Fonksiyonlar

A ve B gibi boş olmayan iki küme verildiğinde A kümesinin her elemanı B nin bir tek elemanına eşleyen bir f kuralına A dan B ye bir fonksiyon denir. $f: A \to B$ ile gösterilir.

$x \in A$ bir f kuralıyla $y \in B$ ye eşlenmiş ise bu ilişki $y = f(x)$ şeklinde gösterilir.

x'e bağımsız değişken, y ye bağımlı değişken denir.

$A = D(f)$ kümesine f in tanım kümesi denir.

Fonksiyonun tanım kümesi;

Bağımsız değişkenin belirli bir reel değerine karşılık, bir f fonksiyonu vasıtasıyla belirli bir reel değer bulunabiliyorsa, bağımsız değişkenin o değeri için f fonksiyonu tanımlıdır denir.

Herhangi bir f fonksiyonu tanım kümesi belirtilmeden tanımlanmışsa, bu fonksiyonun tanım kümesi olarak, fonksiyonu reel bir sayıya karşılık getirdiği tüm reel sayıların kümesini alacağız.

Fonksiyon	Tanım kümesi
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$x \geq 0$, $[0, \infty)$

$y = \sqrt{4-x}$ $\quad 4-x \geq 0 \quad -x \geq -4$

$x \leq 4 \quad (-\infty, 4]$

$y = \sqrt{1-x^2}$ $\quad 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -1$

$x^2 \leq 1$

$\sqrt{x^2} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$\forall x \in [-1, 1]$

$y = f(x)$ polinom ise $\forall x \in R$ için $f(x) \in R$ dir.

Yani polinom fonksiyonların kümesi $D(f) = \mathbb{R}$ dir.

ÖR/ $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ise $D(f) = \mathbb{R}$ dir.

$\frac{P(x)}{\theta(x)} = f(x)$ şeklindeki rasyonel fonksiyonların tanım kümesi $D(f) = \{x \in R \mid \theta(x) \neq 0\}$ dir.

ÖR/ $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$ fonk tanım kümesini bulunuz.

$3x - 1 = 0 \quad 3x = 1 \quad x = \frac{1}{2}$ için $\frac{2x+1}{3x-1}$ tanımsızdır.

$D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ tir.

ÖR/ $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ $\quad D(f) = ?$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$ dir. $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ dir.

$n \in N^+$ olmak üzere $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x) \geq 0$ koşulunu gerçekleyen $\forall x \in R$ için tanımlıdır.

ÖR/ $f(x)=\sqrt{2x^2-x}$ $\quad D(f)=?$

$2x^2-x \geq 0$ için tanımlıdır.

$2x^2-x=0 \quad x(2x-1)=0 \quad x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0		$1/2$		∞
	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	
	çözüm				çözüm	

$D(f)=(-\infty,0]\cup[1/2,\infty)$ dur.

ÖR/ $f(x)=\ln(x-2)$ $\quad D(f)=?$

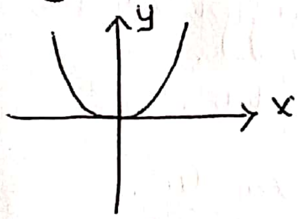
$x-2>0 \Rightarrow x>2$ için tanımlıdır.

$D(f)=(2,\infty)$

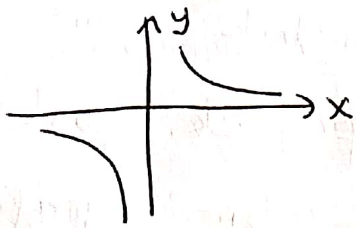
Bir fonksiyonun grafiği

Bir f fonksiyonunun grafiği $y=f(x)$ denklemini sağlayan noktaların kartezyen düzlemdeki yerlerinin gösterilmesiyle oluşan grafiktir.

