

OR/

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

limitni serilerden yararlanarak
gözümlü.

63

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{3!} \right) = 0$$

OR/ $f(x) = e^{x^2} - e^{-x^2}$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ limitni
seriler yardımıyla belirleyiniz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right) - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2 \cdot \frac{x^6}{3!}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(2 + \frac{2x^4}{3!} + \dots \right)}{x^2}$$

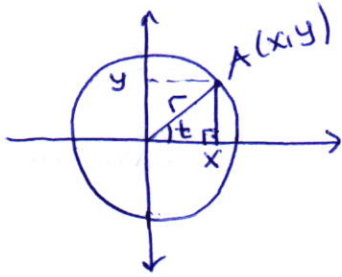
$$= 2$$

Parametrik denklemler;

Eğer x ve y ; t değerlerinin I aralığında $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise, o zaman bu denklemlerle tanımlanan

$(x,y) = (f(t), g(t))$ noktaları kümesi bir parametrik eğidir. Bu denklemlere, eğri için parametrik denklemler denir.

ör $x^2 + y^2 = r^2$ yarıçapı r , merkezi $M(0,0)$ olan çemberdir.

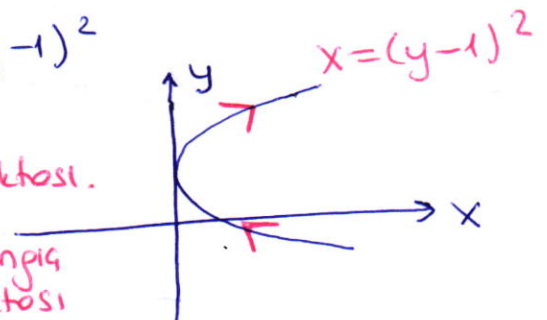


$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos t \\ \sin t &= \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin t \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{çemberin parametrik denklemleridir.}$$

ör $x=t^2$ $y=t+1$ $-\infty < t < \infty$ eğrisinin denklemini x ve y cinsinden bulup çıkarız.

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t+1 \\ y-1 &= t \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x = (y-1)^2$$

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \infty & x &\rightarrow \infty & y &\rightarrow \infty & \text{bitiş noktası.} \\ t &\rightarrow -\infty & x &\rightarrow \infty & y &\rightarrow -\infty & \text{başlangıç noktası} \end{aligned}$$



ör/ $x=1+2\cos t$ $y=2\sin t$ parametrisasyonu ile verilen eğriyi bulunuz.

$$\begin{aligned} x &= 1+2\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{x-1}{2} \\ \sin t &= \frac{y}{2} \end{aligned}$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ çemberi bulunur.}$$

Türev: f ve g fonksiyonları t de türevlenebilir 65

İse $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ de türevlenebilir.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

ör/ $x=\sec t$, $y=\tan t$ $-\pi/2 < t < \pi/2$ eğrisinin $(\sqrt{2}, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} \sec t = \sqrt{2} \\ \tan t = 1 \end{array} \right\} t = \pi/4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec \pi/4}{\tan \pi/4} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}x - 1 \end{aligned}$$

Parametrik olarak tanımlı eğrinin uzunluğu:

Eğer C eğrisi $x=f(t)$, $y=g(t)$ $a \leq t \leq b$ ile parametrik olarak tanımlıysa $t=a$ dan $t=b$ ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiyorsa C nin uzunluğu

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \text{ dir.}$$

ör/ $x=r \cos t$ $y=r \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$ çemberinin uzunluğu?

$$f'(t) = -r \sin t \quad g'(t) = r \cos t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

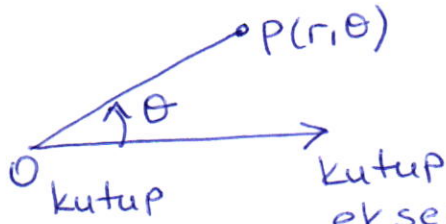
ÖR / $x = t - t^2$ $y = t - t^3$ $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulunuz 66

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$y'' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-6t(1-2t) + 2(1-3t^2)}{(1-2t)^2} = \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1-2t)^3}$$

Kutupsal Koordinatlar

Genelde bir nokta (r, θ) kutupsal koordinatları cinsinden verilmişse o; kutuptan eğer $r \geq 0$ ise θ ışını boyunca ve eğer $r < 0$ ise $\pi + \theta$ ışını boyunca $|r|$ uzaklıkta bulunur.



Düzlem üzerinde bir nokta ve bu noktan çıkan bir ışın seçelim. Noktaya kutup, ışına ise kutup eksenini derir. Burada r , P'nin orijine uzaklığı θ da kutup eksenini ile OP arasındaki yönlü açıdır.

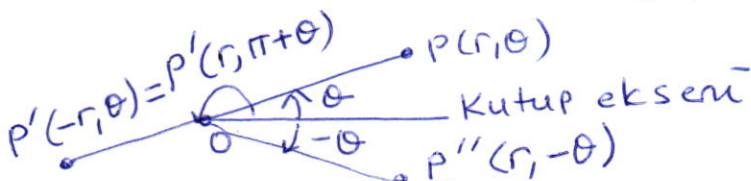
Pozitif θ : Saatin tersi yönü
Negatif θ : Saat yönü olarak alınır.

* Her k tamsayı için $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$ dir.

* Bir noktayı temsil eden sonsuz nokta vardır.

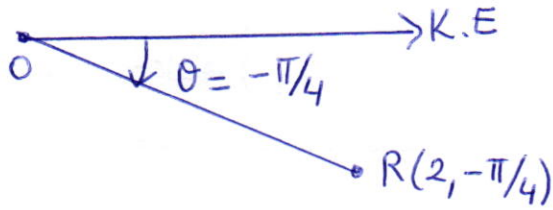
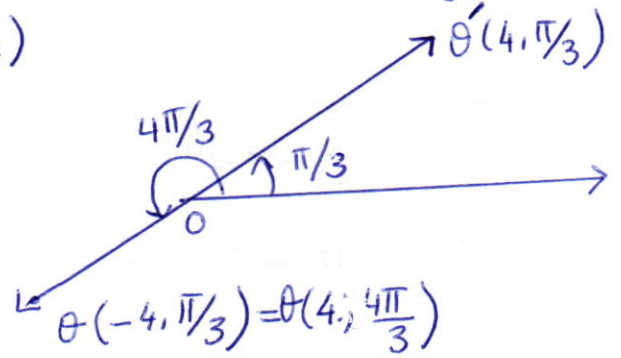
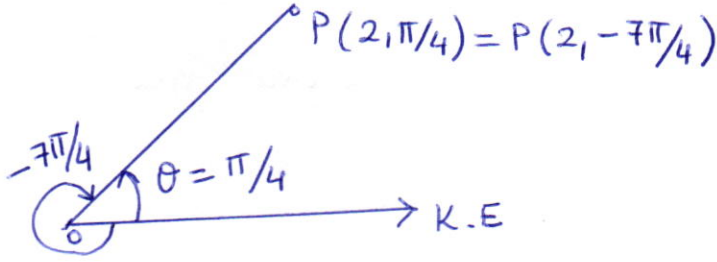
* Eğer $r = 0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.

* Eğer $r < 0$ ise P, θ açılı ışının ters yönünde $\theta + \pi$ açılı ışın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzunlukta olur. $(r, \pi + \theta) = (-r, \theta)$ dir.

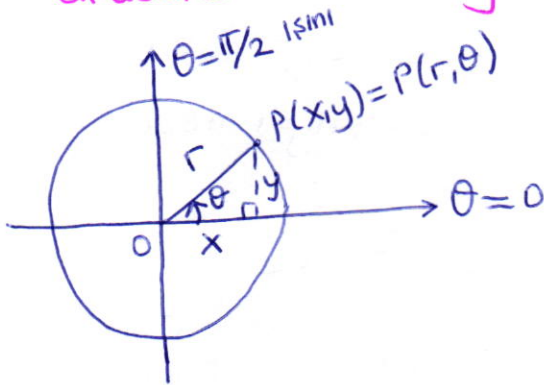


ÖR/ $P(2, \pi/4)$ $R(2, -\pi/4)$, $\theta(-4, \pi/3)$

noktalarını kutupsal koordinatlarda gösterelim.



Kutupsal koordinatlar ve Kartezyen koordinatlar arasındaki bağıntılar.



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Kutupsal koordinat denklemleri

- 1) $r \cos \theta = 2$
- 2) $r \sin \theta = -1$
- 3) $r^2 \cos \theta \sin \theta = 4$
- 4) $r = 1 + 2r \cos \theta$

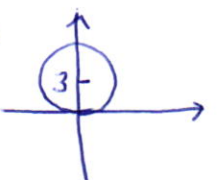
Kartezyen koordinat denklemleri

- 1) $x = 2$
- 2) $y = -1$
- 3) $xy = 4$
- 4) $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + 2x$
 $x^2 + y^2 = (1 + 2x)^2$
 $y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$

ÖR/ $x^2 + (y-3)^2 = 9$ çemberinin kutupsal denklemini nedir?

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 9 \\ x^2 + y^2 - 6y &= 0 \\ M(0, 3) \quad r &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 - 6r \sin \theta &= 0 \\ r &= 6 \sin \theta \end{aligned}$$



ÖR / $r \cos \theta = -4$ kutupsal denkleminin Kartezyen ⁶⁸
denklemini nedir?

$$r \cos \theta = -4 \Rightarrow x = -4 \text{ doğrusu}$$

ÖR / $r = \frac{4}{2 \cos \theta - \sin \theta}$ Kartezyen denklemini nedir?

$$2r \cos \theta - r \sin \theta = 4$$

$$2x - y = 4 \Rightarrow y = 2x - 4 \text{ doğrusu}$$

ÖR / Kutupsal koordinatlarda $P(2, \pi/3)$ noktasının
Kartezyen koordinatlarda karşılığı nedir?

$$\begin{array}{lll} x = r \cos \theta & x = 2 \cos \pi/3 & x = 1 \\ y = r \sin \theta & y = 2 \sin \pi/3 & y = \sqrt{3} \end{array} \quad P(1, \sqrt{3})$$

ÖR / Kartezyen koordinatlarda $P(-1, -1)$ noktasının
kutupsal koordinatlarda karşılığı nedir?

$$\begin{array}{ll} x = r \cos \theta & x^2 + y^2 = r^2 \\ y = r \sin \theta & 1^2 + 1^2 = r^2 \end{array} \quad r^2 = 2 \quad r = \sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \theta = \pi/4$$

ÖR / $x^2 + y^2 = 4$ denkleminin kutupsal denklemini nedir? $P(\sqrt{2}, 5\pi/4)$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad r^2 = 4 \quad r = 2 \quad M(0,0) \quad r=2 \text{ çember}$$

ÖR / $x^2 + y^2 = 2x$ denkleminin kutupsal koordinatlardaki
karşılığı nedir?

