Matrisler

Tanım: Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olabilen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki düzenli tabloya m satır ve n sütundan oluşan matris denir. $m \times n$ ye matrisin mertebesi denir.

Elemanları a_{ij} ler olan bir A matrisi $A = [a_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

ÖR/

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ -1 & i-3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ tabloları birer matrisdir.

Tanım; Bir tek satırdan oluşan matrise satır matris denir. Satır matrisin mertebesi $1\times n$ şeklindedir.

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}]_{1\times n}$$ bir satır matristir.

$$A = [-1 \ -2 \ 0]$$

Tanım: Bir tek sütundan oluşan matrise sütun matris denir. Sütun matrisin mertebesi $m\times 1$ şeklindedir.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$ bir sütun matristir.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tanım; Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matris denir.

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{1x1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$$ 2x3 merteheli sıfır matristir.

Tanım; Satır sayısı sütun sayısına eşit olan bir matrise kare matris denir. $C = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}_{1\times1}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

kare matristirler.

$A = [a_{ij}]$, $n\times n$ mertebesinden bir kare matris ise $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matrisin asal köşegen elemanlarının toplamına da kare matrisin iz'i denir. Yani $iz A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ dir.

Tanım: $A = [a_{ij}]$, $n\times n$ mertebeden bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa matrise köşegen matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ köşegen matristir.

Tanım; Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = k$$ ise matrise skaler matris denir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ skaler matristir.

Tanım; Bir skaler matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar 1 ise matrise birim matris denir. $n \times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir.

$$\boxed{I_1 = [1] \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{---dir.}}$$

Tanım; Karşılıklı elemanları eşit olan aynı mertebeden matrislere eşit matrisler denir. $m \times n$ mertebeden $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri eşit ise $A = B$ şeklinde yazılır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & t & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & -3 & z \end{bmatrix}$ matrislerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul

$x = 3 \quad t = -3 \quad y = -1 \quad z = 1$ olmasıdır.

Tanım; Aynı mertebeden iki matrisin toplamı karşılıklı elemanların toplamıyla elde edilen aynı mertebeden bir matristir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ dir.

Farklı mertebeden matrisler toplanamazlar.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A + B = C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

Tanım; A bir matris ve k bir skaler olmak üzere, kA skaler çarpımı A nın her bir elemanının k ile çarpılmasından elde edilen bir matristir. (−1)A çarpımı −A ile gösterilir. A ve B aynı mertebeden iki matris ise bu iki matrisin farkı

$$A - B = A + (-B) = A + (-1)B \text{ dir.}$$

Ör/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

ve $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ise $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ dir.

A + (-B) = A-B

$$-B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Teorem;

A, B, C aynı mertebeden matrisler ve k_1, k_2 birer skaler olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $A + O = A$ Sıfır matrix

4) $A - A = O$

5) $k_1(A + B) = k_1 A + k_1 B$

6) $(k_1 + k_2) A = k_1 A + k_2 A$

7) $(k_1 k_2) A = k_1 (k_2 A)$ özellikleri vardır.

Tanım; $A = [a_{ij}]$ bir $m \times r$ matris ve $B = [b_{ij}]$ bir $r \times n$ matris ise bunların çarpımı $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots n$ için

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ir} b_{rj}$$

olmak üzere $AB = [c_{ij}]$, $m \times n$ matristir.

Herhangi iki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ise

$$AB = \begin{bmatrix} 2.(-1)+0.0 & 2.(-2)+0.3 \\ -1.(-1)+5.0 & -1.(-2)+5.3 \\ 4.(-1)+3.0 & 4.(-2)+3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 17 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Teorem; A $m \times n$ matris, B ve C $n \times r$ matrisler, D $r \times t$ matris ve k bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $A(BD) = (AB)D$

2) $A(B+C) = AB + AC$

3) $(B+C)D = BD + CD$

4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

5) $A.0 = 0$

6) $A.I = I.A = A$

7) Genellikle $AB \neq BA$ dır. $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B değişmelidir denir.