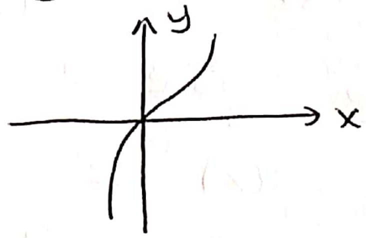
$y=x^2$



$y=1/x$



$y=x^3$



Fonksiyonlarla ilgili bazı kavramlar:

Artan- azalan fonksiyonlar:

$f(x)$ fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun. $\forall\ x_1, x_2 \in I$ için

a) $x_1<x_2$ iken $f(x_1)<f(x_2)$ ise f, I aralığında artandır.

b) $x_1<x_2$ iken $f(x_1)>f(x_2)$ ise f, I aralığında azalandır.

ÖR / $f(x) = 2-3x$ fonk artan, azalan olduğuna bakalım.

$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow 2-3x_1 > 2-3x_2$

$3x_1 < 3x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

olduğundan $f(x) = 2-3x$ fonksiyonu azalandır.

ÖR / $f(x) = \frac{1}{x}$ fonk artan, azalan olduğuna bakalım

$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

f fonk azalan

ÖR / $f(x) = e^x$ artan mı? azalan mı?

$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ olacağına göre $f(x_1) < f(x_2)$

dır $f(x) = e^x$ fonksiyonu artandır.

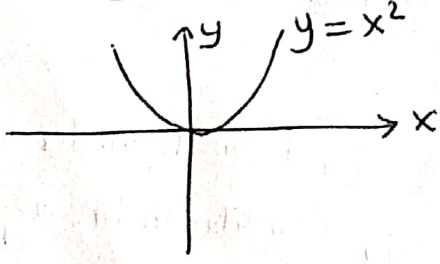
Tek - çift fonksiyonlar:

$y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her x için

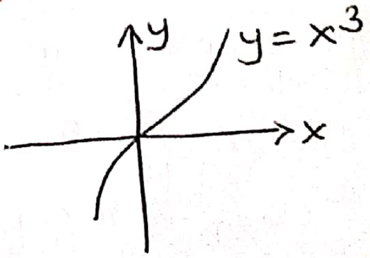
* $f(-x) = f(x)$ ise f çift fonksiyondur. ve y eksenine göre simetrik bir grafiği vardır.

* $f(-x) = -f(x)$ ise f tek fonksiyondur. ve orjine göre simetrik bir grafiği vardır.