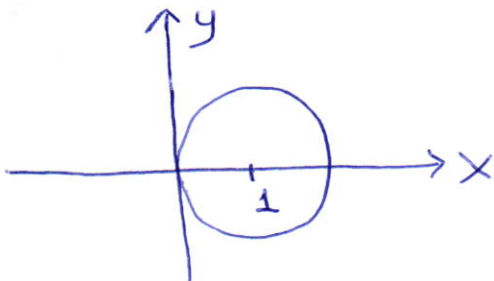
$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

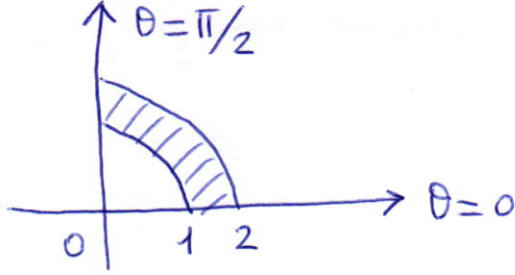
$$M(1,0) \quad r=1 \text{ çember denklemini}$$

$$\text{Kutupsal denklemini de} \\ r = 2 \cos \theta$$

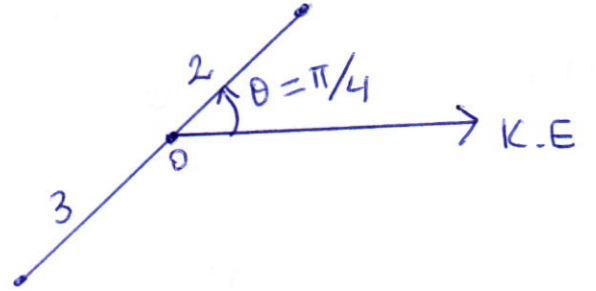


ÖR/ Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları 69 sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz.

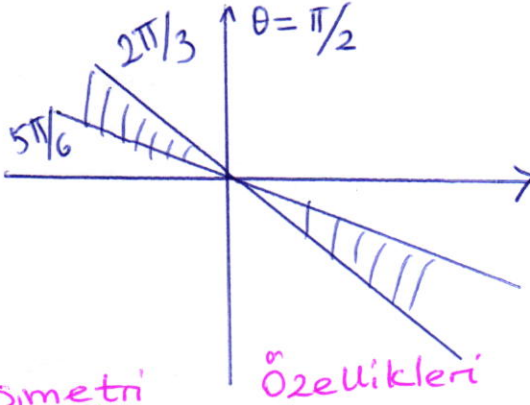
a) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \pi/2$



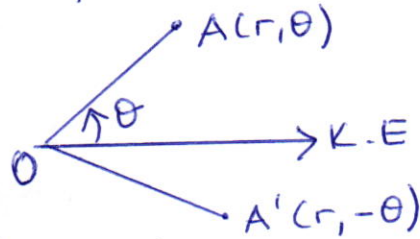
b) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta = \pi/4$



c) $2\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/6$ ve $-\infty < r < \infty$

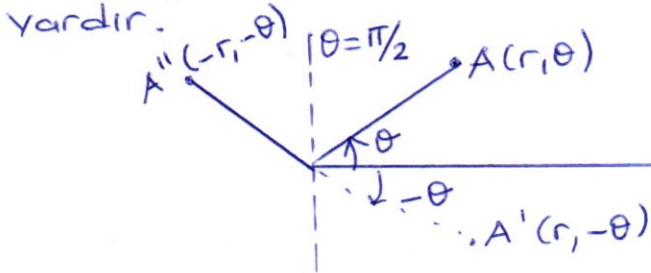


1) a) $r = f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazıldığında $f(-\theta) = f(\theta) = r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



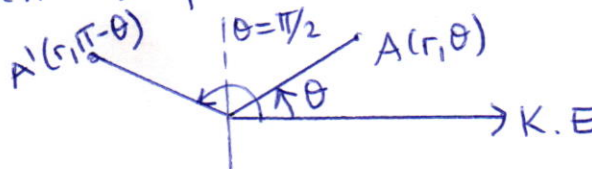
Sadece pozitif noktalarda çizim yapılır. $\theta = \pi/2$ ye göre simetri

b) $f(-\theta) = -f(\theta) = -r$ ise vardır.



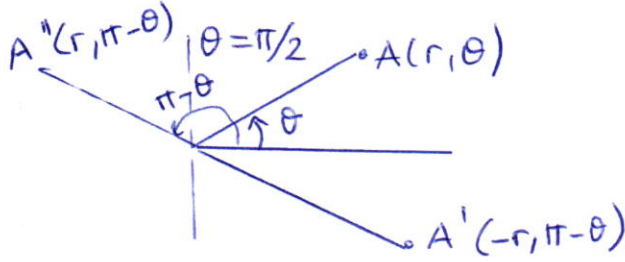
Sadece pozitif noktalarda çizim yapılır.

2) a) $r = f(\theta)$ da θ yerine $\pi - \theta$ yazılırsa $f(\pi - \theta) = f(\theta) = r$ ise $\theta = \pi/2$ ye göre simetri vardır.



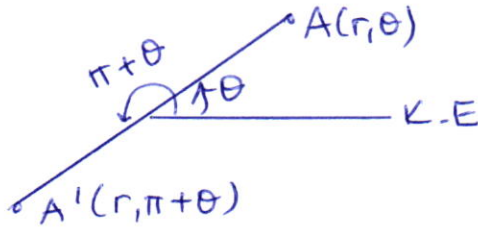
Sadece $[-\pi/2, \pi/2]$ de çizim yapılır.

b) $r = f(\theta)$ da θ yerine $\pi - \theta$ yazılırsa $f(\pi - \theta) = -f(\theta) = -r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır. 70

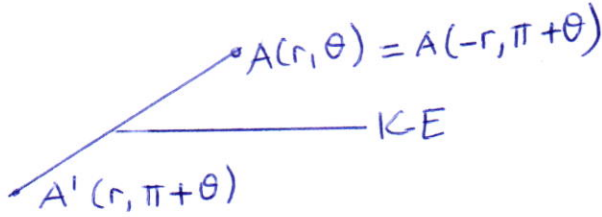


inceleme aralığı $[-\pi/2, \pi/2]$ dir

3) a) $r = f(\theta)$ θ yerine $\pi + \theta$ yazılırsa $f(\pi + \theta) = f(\theta) = r$ orjine (kutba) göre simetri vardır.



b) $f(\pi + \theta) = -f(\theta) = -r$ ise noktalar aklıdır

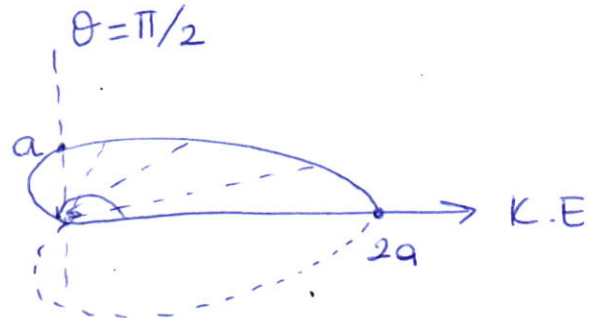


ör/ $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) eğrisinin grafiğini çizin.
Periyodu 2π dir. $[-\pi, \pi]$

$\theta \rightarrow -\theta$ $f(-\theta) = a(1 + \cos(-\theta)) = a(1 + \cos \theta) = f(\theta) = r$
Kutupsal eksenle göre simetri
 $\theta \rightarrow \pi - \theta$ } simetri yok. İnceleme aralığı $[0, \pi]$ dir.
 $\theta \rightarrow \pi + \theta$ }

θ	0	$\pi/2$	π
r	$2a$	a	0

$$r'(\theta) = -a \sin \theta < 0$$



ör/ $r = a(1 - \sin \theta)$ ($a > 0$) eğrisini çiziniz

71

1) Periyodu 2π

2) $\theta \rightarrow -\theta$

$$f(-\theta) = r = a(1 - \sin(-\theta)) = a(1 + \sin \theta)$$

simetri yok

$\theta \rightarrow \pi - \theta$

$$f(\pi - \theta) = r = a(1 - \sin(\pi - \theta))$$

$$= a(1 - \sin \theta) = f(\theta)$$

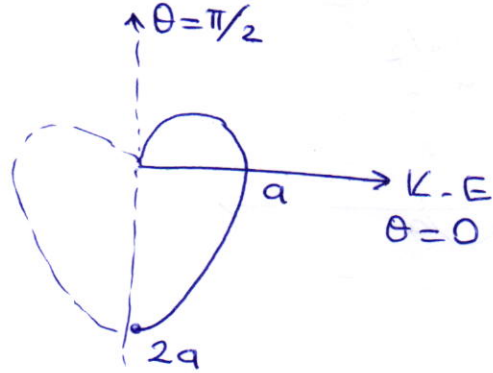
$\theta = \pi/2$ simetri var

$\theta \rightarrow \pi + \theta$ simetri yok

3) $f'(\theta) = -a \cos \theta < 0$ $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$

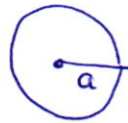
4) $\theta = \pi/2$ $r = 0$, $\theta = -\pi/2$ $r = 2a$, $\theta = 0$ $r = a$

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
r'	—	—	—
r	$2a$	a	0



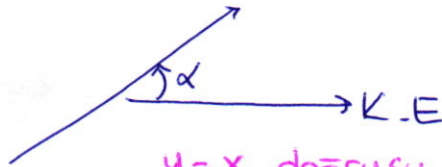
Tenel Şahiller:

1) $r = a$



Yarıçapı a olan merkezli çember
 $x^2 + y^2 = a^2$

2) $\theta = \alpha$
doğrusu



Eğimi α olan doğru

$\theta = \pi/4$ ışına karşılık gelir.

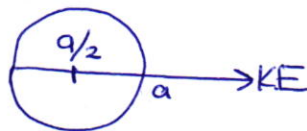
3) $r = a \cos \theta$

$$r, r = ar \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

$$x^2 - ax + y^2 = 0$$

$$+ \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$



Kutup ve $(a, 0)$

noktasında geçen $\frac{a}{2}$

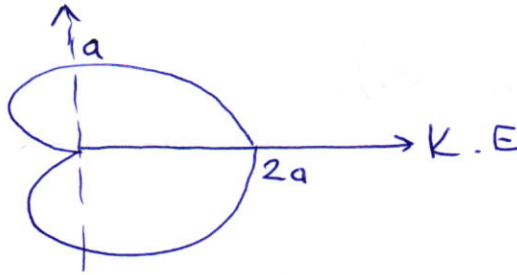
yarıçaplı çember.

