_2 denk çözünüz.

x yok

$y' = p \qquad y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

$$p\frac{dp}{dy} = \tan y + \tan^3 y$$

$$\int p\,dp = \int(\tan y + \tan^3 y)\,dy = \int \tan y\,(1+\tan^2 y)\,dy$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{\tan^2 y}{2} + \frac{c_1}{2}$$

$$p^2 = \tan^2 y + c_1$$

$$p = \sqrt{\tan^2 y + c_1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\tan^2 y + c_1}$$

$x = \pi/4 \quad y = 0 \quad y' = 1$

$$1 = \sqrt{\tan^2 0 + c_1} \Rightarrow c_1 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\sqrt{\tan^2 y + 1}}_{\sec^2 y} = \sec y = \frac{1}{\cos y}$$

$$\int \cos y\,dy = \int dx$$

$$\sin y = x + c_2$$

$x = \pi/4 \qquad y = 0$

$$\sin 0 = \pi/4 + c_2 \qquad c_2 = -\pi/4$$

$$\sin y = x - \pi/4$$

$$y = \operatorname{Arc\,sin}\,(x - \pi/4)$$

ÖR/ $yy'' + 2y^2 (y')^2 + (y')^2 = 0$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

x içermeyen dif denklem

$y' = p \qquad y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

$yp\dfrac{dp}{dy} + 2y^2p^2 + p^2 = 0$

$p\left(y\dfrac{dp}{dy} + 2y^2p + p\right) = 0$

1) $p = 0 \qquad y' = 0 \qquad y = c$ genel çözüm

2) $y\dfrac{dp}{dy} + 2y^2p + p = 0$

$\dfrac{dp}{dy} + 2yp + \dfrac{p}{y} = 0$

$\dfrac{dp}{dy} + p\left(2y + \dfrac{1}{y}\right) = 0$

$\displaystyle\int \frac{dp}{p} + \int \left(2y + \frac{1}{y}\right)dy = 0$

$\ln p + y^2 + \ln y = \ln c_1$

$\dfrac{p \cdot y}{c_1} = e^{-y^2} \Rightarrow p = \dfrac{c_1 e^{-y^2}}{y}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c_1 e^{-y^2}}{y}$

$\displaystyle\int y e^{y^2} dy = \int c_1 dx$

$\dfrac{1}{2}e^{y^2} = c_1 x + c_2$

$e^{y^2} = 2c_1 x + c_2$

genel çözüm

ÖR/ $yy'' + (1+y)y'^2 = 0$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

x içermeyen dif denk

$y' = p \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$

$yp\frac{dp}{dy} + (1+y)p^2 = 0$

$p\left[y\frac{dp}{dy} + (1+y)p\right] = 0$

1) $p=0 \quad y'=0 \qquad y=c$ genel çözüm

2) $y\frac{dp}{dy} + (1+y)p = 0$

$\int\frac{dp}{p} + \int\frac{1+y}{y}dy = 0$

$\ln p + y + \ln y = \ln c_1$

$\ln\frac{p \cdot y}{c_1} = -y \Rightarrow \frac{py}{c_1} = e^{-y}$

$p = \frac{c_1 e^{-y}}{y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1 e^{-y}}{y}$

$\int ye^y dy = \int c_1 dx \Rightarrow (y-1)e^y = c_1 x + c_2$

Genel çözüm