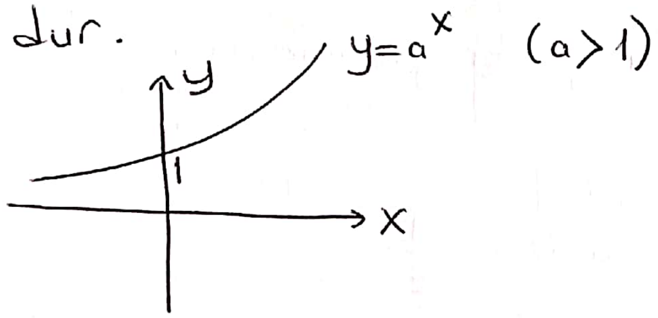
ÖR / $y = x^2$ çift fonk

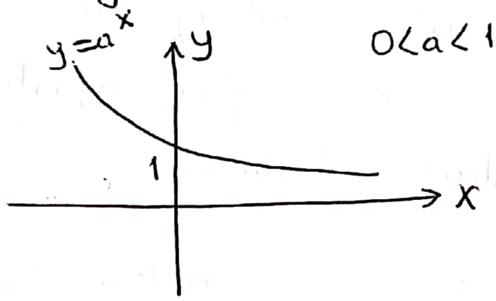


ÖR / $y = x^3$ tek fonk

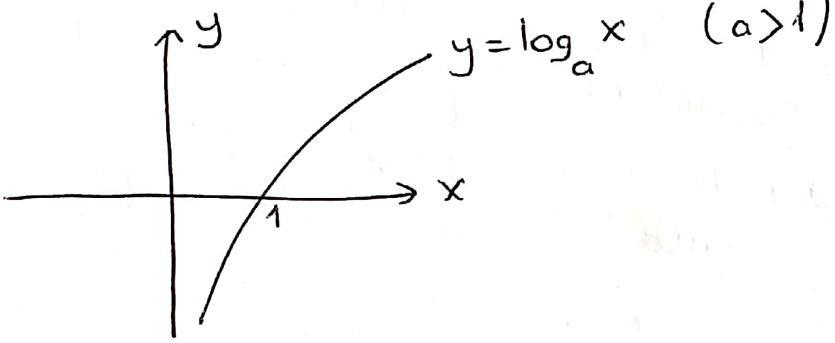


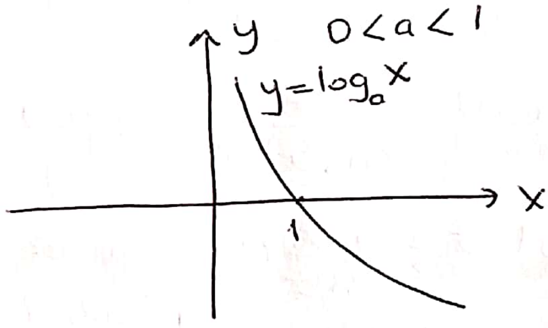
Üstel fonksiyonlar: $a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y=f(x)=a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonksiyon denir. Bütün üstel fonksiyonların tanım kümesi $(-\infty, \infty)$, görüntü kümeside $(0,\infty)$ dur.





Logaritmik fonksiyon: $a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f(x)=\log_a x$ fonksiyonuna logaritmik fonksiyon denir. $x>0$ için tanımlıdır.

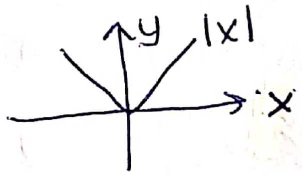




Bileşke Fonksiyon: f ve g fonksiyonları için, bileşke fonksiyon $f \circ g(x) = f(g(x))$ şeklinde tanımlanır.

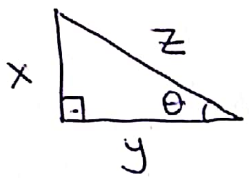
Parçalı Fonksiyon: Bazen bir fonksiyonu, tanım kümesinin farklı parçaları üzerinde farklı formüller kullanarak tanımlamak gerekir. Böyle fonksiyonlara parçalı fonksiyon denir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$



Periyodik Fonksiyonlar: Her x değeri için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde bir p pozitif sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonk denir.

Trigonometrik Fonksiyonlar: $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ fonksiyonlarına trigonometrik fonksiyonlar denir.



$$\sin\theta = \frac{x}{z} \qquad \cos\theta = \frac{y}{z}$$

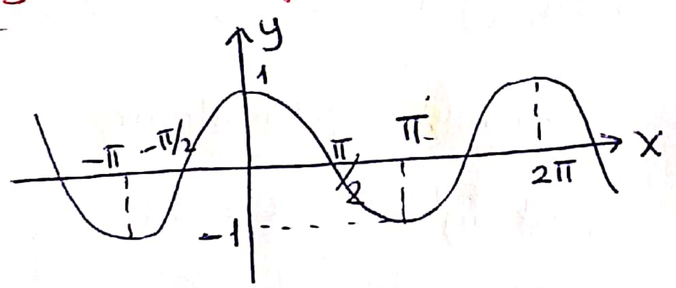
$$\tan\theta = \frac{x}{y} \qquad \cot\theta = \frac{y}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{z}{y} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{z}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

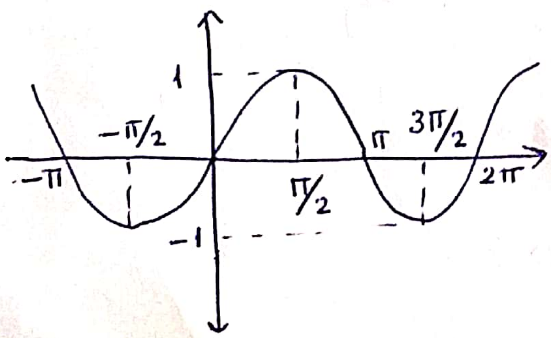
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$y = \cos x$ fonksiyonu;