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

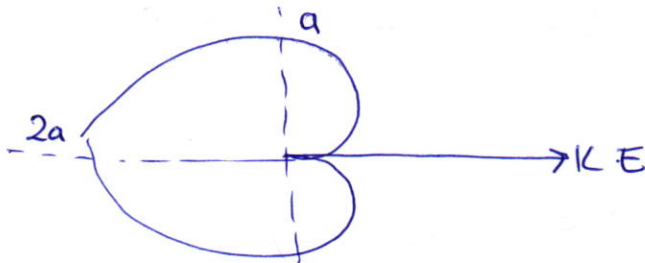
4) $r = a \sin \theta \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ cemberi

72

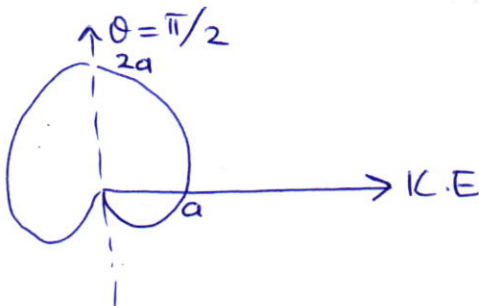
5) $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$)



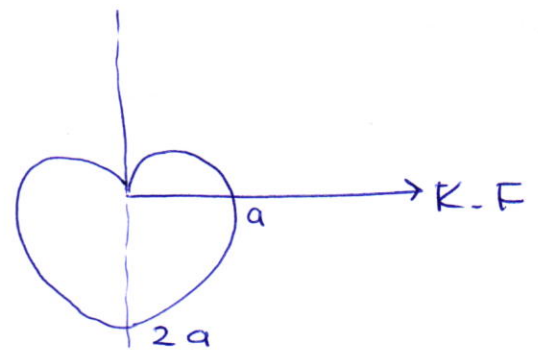
6) $r = a(1 - \cos \theta)$ ($a > 0$)



7) $r = a(1 + \sin \theta)$ ($a > 0$)



8) $r = a(1 - \sin \theta)$

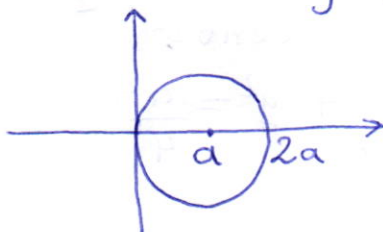


9) $r \cos \theta = a \Rightarrow x = a$ doğrusu
 $r \sin \theta = b \Rightarrow y = b$ doğrusu

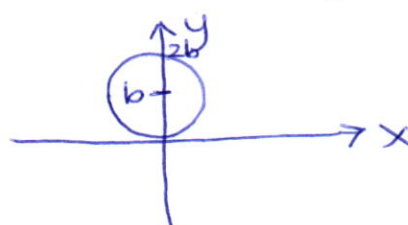
10) $r = 2a \cos \theta$ merkezi $(a, 0)$ ve yarıçapı $|a|$ olan cember

11) $r = 2b \sin \theta$ merkezi $(0, b)$ ve yarıçapı $|b|$ olan cember

$r = 2a \cos \theta$ grafiği

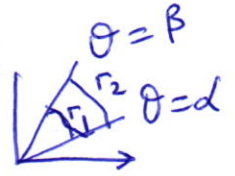


$r = 2b \sin \theta$ grafiği

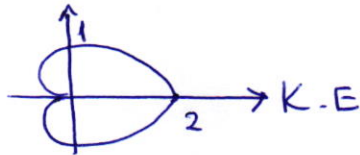


$r = f(\theta)$ denklemiyle verilmiş bir eğri $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğrularıyla sınırladığı alan

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \text{ formülü ile hesaplanır.}$$



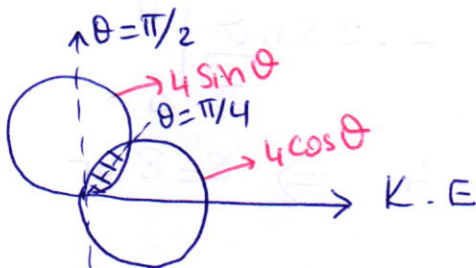
$\theta = \alpha$ dan $\theta = \beta$ ya $r_1 = r_1(\theta)$ ve $r_2 = r_2(\theta)$ kutupsal eğrileri arasında bulunan integral
ör/ $r = 1 + \cos \theta$ eğrisinin alanı?



$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta & A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r_1^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta + 2\sin \theta \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right] \Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{4} \quad A = \frac{3\pi}{2}$$

ör/ $r = 4\cos \theta$ ile $r = 4\sin \theta$ eğrilerinin sınırladığı alanı bulunuz. (Ortak alan)



$$4\cos \theta = 4\sin \theta \Rightarrow \cos \theta = \sin \theta \quad \theta = \pi/4$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4\sin \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (4\cos \theta)^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 16 \left[\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16 \left[\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right] d\theta$$

$$A = \frac{8}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\pi/4} + \frac{8}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi - 4$$

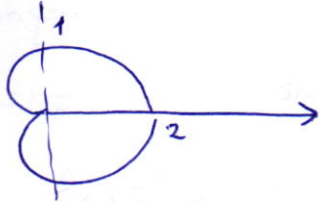
Yay uzunluğu

74

$r=f(\theta)$ eğrisinin $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ arasındaki yay uzunluğu

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta \quad \text{formülü ile bulunur.}$$

ör/ $r=1+\cos\theta$ eğrisinin uzunluğu?



$$r=1+\cos\theta$$

$$r' = -\sin\theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta} d\theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right]} d\theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta = \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$\frac{S}{2} = 2 \cdot 2\sin\frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi}$$

$$\frac{S}{2} = 4 \Rightarrow S=8 \text{ br}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

ör/ $r = \cos \theta$ cemberinin uzunluğu?

75

$$r = \cos \theta$$

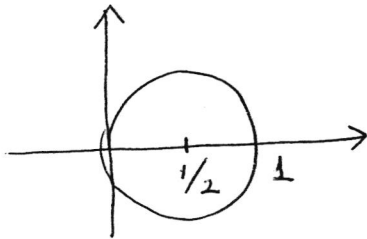
$$r \cdot r = r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = x$$

$$x^2 - x + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad r = \frac{1}{2} \text{ cember.}$$



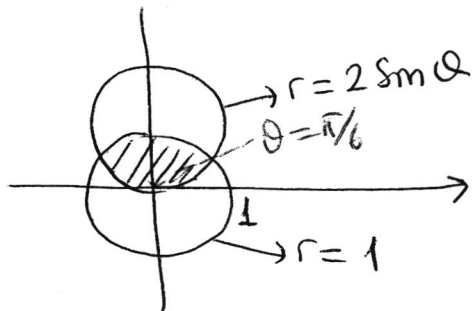
$$r = \cos \theta \quad r' = -\sin \theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\frac{S}{2} = \pi/2 \quad S = \pi \text{ br}$$

ör/ $r=1$ ve $r=2\sin\theta$ cemberleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$$r = 2\sin\theta$$

$$r \cdot r = 2r\sin\theta$$

$$r^2 = 2r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

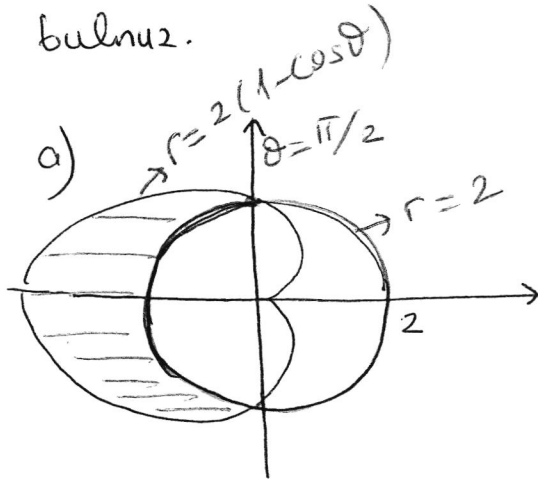
$$M(0,1) \quad r=1$$

$$\begin{aligned} r &= 2\sin\theta, \quad r=1 \\ 2\sin\theta &= 1 \\ \sin\theta &= 1/2 \\ \theta &= \pi/6 \end{aligned}$$

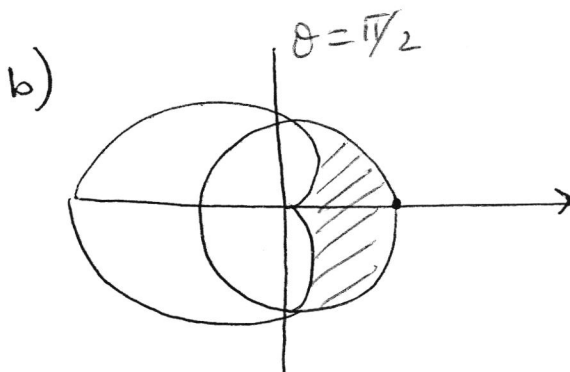
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (2\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} 1^2 d\theta$$

ÖR/a) $r = 2$ çemberinin dışında ve $r = 2(1 - \cos\theta)$ kardioidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

b) $r = 2$ çemberinin içinde ve $r = 2(1 - \cos\theta)$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

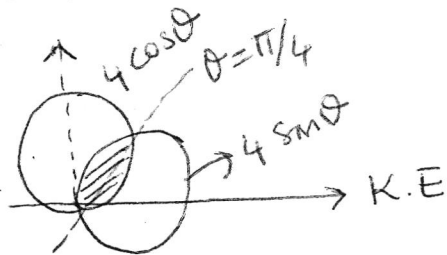


$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} [2^2 - (2(1-\cos\theta))^2] d\theta$$



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [2^2 - (2(1-\cos\theta))^2] d\theta$$

ÖR/ $r = 4\cos\theta$ ile $r = 4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alanı bulunuz?



$$r = 4\cos\theta$$

$$r^2 = 4r\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

M(2,0) $r = 2$

$$r = 4\sin\theta$$

$$r^2 = 4r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

M(0,2) $r = 2$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (4\cos\theta)^2 d\theta = 2\pi - 4$$

OR/ $r = \cos \theta$ cembernin uzunluğu ?

75

$$r = \cos \theta$$

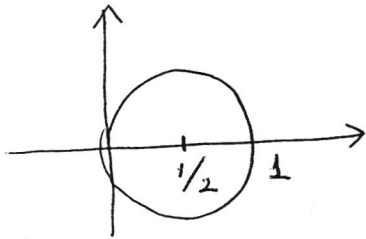
$$r \cdot r = r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = x$$

$$x^2 - x + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad r = \frac{1}{2} \text{ cember.}$$



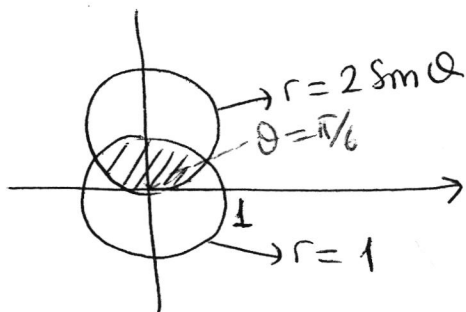
$$r = \cos \theta \quad r' = -\sin \theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\frac{S}{2} = \frac{\pi}{2} \quad S = \pi \text{ br}$$

ÖR/ $r=1$ ve $r=2\sin\theta$ cemberleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$$r = 2\sin\theta$$

$$r \cdot r = 2r\sin\theta$$

$$r^2 = 2r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

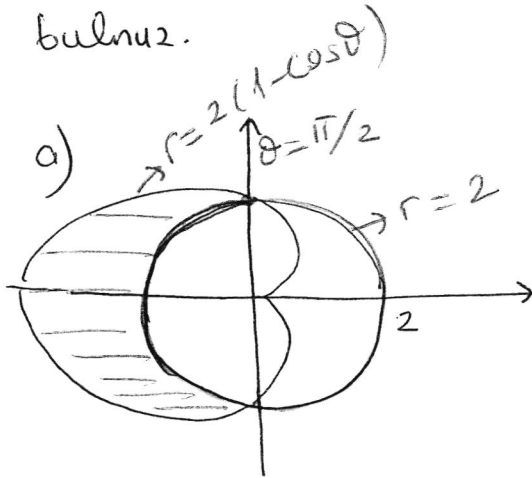
$$M(0,1) \quad r=1$$

$$\begin{aligned} r &= 2\sin\theta, \quad r=1 \\ 2\sin\theta &= 1 \\ \sin\theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \pi/6 \end{aligned}$$

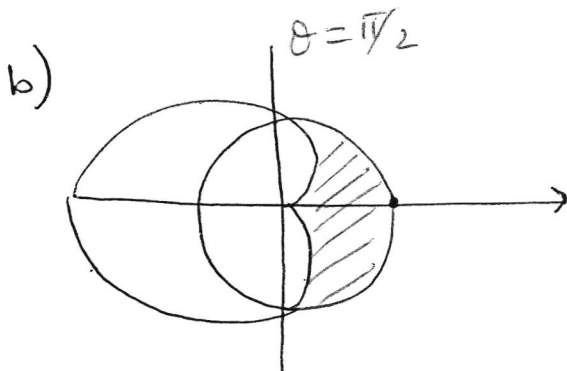
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (2\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} 1^2 d\theta$$

ÖR/a) $r = 2$ çemberinin dışında ve $r = 2(1 - \cos\theta)$ kardioidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

b) $r = 2$ çemberinin içinde ve $r = 2(1 - \cos\theta)$ kardioidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

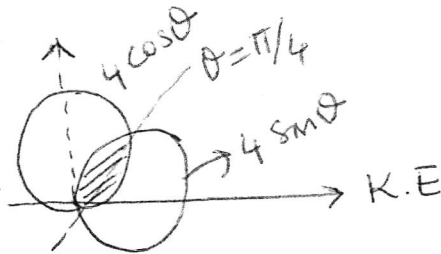


$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} [(2(1 - \cos\theta))^2 d\theta - 2^2] d\theta$$



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [2^2 - (2(1 - \cos\theta))^2] d\theta$$

ÖR/ $r = 4\cos\theta$ ile $r = 4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alanı bulunuz?



$$r = 4\cos\theta$$

$$r^2 = 4r\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

M(2,0) $r = 2$

$$r = 4\sin\theta$$

$$r^2 = 4r\sin\theta$$

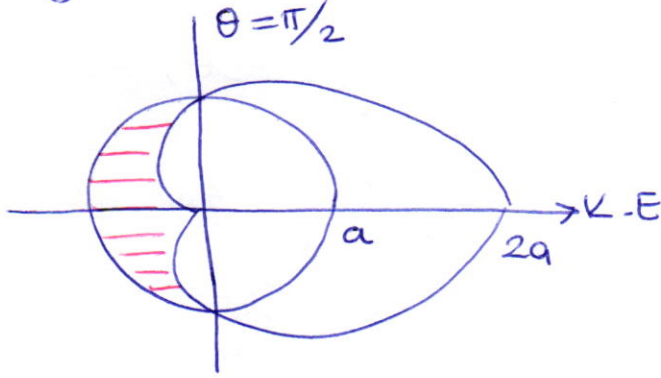
$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

M(0,2) $r = 2$

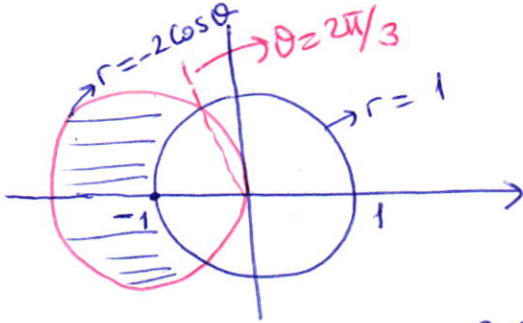
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (4\cos\theta)^2 d\theta = 2\pi - 4$$

ÖR/ $a > 0$ olmak üzere $r = a(1 + \cos\theta)$ kardioidinin ⁷⁷
 dışında $r = a$ çemberinin içimde kalan
 bölgenin alanını hesaplayınız.



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} [a^2 - (a + a \cos\theta)^2] d\theta$$

ÖR/ $r = -2 \cos\theta$ çemberinin içimde $r = 1$ çemberinin
 dışında kalan alanı bulunuz?



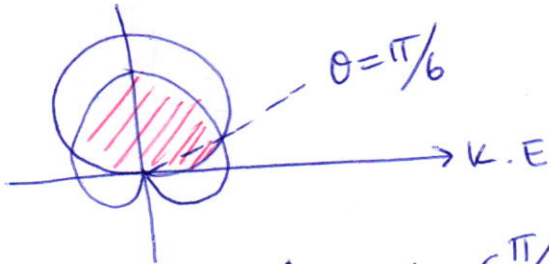
$$\begin{aligned} r &= -2 \cos\theta \\ r^2 &= -2r \cos\theta \\ x^2 + y^2 &= -2x \\ x^2 + 2x + y^2 &= 0 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 1 \\ M(-1, 0) \quad r &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \cos\theta &= 1 \\ \cos\theta &= -1/2 \end{aligned}$$

$$\theta = 2\pi/3$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{\pi} [(-2 \cos\theta)^2 - 1^2] d\theta$$

ÖR/ $r = 3 \sin\theta$, $r = 1 + \sin\theta$ ortak alanını bulunuz?



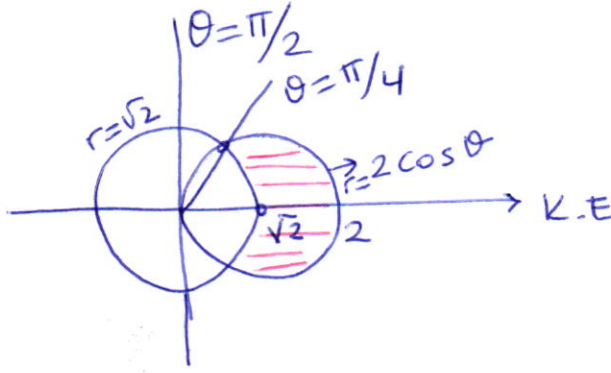
$$3 \sin\theta = 1 + \sin\theta$$

$$2 \sin\theta = 1 \quad \sin\theta = 1/2$$

$$\theta = \pi/6$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (3 \sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \sin\theta)^2 d\theta$$

ÖR/ $r=2\cos\theta$ eğrisinin içinde $r=\sqrt{2}$ nin dışında kalan alanı bulunuz? 78



$$2\cos\theta = \sqrt{2} \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \theta = \pi/4$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} [(2\cos\theta)^2 - (\sqrt{2})^2] d\theta$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4\cos^2\theta - 2) d\theta$$

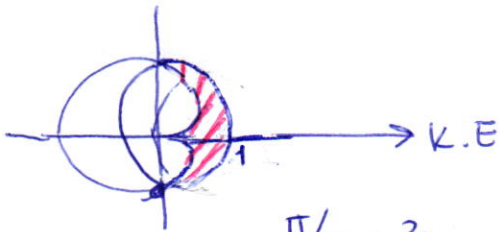
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 4 \cdot \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) - 2 d\theta$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} [2 + 2\cos 2\theta - 2] d\theta$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \left[2 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

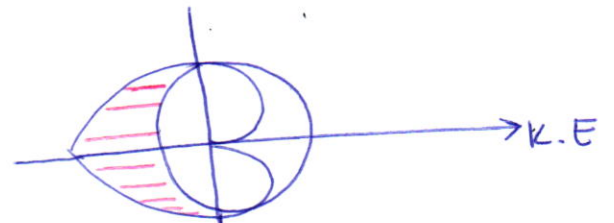
$$\frac{A}{2} = \frac{\sin 2 \cdot \pi/4}{2} = \frac{1}{2} \quad \underline{A=1}$$

ÖR/ $r=1$ içinde $r=1-\cos\theta$ dışında kalan bölgenin alanı?



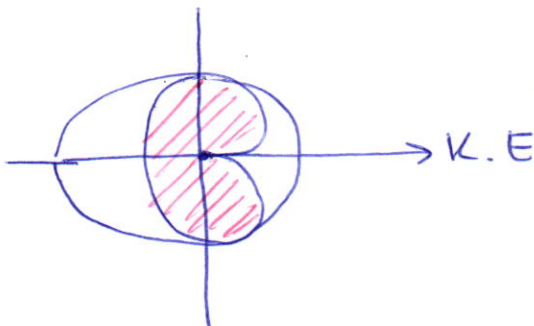
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1^2 - (1-\cos\theta)^2) d\theta$$

ÖR/ $r=1$ dışında $r=1-\cos\theta$ içinde kalan bölgenin alanı?



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} [(1-\cos\theta)^2 - 1^2] d\theta$$

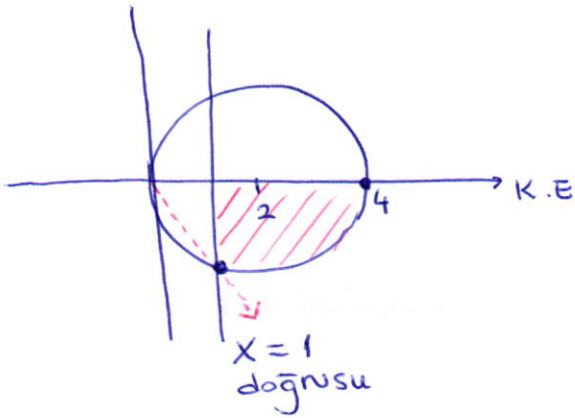
ÖR/ $r=1$ ve $r=1-\cos\theta$ ortak alanı?