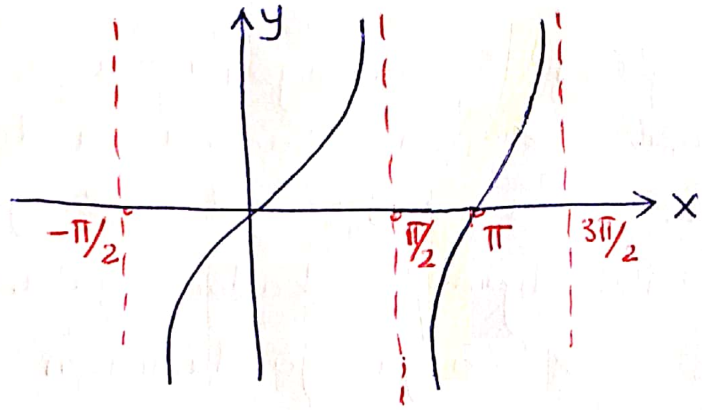
1) Çift fonksiyondur
2) Tanım kümesi $-\infty < x < \infty$
3) Görüntü 〃 $-1 \le y \le 1$
4) Periyodu 2π

$y = \sin x$ fonksiyonu



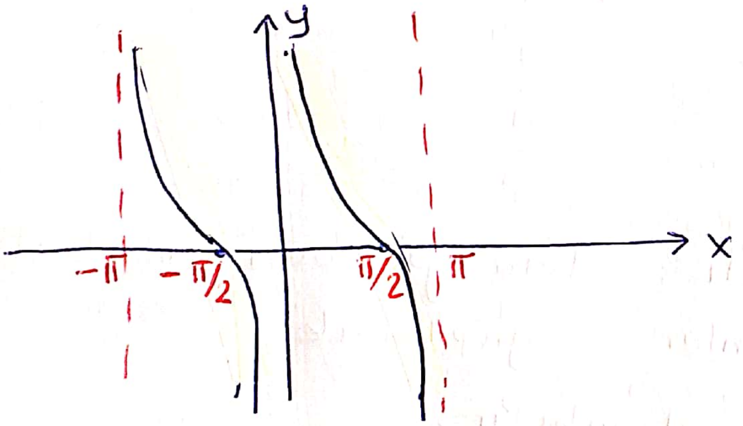
1) Tek fonksiyondur
2) Tanım kümesi $-\infty < x < \infty$
3) Görüntü 〃 $-1 \le y \le 1$
4) Periyodu 2π

$y = \tan x$ fonksiyonu;



1) Tek fonksiyondur.
2) Tanım kümesi
   $x \neq \pm \pi/2 \, , \mp 3\pi/2 \ldots$
3) Görüntü kümesi
   $-\infty < y < \infty$
4) Periyodu π

$y = \cot x$ fonksiyonu;



1) Tek fonksiyondur
2) Tanım kümesi
   $x \neq 0, \ x = \mp\pi, \ x \neq \mp 2\pi \ldots$
3) Görüntü kümesi
   $-\infty < y < \infty$

Bazı trigonometrik özellikler;

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Limit

Fonksiyonların limiti; $f(x)$ fonksiyonu a noktası yakınındaki her x için tanımlı (a da tanımlı olmayabilir) olsun. x'i $a$ya yeterince yakın alarak $f(x)$ in Lye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x' $a$ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu Lye yaklaşır denir. Bunu

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

şeklinde gösteririz.

$$\lim_{x\to 1} x^2+3x+5 = 9$$

$f(x)$ in $x=a$ da tanımlı olmadığı bazı durumlarda uygun cebirsel işlemler yapılarak $\lim_{x\to a} f(x)$ limiti hesaplanabilir.

ÖR/ $$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{(x^2+5x+6} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x+3} = 3$$

ÖR/ $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{(\cancel{\sqrt{x}-2})(\sqrt{x}+2)(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+4)}$$

$$= \frac{1}{32}$$

ÖR/ $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{2x^2-1}+1}{\sqrt{2x^2-1}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-1-1}{(x-1)\sqrt{2x^2-1}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\sqrt{2x^2-1}+1}$$

$$= 2$$

Limit kuralları;

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ ise

a) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \mp g(x)) = L \mp M$ dir.

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$

c) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = L^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

d) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ve n çift ise $L > 0$ şartı ile)

e) Limit tektir.