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} 1^2 d\theta$$

ÖR/ $r = 4 \cos \theta$, $r \cos \theta \geq 1$, $\theta \leq 0$ ile sınırlı bölgenin alanı nedir?

79



$$r = 4 \cos \theta$$

$$r^2 = 4r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \text{ cember}$$

$$M(2,0) \quad r=2$$

$$r \cos \theta \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

$$4 \cos \theta = r \quad x=1 \quad r \cos \theta = 1$$

kesiştikleri θ yi buluyoruz

$$4 \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = -\pi/3$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^0 (4 \cos \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^0 \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 d\theta$$

$$A = 8 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\pi/3}^0 - \tan \theta \Big|_{-\pi/3}^0 = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}$$

$$\sin 120 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ÖR/ $r = 2$, $r = 4 \cos \theta$, $r \cos \theta = 3$

eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını veren kutupsal integrali yazınız.

$$r = 2 \text{ yarıçapı 2 olan cember } M(0,0)$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$r = 4 \cos \theta \quad r^2 = 4r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad (x-2)^2 + y^2 = 4 \text{ cember}$$

$$r \cos \theta = 3$$

$$x = 3$$

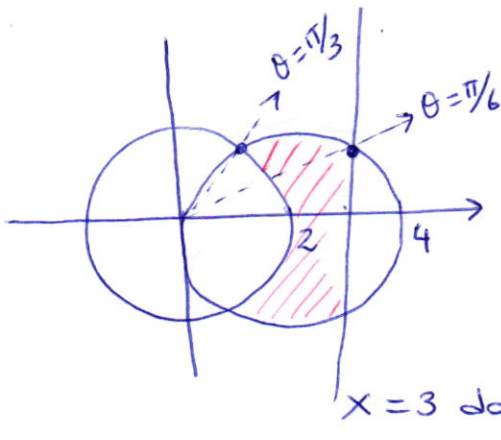
$$\left. \begin{array}{l} r = 4 \cos \theta \\ r = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cos \theta = 2 \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \theta = \pi/3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} r = 4 \cos \theta \\ r \cos \theta = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cos \theta = \frac{3}{\cos \theta} \\ \cos^2 \theta = \frac{3}{4} \end{array}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi/6$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \left[\left(\frac{3}{\cos \theta} \right)^2 - 2^2 \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} [(r \cos \theta)^2 - 2^2] d\theta$$



$$x = 3 \text{ doğrusu}$$

ÖR / $\begin{cases} x = 8 \cos t + 8t \sin t \\ y = 8 \sin t - 8t \cos t \end{cases}$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin uzunluğu nedir? 80

$$\frac{dx}{dt} = -8 \sin t + 8 \sin t + 8t \cos t = 8t \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = 8 \cos t - 8 \cos t + 8t \sin t = 8t \sin t$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{64t^2 \cos^2 t + 64t^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{64t^2 [\cos^2 t + \sin^2 t]} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{64t^2} dt = \int_0^{\pi/2} 8t dt \\ &= 4t^2 \Big|_0^{\pi/2} = \pi^2 \end{aligned}$$

ÖR / $\begin{cases} x = 2t^2 + 3 \\ y = t^4 \end{cases}$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin $t = -1$ deki normal doğrusunun denklemini nedir?

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} (x - x_0)$$

$$t = -1 \quad \begin{cases} x = 2 + 3 = 5 \\ y = (-1)^4 = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} (5, 1) \text{ deki normalin} \\ \text{denklemini} \end{array} \right\}$$

$$y - 1 = \frac{-1}{f'(5)} (x - 5)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y' = \frac{4t^3}{4t} = t^2$$

$$y' = t^2 \Big|_{t=-1} = 1$$

$$y - 1 = -(x - 5)$$

$$y + x = 1 + 5$$

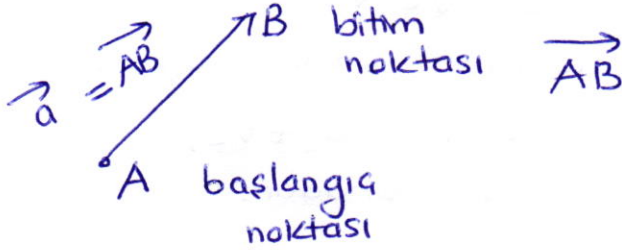
$$\underline{y = -x + 6}$$

OR / $r = e^{2\theta}$ eğrisinin $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığındaki uzunluğu?

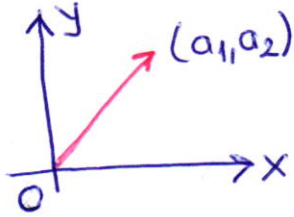
$$r^2 = e^{4\theta} \quad r' = 2e^{2\theta} \quad (r')^2 = 4e^{4\theta} \quad (r')^2 + r^2 = 4e^{4\theta} + e^{4\theta} = 5e^{4\theta}$$

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{5e^{4\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{5} e^{2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{2\pi} - 1)$$

Başlangıç ve bitim noktaları bulunan belli bir doğrultusu, yönü ve uzunluğu olan doğru parçasına vektör denir.



Kartezyen düzlemde bir $\vec{a}$ vektörü (a_1, a_2) şeklinde sıralı reel sayı çiftidir. $\vec{a} = (a_1, a_2)$ yazılır.



a_1, a_2 ye $\vec{a}$ vektörünün bileşenleri denir.

Düzlemde her vektör başlangıç noktası orijinde olmak üzere konum (yer) vektörü ile gösterilebilir. Başlangıç noktası $A(a_1, a_2)$ ve Bitim noktası (b_1, b_2) olan yönlendirilmiş doğru parçası

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \text{ dir.}$$

$$\text{Uzunluğu } |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \text{ dir.}$$

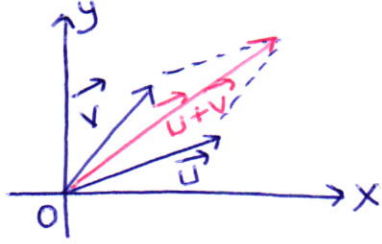
$$\text{"ör / } A = (1, 4) \quad B = (-3, 5)$$

$$\vec{AB} = (-3 - 1, 5 - 4) = (-4, 1)$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(-3-1)^2 + (5-4)^2} \\ &= \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

Uzunluğu sıfır olan tek vektör $\vec{0} = (0,0)$ ile gösterilen sıfır vektördür.

Vektörlerin Toplamı;



$$\vec{u} = (u_1, u_2) \text{ ve } \vec{v} = (v_1, v_2)$$

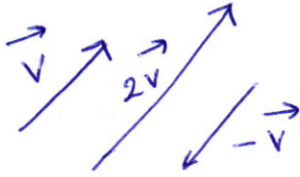
vektörlerinin $u+v$ toplamı

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

vektördür.

$\vec{v} = (v_1, v_2)$ ve c bir reel sayı ise

$c\vec{v}$ skaler çarpımı $c\vec{v} = (cv_1, cv_2)$ şeklinde bir vektördür



$\vec{v} = (v_1, v_2)$ vektörünün negatifi $-\vec{v} = (-1)\vec{v} = (-v_1, -v_2)$ dir.

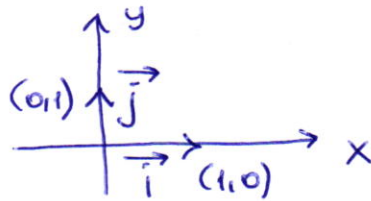
Vektörlerde çıkarma işlemi;

$$\vec{u} = (u_1, v_1) \text{ ve } \vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2) \text{ olarak}$$

tanımlanır.

Birim vektör



Uzunluğu 1 birim olan vektör birim vektördür

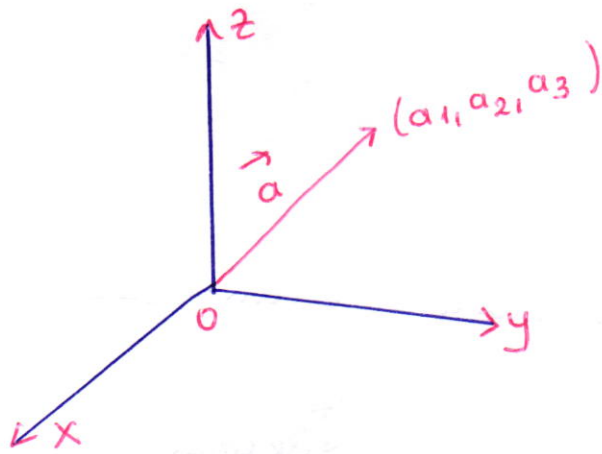
$$\vec{a} = (a_1, a_2) \quad \vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ vektörü } \vec{a} \text{ ile}$$

aynı yönlü bir birim vektördür.

$$|\vec{u}| = 1 \text{ dir.}$$

Uzayda vektörlerin incelenmesi, düzlemde vektörlerin incelenmesine benzer sekildedir. Aradaki fark, uzaydaki vektörlerin iki değil de üç bileşene sahip olmasıdır.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



uzayda verilen $P(x_1, y_1, z_1)$ ve $\theta(x_2, y_2, z_2)$ noktalarının $\vec{P\theta}$ yönlendirilmiş doğru parçası

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ konum vektörü ile temsil edilir.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ uzayda herhangi iki vektör ve c bir skaler sayı olsun.

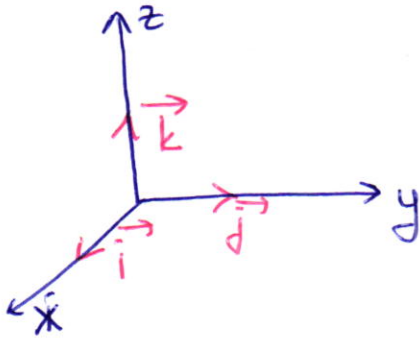
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3) \text{ olur.}$$

Uzayda herhangi bir vektörü

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

birim baz vektörleri cinsinden ifade edebiliriz.



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ uzay vektörü birim baz vektörleri cinsinden

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

$$\vec{a} = (3, -4, 2) \Rightarrow \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

İki vektörün skaler çarpımı.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{ve} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{sayıdır.}$$

ör/

$$\vec{a} = (3, 4, 12) \quad \vec{b} = (-4, 3, 0) \quad \text{ise}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-12 + 12 + 0) = 0 \quad \text{dır.}$$

Özellikleri:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

ve k skaler sayı olmak üzere

$$1) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$3) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$4) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$5) \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$$

Teoremi:

θ , $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \text{ olur.}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

ÖR / $\vec{a} = (2, 2, -1)$ ve $\vec{b} = (5, -3, 2)$ vektörleri arasındaki açı.

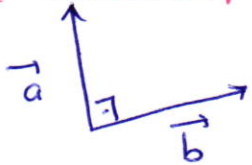
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \quad |\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (10 - 6 - 2) = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) = 84^\circ$$

Dik vektörler:

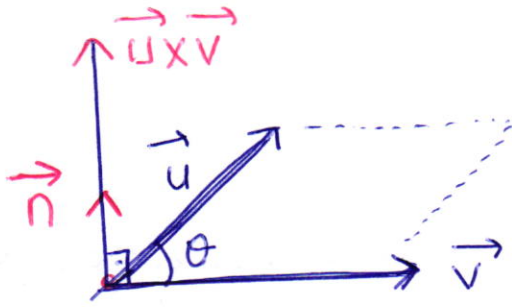


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Sıfırdan farklı $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün dik olması ($\theta = \pi/2$) için gerek ve yeter şart

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ olmasıdır.}$$

İki vektörün vektörel çarpımı:

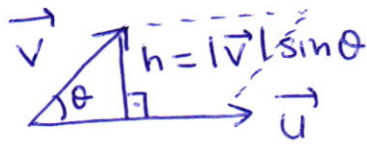


$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel değilse bir düzlem belirler. $\vec{u} \times \vec{v}$ vektörü bu düzleme ve dolayısıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine diktir.
 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{u}$, $\vec{c} \perp \vec{v}$ dir.

$\vec{n}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ye dik olan birim vektör olmak üzere
 $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \cdot \vec{n}$ dir.

$$* |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \theta$$

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanı $|\vec{u} \times \vec{v}|$ dir.



$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \text{Taban} \times \text{Yükseklik} \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \theta \end{aligned}$$

Vektör çarpımın determinant ile tanımı

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

$$\text{ise } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

ÖR/

87

Köşeleri $A(3,0,-10)$ $B(4,2,5)$ ve $C(7,-2,4)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

$$\vec{AB} = (1, 2, 6) \quad \text{ve} \quad \vec{AC} = (4, -2, 5) \text{ olup}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 22\vec{i} + 19\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{22^2 + 19^2 + (-10)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{945}$$

Vektörel Çarpımın Özellikleri

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörler ve k bir reel sayı

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$2) (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$3) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$4) \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{array}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ büyüklüğüne $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörlerinin karma çarpımı denir.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ise vektörler aynı düzlemindedir.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ ile oluşturulan paralel yüzünün hacmi $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ karma çarpımının mutlak değeridir. Yani $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ dir.

ÖR / $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, 1)$, $C(3, 2, 0)$ ve $D(5, 4, -2)$ noktalarının aynı düzlemde olduğunu gösteriniz.

$$\vec{AB} = (1, 1, -1)$$

$$\vec{AC} = (2, 3, -2)$$

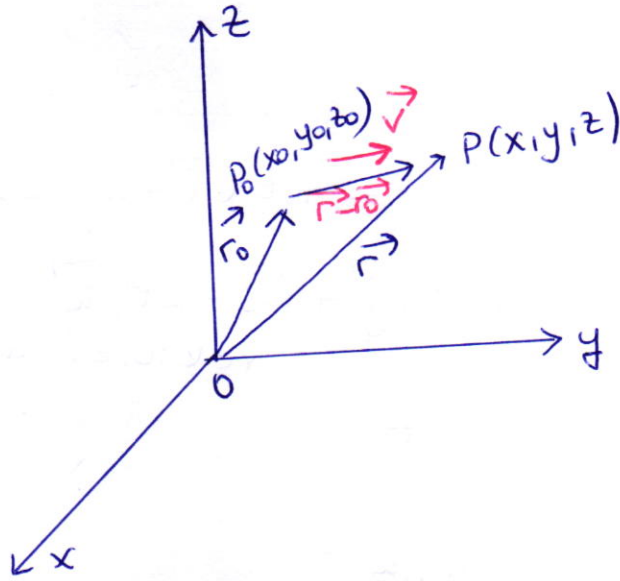
$$\vec{AD} = (4, 5, -4)$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 2 = 0$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{V}=(a,b,c)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel denklemi;



Bir doğru denk yazmak için bir noktaya ve doğruya paralel vektöre ihtiyaç vardır.

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} &= t\vec{V} \\ \vec{r} - \vec{r_0} &= t\vec{V} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r_0} + t\vec{V} \end{aligned} \right.$$

P_0 dan geçen ve $\vec{V}$ ye paralel olan doğrunun vektörel denklemi

Bu eşitliği açarak;

ifade edersek doğrunun parametrik denklemi

$$\begin{aligned} (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} &= t(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \\ &= ta\vec{i} + tb\vec{j} + tc\vec{k} \end{aligned}$$

$$x-x_0 = ta \Rightarrow x = x_0 + ta$$

$$y-y_0 = tb \Rightarrow y = y_0 + tb$$

$$z-z_0 = tc \Rightarrow z = z_0 + tc$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t \text{ elde edilir.}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan geçen $\vec{V}=(a,b,c)$ ye paralel olan doğrunun parametrik denklemi

$\vec{V}$ vektörüne doğrunun doğrultu vektörü veya yön vektörü denir.
t parametresi $(-\infty, \infty)$ değerler alır

ÖR/ $(5, 1, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ 90 vektörüne paralel olan doğrunun vektörel ve parametrik denklemini bulunuz.

$$\vec{r}_0 = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \quad \vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} + t(\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})$$

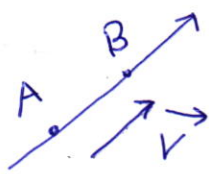
$$\vec{r} = (5+t)\vec{i} + (1+4t)\vec{j} + (3-2t)\vec{k}$$

vektörel denk.

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-2} = t$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5+t \\ y = 1+4t \\ z = 3-2t \end{array} \right\} \text{parametrik denk}$$

ÖR/ $A(-3, 2, -3)$, $B(1, 0, 2)$ dan geçen doğrunun parametrik denk bulunuz.



$$\vec{v} = \vec{AB} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{AB} = \langle 4, -2, 5 \rangle$$

$$x = x_0 + at = -3 + 4t$$

$$y = y_0 + bt = 2 - 2t$$

$$z = z_0 + ct = -3 + 5t$$

İki noktayı birleştiren doğru parçasını parametrize etmek:

Önce bu noktalardan geçen doğru parametrize edilir.

Uç noktalar için t değerleri bulunur ve t bu değerlerle sınırlı kapalı bir aralıkta kısıtlanır.

ÖR/ A (-3, 2, -3) B (1, 0, 2) yi birleştiren doğru

parçası?

$$x = -3 + 4t$$

$$y = 2 - 2t$$

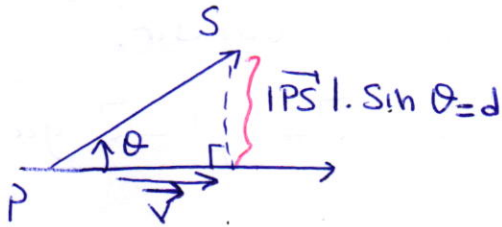
$$z = -3 + 5t$$

$$\underline{0 \leq t \leq 1}$$

$$\begin{aligned} A(-3, 2, -3) \text{ için } \left. \begin{aligned} -3 &= -3 + 4t \\ 2 &= 2 - 2t \\ -3 &= -3 + 5t \end{aligned} \right\} t=0 \end{aligned}$$

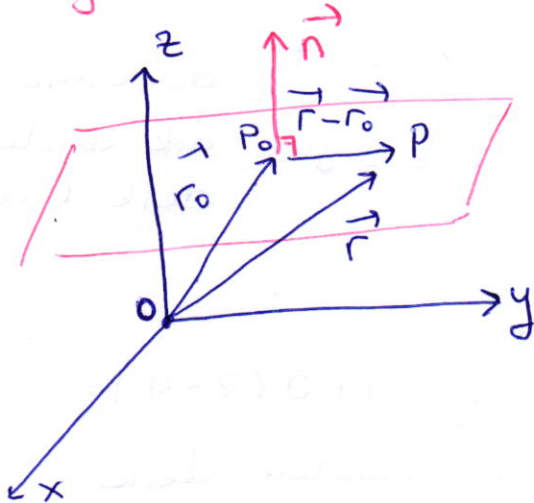
$$\begin{aligned} B(1, 0, 2) \text{ için } \left. \begin{aligned} 1 &= -3 + 4t \\ 0 &= 2 - 2t \\ 2 &= -3 + 5t \end{aligned} \right\} t=1 \end{aligned}$$

Uzaydaki bir noktanın doğruya uzaklığı



$$|\vec{PS} \times \vec{v}| = |\vec{PS}| \cdot |\vec{v}| \sin \theta \text{ idi.}$$

Uzayda Düzlemler:



Bir S noktasının P den geçen $\vec{v}$ ye paralel olan doğruya uzaklığı

$$d = \frac{|\vec{PS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} \text{ dir.}$$

$\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının yer vektörü ve $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun.

Bu durumda P_0 den geçen ve $\vec{n}$ ye dik tek düzlem vardır.

Eğer $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ düzlem 'üzerindeki' başka bir P noktasının yer vektörü ise o zaman P_0P vektörü ile $\vec{n}$ vektörü birbirine dik olur.

$$P_0P = \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

P_0 dan geçen $\vec{n}$ ye dik düzlemin vektörel denklemi

$\vec{n}$ ye düzlemin normali derin

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

P_0 dan geçen $\vec{n}$ 'ye dik olan düzlemin denklemi

$$Ax + By + Cz = \underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0}_D$$

$$\boxed{Ax + By + Cz = D}$$

Bir düzlem denklemini yazmak için bir nokta ve düzleme dik vektöre ihtiyaç vardır.

ÖR/ $P_0(-3, 0, 7)$ den geçen $\vec{n} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ya dik düzlem denk buluz.

$$5(x - (-3)) + 2(y - 0) - 1(z - 7) = 0$$

$$5x + 2y - z = -22 \text{ düzlem denk}$$

ÖR/ $A(2, 1, 4)$ den geçen d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$ doğrusuna dik düzlemin denk bul?

$$\vec{v} = \vec{n} \quad \vec{n} = \langle A, B, C \rangle$$

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 3 \end{aligned} \quad A(2, 1, 4)$$

$$1(x - 2) + 2(y - 1) + 0(z - 4) = 0$$

$$x + 2y = 4 \text{ düzlem denk}$$

ÖR/ (2,0,1) den geçen ve X(1,1,0) ve Y(4,-1,-2) noktalarından geçen doğruya dik düzlen denklemini bulunuz? 93

$$\overrightarrow{XY} = \vec{n} = \langle \overset{A}{3}, \overset{B}{-2}, \overset{C}{-2} \rangle$$

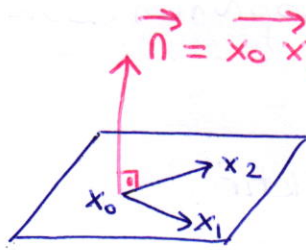
$$(2,0,1)$$

$$(x_0, y_0, z_0)$$

$$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0$$

$$3x - 2y - 2z = 4 \quad \text{Düzlem denklemini}$$

3 nokta ile belirlenmiş Düzlemin Denklemi:



Aynı düzlem üzerinde olmayan x_0, x_1, x_2 noktalarından geçen düzlem denkleminin normali

$$\vec{n} = \overrightarrow{x_0x_1} \times \overrightarrow{x_0x_2} \text{ dir.}$$

ÖR/ A(0,0,1) B(2,0,0) C(0,3,0) dan geçen düzlemin denklemini bulunuz?