Sağ limit, sol limit

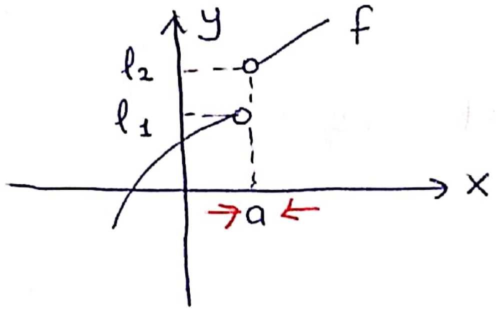
x değişkeni a'ya a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

Buna $f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki soldan limiti L_1 dir denir.

x değişkeni a'ya a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

Buna $f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki sağdan limiti L_2 dir denir.

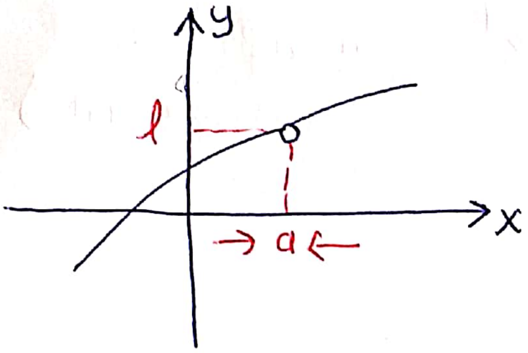
Bir fonksiyonun bir noktada sağdan limiti soldan limitine eşit değilse fonksiyonun o noktada limiti yoktur.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1$ $\quad \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2$ olup

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

değeri yoktur.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l \quad \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$

olduğundan

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dir.

Not; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a-h)$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$

ÖR/ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 1+x & , x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun a) $x=0$ da limiti varmı?

b) $x=1$ de limiti varmı?

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1+x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0 \end{array}\right\} \neq \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mevcut değil

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 1+x = 2$

ÖR/ $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ olmak üzere

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ limitlerini

bulunuz.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overset{(-1)}{2-\cancel{x}}}{(x+3)(\cancel{x-2})} = -\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{x-2}}{(x+3)(\cancel{x-2})} = \frac{1}{5}$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ limiti mevcut değildir.

ÖR/ $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<1 \\ 3, & x=1 \\ x^3+1, & x>1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=?$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} x^3+1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} 2x = 2 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Genişletilmiş Gerçek Sayılar kümesi;

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $-\infty < x < +\infty$ olmak üzere $\mathbb{R}\cup(-\infty,+\infty)$ kümesine genişletilmiş gerçek sayılar kümesi denir. Gerçek sayılar kümesinde sınırsız olarak küçülen değerler $-\infty$ ile, sınırsız olarak büyüyen değerler $+\infty$ ile gösterilir.

CamScanner ile tarandı

Genişletilmiş gerçek sayılar kümesindeki bazı işlemler :

1) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $\qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$

2) $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ $\qquad (-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

3) $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$ $\qquad (-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

4) $n\in\mathbb{N}^+$ $\qquad (+\infty)^n=+\infty$

5) $n\in\mathbb{N}^+$ $\qquad (-\infty)^n=\begin{cases}-\infty, & n \text{ tek ise}\\ +\infty, & n \text{ çift ise}\end{cases}$

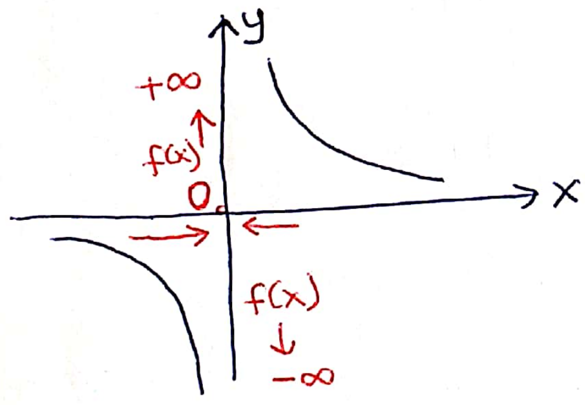
6) $a\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $\quad \frac{0}{a}=0, \quad \frac{a}{\infty}=0$

7) $\frac{1}{+\infty}=0$

8) $\frac{1}{-\infty}=0$

9) $\frac{1}{0^-}=-\infty, \quad \frac{1}{0^+}=+\infty$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=?$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=?$



$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{0-h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{-h}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{0+h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}=+\infty$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{2x-7} = ?$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{2(-\infty)-7} = \frac{5}{-\infty} = 0$$

ÖR/ $a\in\mathbb{R}$, $x \neq a$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x-a} = ?$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(a+h)-a} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{a-h-a} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-h} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ yoktur.

ÖR/ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ limitlerini hesaplayın.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\underbrace{|x|}_{\cancel{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\underbrace{\cancel{|x|}}_{-x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = 1/2$$

Rasyonel fonksiyonlar ve polinomlar için sonsuzda limitler:

a) Bir polinomdaki en büyük dereceli terim, polinomun $+\infty$ ve $-\infty$ daki limitini belirler. Yani en büyük dereceli terimin $+\infty$ ve $-\infty$ daki limiti tüm polinomun limitini verir.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= x^n \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right]$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} P(x) = \lim_{x \to \mp\infty} a_n x^n$$

b) $$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 , & n<m \text{ ise} \\ \frac{a_n}{b_m} , & n=m \text{ ise} \\ -\infty \text{ veya } +\infty , & n>m \text{ ise} \end{cases}$$

ÖR/ $$\lim_{x \to \infty} 3x^3 - x^2 + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - x^2 + 2 = -\infty$$

ÖR/ $$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 5x} = \frac{5}{3}$$

ÖR/ $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}\,x\left(5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= -\infty$$

CamScanner ile tarandı

ÖR/ $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x + \sqrt{x^2+10}}{3x+4}$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x + \sqrt{x^2(1+10/x^2)}}{3x+4} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{5x + |x|\sqrt{1+10/x^2}}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x}\left[5 + \sqrt{1+\underbrace{10/x^2}_{\to 0}}\right]}{\cancel{x}\left(3+\underbrace{4/x}_{\to 0}\right)} = \dfrac{6}{3} = 2$

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ yı içeren limitler;

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

ÖR/ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$

ÖR/ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = ?\ \ 0/0 \qquad \underbrace{\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1}{x}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$\lim_{x \to 0} -2 \cdot \dfrac{\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot 2}$ paydayı 2 ile çarp 2 ye böl

$= \dfrac{-2 \cdot 1 \cdot 0}{2} = 0$

ÖR/ $\lim_{x \to 3\pi} \dfrac{\sin(3\pi - x)}{6\pi - 2x} = ?$

$$\lim_{x \to 3\pi} \frac{\sin(3\pi - x)}{2(3\pi - x)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = \frac{1}{2}$$

$x - 3\pi = t$

$x \to 3\pi$ $t \to 0$ olur

ÖR/ $\lim_{x \to y} \dfrac{\sin(x-y)}{x^2 - y^2} = ?$ $\quad \lim_{x \to y} \dfrac{\sin(x-y)}{(x-y)(x+y)}$

$x - y = t$ $\quad x \to y$ $\quad t \to 0$ olur

$$\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}}_{1} \cdot \lim_{x \to y} \frac{1}{x+y} = 1 \cdot \frac{1}{y+y} = \frac{1}{2y}$$

ÖR/ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2 + x \sin 3x}{x \sin x} = ?$

Pay ve payda x^2 ye bölündü

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin x^2 + x \sin 3x}{x^2}}{\dfrac{x \sin x}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin x^2}{x^2} + \dfrac{\sin 3x}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{1+3}{1} = 4$$

ÖR/ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 2a, & x < 3 \\ 2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim_{x \to 3} f(x)$ limitinin değeri bir reel sayı olduğuna göre a değerini bulunuz.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 3^-} x - 2a = \lim_{x \to 3^+} 2x + 3 \Rightarrow 3 - 2a = 2 \cdot 3 + 3$$

$3 - 2a = 9$

$-2a = 6$

$a = -3$

CamScanner ile tarandı

Uygulama:

ÖR/ $f(x)=\sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz?