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2, 0, -1 \rangle \quad \overrightarrow{AC} = \langle 0, 3, -1 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = \vec{n}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
A B C

$$3(x-0) + 2(y-0) + 6(z-1) = 0$$

$$3x + 2y + 6z = 6 \quad \text{Düzlem denklemini}$$

ÖR/ Öyle bir düzlem denklemini bulunuz ki hem X=(2,1,4) noktasından geçsin ve hem de

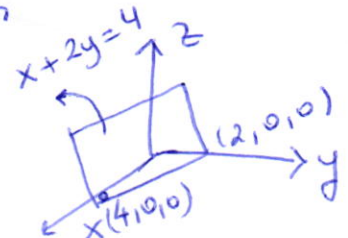
di: $x=2+t, y=1+2t, z=3$ doğrusuna dik olsun.

Düzlem verilen doğruya dik olduğundan

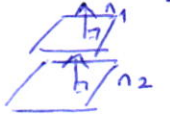
$$\vec{n} = (1, 2, 0)$$

$$1(x-2) + 2(y-1) + 0 \cdot (z-4) = 0$$

$$x + 2y = 4 \quad \text{istenilen düzlem denklemini}$$



1) Normal vektörleri paralel olan iki düzlem paraleldir. İlk düzlem paralel değilse kesişiyordur.



2) $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ ise iki düzlem diktir.



$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \text{ dir. (Düzlemler arası açı)}$$



3) Bir düzlemin normali $\vec{n}$, bir doğrunun doğrultmanı $\vec{v}$ olsun.

a) $\vec{n} \parallel \vec{v}$ ise doğru ile düzlem diktir.

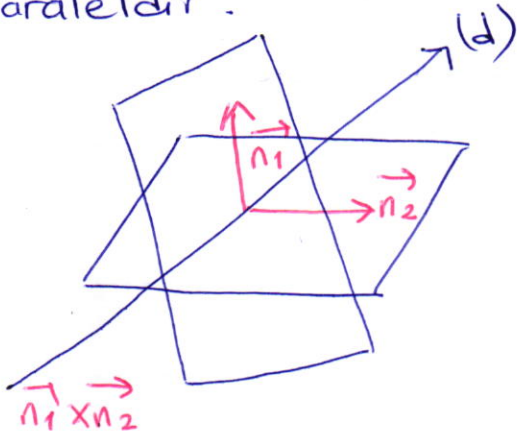
b) $\vec{n} \perp \vec{v}$ " " " " paraleldir.

ÖR/ $x - 2y + 5z = 1$ düzlemi ile $\vec{r}(t) = \langle 2-t, 1+2t, -1+t \rangle$ doğrusu paralel midir?

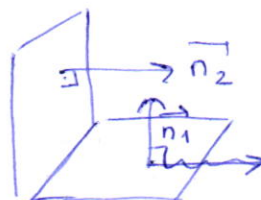
$$\vec{n} = (1, -2, 5) \quad \vec{v} = (-1, 2, 1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = -1 - 4 + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v} \quad \text{Doğru ile düzlem paraleldir}$$

Kesişim Doğruları: İki düzlemin kesişim doğrusu düzlemlerin normal vektörleri $\vec{n}_1$ ve $\vec{n}_2$ nin ikisine de diktir. Dolayısıyla arakesit doğrusu (kesişimi) $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ye paraleldir.



Doğrunun doğrultmanı $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ dir.



ÖR/ $3x - 2y + z = 2$ ve $x - y + 3z = 8$ ile verilen düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz? 95

$$D_1 : 3x - 2y + z = 2 \quad \vec{n}_1 = \langle 3, -2, 1 \rangle$$

$$D_2 : x - y + 3z = 8 \quad \vec{n}_2 = \langle 1, -1, 3 \rangle$$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \langle -5, -8, 1 \rangle$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x - y + 3z = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=1 \\ \text{icm} \end{matrix} \quad \begin{matrix} y=2 \\ z=3 \end{matrix}$$

Arakesit noktası
 $A(1, 2, 3)$

$$\begin{cases} -2y + z = -1 \\ -y + 3z = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} y=2 \\ z=3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 - 8t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{istenen doğru denklemi}$$

ÖR/ $x - y = 3$, $x + y + z = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel vektör? Arakesit doğrusu?

$$\vec{n}_1 = \langle 1, -1, 0 \rangle \quad \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} z=0 \text{ için} \\ x = 3/2 \quad y = -3/2 \end{matrix}$$

$A(3/2, -3/2, 0)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} - t \\ y &= -\frac{3}{2} - t \\ z &= 0 + 2t \end{aligned}$$

^uÖR/ $x = \frac{8}{3} + 2t$, $y = -2t$, $z = 1+t$ doğrusunun 96

$3x + 2y + 6z = 6$ düzlemi ile kesiştiği nokta?

$$3\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1+t) = 6$$

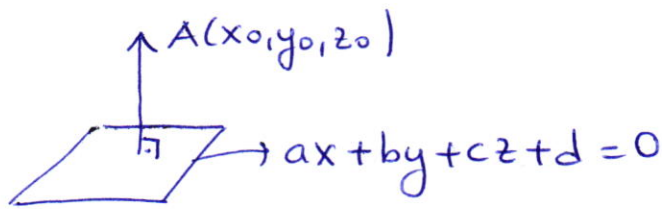
$$8 + 6t - 4t + 6 + 6t = 6$$

$$8t + 14 = 6$$

$$8t = -8 \quad t = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \\ y = 2 \\ z = 0 \end{array} \right\} \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right) \text{ kesişme noktası}$$

Bir noktanın bir düzleme uzaklığı



A noktasının düzleme
olan dik uzaklığı
(en kısa uzunluk)

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ÖR/ $(1, -2, 4)$ noktasının $13x - 6y - 5z + 3 = 0$
düzlemine olan uzaklığı

$$d = \frac{|13 \cdot 1 - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{(13)^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0,53$$

ÖR/

$A(1,1,0)$ ve $B(-1,3,1)$ den geçen doğrunun parametrik denklemini bulunuz?

$$\vec{AB} = (-2, 2, 1) = \vec{v}$$

$$A(1,1,0)$$

$$x = 1 - 2t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = t$$

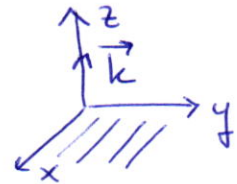
doğrunun denklemini

ÖR/

$A(1,1,-2)$ den geçen ve xy -düzlemine dik olan doğru denklemini bulunuz?

Doğru xy düzlemine dik ise

$$\vec{v} = \vec{k} \text{ dir. } \vec{k} = (0,0,1)$$



$$A(1,1,-2)$$

$$x = 1 + 0 \cdot t \quad y = 1 + 0 \cdot t \quad z = -2 + 1 \cdot t$$

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = -2 + t$$

ÖR/

$A(1,2,3)$ den geçen ve $x+y+z=1$ düzlemine paralel olan düzlem denklemini bulunuz?

$$x+y+z=1 \quad \vec{n} = (1,1,1)$$

aranan düzlemdeki dik dolayısıyla düzlemin normali olarak alınır.

$$A(1,2,3) \quad \vec{n} = (1,1,1)$$

$$1(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0$$

$$x + y + z = 6$$

ÖR / $x=1-t$, $y=3t$, $z=1+t$ doğrusu ile $2x-y+3z=6$ düzleminin kesişim noktasını bulunuz.

$$\begin{aligned} 2(1-t) - 3t + 3(1+t) &= 6 \\ 2 - 2t - 3t + 3 + 3t &= 6 \\ -2t &= 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \\ z &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

ÖR / $A(1,4,2)$ ve $B(1,5,3)$ den geçen doğru ile $A_1(3,1,5)$ ve $B_1(4,0,7)$ noktalarından geçen doğru hangi noktada kesişirler?

$$\overrightarrow{AB} = (0,1,1) = \vec{v}_1$$

$A(1,4,2)$

$$\begin{aligned} L_1 : \quad x &= 1+0 \cdot t & y &= 4+1 \cdot t & z &= 2+1 \cdot t \\ L_1 : \quad x &= 1 & y &= 4+t & z &= 2+t \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = (1, -1, 2)$$

$A_1(3,1,5)$

$$\begin{aligned} L_2 : \quad x &= 3+1 \cdot s & y &= 1-1 \cdot s & z &= 5+2 \cdot s \\ L_2 : \quad x &= 3+s & y &= 1-s & z &= 5+2s \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= 3+s \\ 4+t &= 1-s \\ 2+t &= 5+2s \end{aligned} \right\} \begin{aligned} s &= -2 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 & y &= 3 & z &= 1 \\ & & & (1, 3, 1) \end{aligned}$$

ÖR / P (1,1,0) ve Q (4,-1,-2) noktalarından geçen 99

doğruya dik olan ve (2,0,1) den geçen
düzlem denklemini bulunuz.

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 3, -2, -2 \rangle = \vec{n} \quad \text{düzlemin normali}$$

$$(2,0,1) = (x_0, y_0, z_0)$$

Düzlem denklemini

$$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0$$

$$3x - 2y - 2z = 4$$

ÖR / P (1,6,-4) noktasından geçen ve

$x = 1+2t$, $y = 2-3t$, $z = 3-t$ doğrusunu içeren
düzlemin denklemini bulunuz.

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 3-t \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} A(1,2,3) \text{ doğru üzerinde bir nokta} \\ \vec{v} = (2, -3, -1) \text{ doğrunun doğrultması} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{PA} = (0, -4, 7) \quad \text{ve} \quad \vec{v} = (2, -3, -1) \quad \text{düzlem}$$

üzerindedir.

$\overrightarrow{PA}$ ve $\vec{v}$ nin vektörel çarpımı
bunların belirttiği düzleme dik
doğrudur. Dolayısıyla düzlemin normalidir.