$\ln \frac{5x-x^2}{4} \geq 0$ olmalı $\frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \Rightarrow 5x-x^2 \geq 4$

$5x-x^2-4 \geq 0$

$x^2-5x+4 \leq 0$

$(x-1)(x-4) \leq 0$

x		1		4	
x^2-5x+4	+	0	−	0	+

$T.K=[1,4]$

ÖR/ $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin x-1}{2x-\pi}=?$

$x-\pi/2=t$ $\quad 2(x-\frac{\pi}{2})$ $\quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+t)-1}{2.t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{\sin\pi/2}^{1}\cos t+\overbrace{\cos\pi/2}^{0}\sin t-1}{2t}$

$x\to\pi/2$

$t\to 0$

$=\lim_{t\to 0} \frac{\cos t-1}{2t}=0$

$\lim_{t\to 0} \frac{\cos t-1}{t}=0$ olduğu gösterildi.

ÖR/ $\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\frac{1}{x}=?$

$\frac{1}{x}=t$ $\quad x\to\infty$ $\quad t\to 0$ olur.

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}.\sin t = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\infty} . \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = \infty$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x} = ?$

$\frac{1}{x} = t \quad x\to\infty \quad t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\sin t = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin t\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{1}{t}\sin t}_{1}\cdot\sqrt{t} = 1\cdot 0 = 0$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})\cdot(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+1} = 1$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\pi/4} \left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}\right) = ?$ $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ unutma

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cancel{\cos x-\sin x}}{(\cancel{\cos x-\sin x})(\cos x+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\pi/4} \frac{1}{\cos x+\sin x} = \frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}}}_{1}$$

$= 1$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3^x}(1 - 3^{-2x})}{\cancel{3^x}(1 + 3^{-2x})} = 1 \checkmark \quad \left\{ \lim_{x\to\infty} 3^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \right.$$

ÖR/ $f(x) = \log\left(\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$\dfrac{x-5}{x^2-10x+24} > 0$ olmalı

$x^2-10x+24$
6 4

x	4		5	6	
$x-5$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$x^2-10x+24$	$+$	0 $-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$T.K = (4,5) \cup (6,\infty)$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} = ?$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

ÖR/ $\lim_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x}}\right)=?$

$\infty-\infty$ belirsizliği

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2+x}-x^2}{\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2+x}-x^2}{\sqrt{x^2+x}}\cdot\frac{x\sqrt{x^2+x}+x^2}{x\sqrt{x^2+x}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^2+x)-x^4}{\sqrt{x^2+x}\,(x\sqrt{x^2+x}+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}+x^3-\cancel{x^4}}{\sqrt{x^2+x}\,(x\sqrt{x^2+x}+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left[x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\underbrace{|x|}_{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\cdot\left[x.\underbrace{|x|}_{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}\left[\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}+1\right]\right)}=\frac{1}{2}$$

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} x-3y+z=1 \\ x-y+2z=a \\ x+y+(b+1)\cdot z=5 \end{array}\right\}$ lineer denklem sisteminin

a) Çözümsüz b) tek çözümlü c) sonsuz çözümlü olması için a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & 1 & b+1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 4 & b & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & b-2 & -2a+6 \end{array}\right]$$

a) Lineer denklem sisteminin çözümsüz olması için $r_{A;B} \neq r_A$ olmalıdır.

$r_A = 2$ iken $r_{A;B} = 3$ durumu ise

$b-2=0$ ve $-2a+6 \neq 0$ iken sağlanır.

Yani $b=2$ ve $a \neq 3$ olmalıdır.

b) Tek çözümlü olması için

$r_{A;B} = r_A = n = 3$ olmalıdır.

$b-2 \neq 0 \Rightarrow b \neq 2$ olduğu durumda sistemin tek çözümü vardır.

c) Lineer denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması için $r_{A;B} = r_A < n$ olmalı.

Yani $b-2=0$ ve $-2a+6=0$ için $r_{A;B}=r_A<n$ olduğundan $b=2$, $a=3$ olmalıdır.

ÖR/

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 4z &= a \\ -x + 4y - 2z &= 0 \\ 3x + 2y + 6z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için a hangi değeri almalıdır?

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & a \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 7 & 0 & a \\ 0 & -7 & 0 & -2-3a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & a/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4a/7 \\ 0 & 1 & 0 & a/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2a \end{array}\right]$$

Sistemin çözümünün olması için $r_A = r_{A;B} = 2$ olmalıdır. Şu halde $-2-2a=0$, yani $a=-1$ değerini almalıdır.