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 25\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}$$

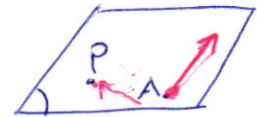
düzlemin normali

P (1,6,-4) düzlem üzerindeki nokta

$$25(x-1) + 14(y-6) + 8(z+4) = 0$$

$$25x + 14y + 8z = 77$$

Düzlem denklemini



ÖR / $(0,0,2)$ noktasının $x=2t$, $y=-2t$, $z=2t$ doğrusuna uzaklığını bulunuz? 100

$$\begin{cases} x=2t \\ y=-2t \\ z=2t \end{cases} \quad \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{v} = (2, -2, 2) \end{cases} \quad \begin{cases} S = (0,0,2) \\ \vec{PS} = (0,0,2) \end{cases}$$

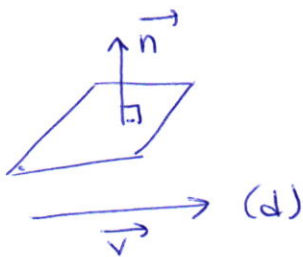
$$d = \frac{|\vec{PS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{4^2 + 4^2}}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{12}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \vec{PS} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4\vec{i} + 4\vec{j} \end{aligned}$$

ÖR / $x-2y+5z=1$ düzleninin $x=2-t$, $y=1+2t$, $z=t-1$ doğrusuna paralel olup olmadığını araştırınız.

$$x-2y+5z=1 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 5)$$

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=t-1 \end{cases} \quad \begin{cases} A(2,1,-1) \text{ doğru üzerindeki nokta} \\ \vec{v} = (-1, 2, 1) \text{ doğrultmanı} \end{cases}$$



$$\vec{n} \cdot \vec{v} = -1 - 4 + 5 = 0$$

olduğundan düzlem
doğruya paraleldir.

ÖR / $x+2y+3z=5$ düzleninin $x-2y+z=3$ düzlenine dik olup olmadığını araştırınız.

$$\begin{aligned} x+2y+3z=5 & \quad \vec{n}_1 = (1, 2, 3) \\ x-2y+z=3 & \quad \vec{n}_2 = (1, -2, 1) \end{aligned}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - 4 + 3 = 0$$

olduğundan verilen düzlemler diktir.

Vektör fonksiyonları ve uzay eğrileri:

Vektör değerli fonksiyon, ya da vektör fonksiyonunda basitçe tanım kümesi bir gerçel sayılar kümesi, görüntü kümesi ise bir vektör kümesi olan bir fonksiyondur.

Biz en çok görüntü kümesi üç boyutlu vektörler olan r vektör fonksiyonlarıyla ilgileneceğiz.

r nin tanım kümesindeki her t için $r(t)$ vektör fonksiyonunun bileşenlerini

$f(t)$, $g(t)$ ve $h(t)$ ile gösterirsek f , g ve h , r nin bileşen fonksiyonları denilen gerçel değerli fonksiyonlardır ve

$$r(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

yazılabilir.

ÖR/ $r(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$ ise bileşen fonksiyonları

$$f(t) = t^3, \quad g(t) = \ln(3-t), \quad h(t) = \sqrt{t} \text{ dir.}$$

En geniş tanım kümesini bulmak için ise bileşen fonksiyonların en geniş tanım kümeleri kesişimini bulmak gerekir.

$f(t) = t^3$ bütün reel sayılarda tanımlıdır.

$g(t) = \ln(3-t)$ $3-t > 0 \Rightarrow t < 3$ için tanımlıdır.

$h(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$ için tanımlıdır.

$r(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t}) \rightarrow 0 \leq t < 3$ için tanımlı olur.

r vektör fonksiyonun limiti

$r(t) = (f(t), g(t), h(t))$ vektör fonksiyonunda, bileşen fonksiyonların limitleri varsa,

$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} f(t), \lim_{t \rightarrow 0} g(t), \lim_{t \rightarrow 0} h(t) \right)$ olur.

ÖR/ $r(t) = (1+t^3)\vec{i} + (te^{-t})\vec{j} + \left(\frac{\sin t}{t}\right)\vec{k}$ ise

$\lim_{t \rightarrow 0} r(t)$ limitini bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} r(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t^3) \right] \vec{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} (te^{-t}) \right] \vec{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right] \vec{k} \\ &= \vec{i} + \vec{k} \end{aligned}$$

Süreklilik

$\lim_{t \rightarrow a} r(t) = r(a)$ ise, r vektör fonksiyonuna

a noktasında sürekli.

r fonksiyonu ancak ve ancak f, g ve h bileşen fonksiyonları a da sürekli olduğunda sürekli olacaktır, limit tanımından görürüz.

Sürekli vektör fonksiyonları ile uzay eğrileri arasında yakın bir ilişki vardır.

f, g ve h fonksiyonları I aralığında gerçel sayı değerli sürekli fonksiyonlar olsun.

Bu durumda t değişkeni I aralığındaki değerleri alarak değiştikçe

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t)$$

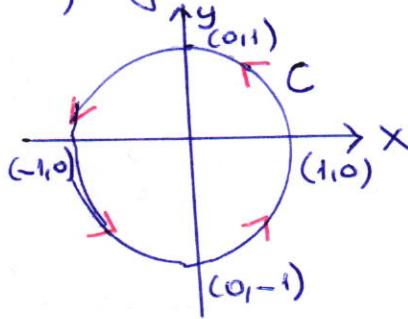
olmak üzere, uzaydaki (x, y, z) noktalarının C kümesine uzay eğrisi denir.

Üstteki denklemlere C nin parametrik denklemleri t ye de parametre denir.

ÖR/ $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$ vektör fonksiyonu

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ eğrisini}$$

çizer.



$$t=0 \quad r(0) = \vec{i} \quad A(1,0)$$

$$t=\pi/2 \quad r(\pi/2) = \vec{j} \quad B(0,1)$$

$$t=\pi \quad r(\pi) = -\vec{i} \quad C(-1,0)$$

$$t=3\pi/2 \quad r(3\pi/2) = -\vec{j} \quad D(0,-1)$$

ÖR/

$$\vec{r}(t) = (1+t)\vec{i} + (2+5t)\vec{j} + (-1+6t)\vec{k}$$

104

vektör fonksiyonunun tanımladığı eğriyi bulalım.

$$x = 1+t \quad y = 2+5t \quad z = -1+6t$$

$(1, 2, -1)$ noktasından geçen ve $(1, 5, 6)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemidir.

Vektör fonksiyonun Türevi

r vektör fonksiyonunun r' türevi gerçel fonksiyonlardaki gibi limit varsa

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

olarak tanımlanır.

Teorem; f, g ve h türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

ÖR/ $\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + (te^{-t})\vec{j} + (\sin 2t)\vec{k}$ eğrisi için $r'(t)$ yi bulunuz ve $r'(0) = ?$

$$\vec{r}'(t) = 3t^2\vec{i} + (e^{-t} - te^{-t})\vec{j} + (2\cos 2t)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(0) = 3 \cdot 0^2\vec{i} + (e^{-0} - 0 \cdot e^{-0})\vec{j} + (2\cos 2 \cdot 0)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(0) = \vec{j} + 2\vec{k}$$

Türev kuralları:

Teorem; $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ türevlenebilir vektör fonksiyonları
 c bir skaler ve f bir gerçel değerli
fonksiyon olmak üzere;

$$1) \frac{d}{dt} [u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t)$$

$$2) \frac{d}{dt} [c \cdot u(t)] = c \cdot u'(t)$$

$$3) \frac{d}{dt} [f(t) \cdot u(t)] = f'(t) u(t) + f(t) u'(t)$$

$$4) \frac{d}{dt} [u(t) \cdot v(t)] = u'(t) v(t) + u(t) v'(t)$$

Eğer $\vec{r}$ uzayda düzgün bir eğri boyunca
hareket eden bir parçacığın konum vektörü

ise

$$* \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{parçacığın hız vektörüdür. ve eğriye teğettir}$$

$$* |\vec{v}(t)| \quad \text{parçacığın hızıdır}$$

$$* \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{ivme vektörüdür.}$$

$$* \vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{teğet birim vektördür.}$$

$$* \text{Eğer } \vec{r} \text{ sabit uzunluklu } |\vec{r}(t)| = c \text{ (sabit)} \\ \text{vektörel fonksiyon ise } \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \text{ dir.}$$

$$|\vec{r}|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad \text{oldan}$$

$$|\vec{r}(t)| = c$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = c^2$$

$$\vec{r}' \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r}' = 0 \Rightarrow$$

$$2\vec{r} \cdot \vec{r}' = 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{r}' = 0 \\ \text{dir.}$$

ÖR / $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ konum vektörü ile verilen cismin $t=1$ deki hız ve ivme vektörünü bulunuz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=1} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{t=1} = 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

Yay uzunluğu

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad a \leq t \leq b$$

eğrisinin uzunluğu

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \text{ dir.}$$

ÖR / $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t\vec{k}$
eğrisinin $t=0$ dan $t=2\pi$ ye kadar uzunluğunu bulunuz?

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi \sqrt{2} \text{ br}$$

^uÖR/ $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (\sqrt{e^{2t}-1} + \arcsin(e^{-t}))\vec{j} + \vec{k}$ 107

denklemi ile verilen eğrinin $0 \leq t \leq \ln 2$ aralığında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$S = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1^2 + \left(\frac{2e^{2t}}{2\sqrt{e^{2t}-1}} + \frac{-e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right)^2 + 0^2} dt$$

$$S = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + e^{2t} - 1 + 0} dt$$

$$S = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2t}} dt = \int_0^{\ln 2} e^t dt = e^t \Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1 \text{ br}$$

*

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}} + \frac{-e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right) &= \left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}} + \frac{-e^{-t}}{\sqrt{1-\frac{1}{e^{2t}}}}} \right) \\ &= \left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}} + \frac{-e^{-t}}{\sqrt{\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}}}}} \right) \\ &= \left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}} + \frac{-e^{-t} \cdot e^t}{\sqrt{e^{2t}-1}} \right) \\ &= \frac{e^{2t} - 1}{\sqrt{e^{2t}-1}} = \sqrt{e^{2t}-1} \end{aligned}$$

OR / $y = x^2$ düzlem eğrisi boyunca sağa

108

döğru $x=5$ sabit hızıyla hareket eden
objenin $(1,1)$ noktasındaki hız vektörünü
bulunuz.

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

$$x = x$$

$$\vec{r}(t) = x \vec{i} + x^2 \vec{j}$$

$$y = x^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + 2x \frac{dx}{dt} \vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 4x^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + 4x^2)} = 5$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + 4x^2) = 25$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\vec{v} = \frac{5}{\sqrt{1+4x^2}} \vec{i} + 2x \cdot \frac{5}{\sqrt{1+4x^2}} \vec{j}$$

$$\vec{v}|_{(1,1)} = \sqrt{5} \vec{i} + 2\sqrt{5} \vec{j}$$