Tanım; A bir kare matris olsun. A nın n defa kendisiyle çarpımı sonucu elde edilen matrise A nın n. kuvveti denir. Yani

$$\underbrace{A.A\ldots A}_{n} = A^n \quad \text{dir.}$$

$$A^k.A^l = A^{k+l} \quad \text{ve} \quad (A^k)^l = A^{kl} \quad (k,l \in \mathbb{N}) \text{ dir.}$$

Tanım; Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarını yer değiştirerek elde edilen matrise A nın transpozesi (devriği) denir. ve A^t ile gösterilir. Buna göre $A=[a_{ij}]$, mxn matrisi ise $A^t=[a_{ji}]$ nxm matrisidir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ise $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ dır.

$C=[2]$ ise $C^t=[2]$ dır.

Teorem; A, B aynı mertebeden iki matris ve k bir skaler olmak üzere

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(A^t)^t = A$

3) $(kA)^t = kA^t$

4) A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere $(AB)^t = B^t A^t$ dır.

Tanım; $A^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir simetrik matris ise her i,j için $a_{ij} = a_{ji}$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$ bir simetrik matristir.

Tanım: $A^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ters simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir ters simetrik matris ise her i,j için $a_{ij} = -a_{ji}$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$ bir ters simetrik matristir.

Tanım: Bir A kare matrisi için $A^{p+1} = A$ olacak şekilde bir pozitif p tamsayısı varsa A matrisine periyodik matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı p ye de A nın periyodu denir.

$A^2 = A$ ise A matrisine idempotent matris denir.

Bir A kare matrisi için $A^q = 0$ olacak şekilde bir pozitif q varsa A matrisine nilpotent matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı q ye de nilpotent matrisin derecesi denir.

Tanım; A , $n \times n$ mertebesinden bir kare matris olmak üzere $AB = BA = I_n$ bağıntısını sağlayan (eğer varsa) B matrisine A matrisinin tersi denir. A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir.

ÖR/ 3×3 mertebeden

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri birbirlerinin tersidirler.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Elemanter satır ve sütun işlemleri

Bir matrisin satırları veya sütunları üzerinde yapılan ve elemanter satır veya elemanter sütun işlemleri olarak isimlendirilen işlemler aşağıda verilmiştir.

1) Matriste herhangi i ve j numaralı satırların yerlerini değiştirmek, bu işlem H_{ij} ile gösterilir.

2) Matriste herhangi i ve j numaralı sütunların yerlerini değiştirmek bu işlem K_{ij} ile gösterilir.

3) Matriste i numaralı satır elemanlarını sıfırdan farklı bir λ sayısı ile çarpmak bu işlem $H_i(\lambda)$ ile gösterilir.

4) Matriste j numaralı sütun elemanlarını sıfırdan farklı bir λ sayısı ile çarpmak bu işlem $K_j(\lambda)$ ile gösterilir.

5) Matriste herhangi bir j numaralı satır elemanlarını sıfırdan farklı λ sayısı ile çarpıp herhangi bir i numaralı satır elemanlarına eklemek bu işlem $H_{ij}(\lambda)$ ile gösterilir.

6) Matriste herhangi bir j numaralı sütun elemanlarını sıfırdan farklı bir λ sayısı ile çarpıp herhangi bir i numaralı sütun elemanlarına eklemek bu işlem $K_{ij}(\lambda)$ ile gösterilir.

Tanım: Bir A matrisine ard arda elemanter satır (veya sütun işlemleri) uygulayarak B matrisi elde edilirse A ve B matrislerine satırca (veya sütunca) denk matrisler denir. $A \sim B$ ile gösterilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisine denk olan B matrisini bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{H_{31}(-7)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -12 & -17 \end{bmatrix} \underset{H_3\left(\frac{-1}{12}\right)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 17/12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 17/12 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = B$$ Böylece $A \sim B$ dir.

Tanım; Bir matris aşağıdaki şekilde satırca indirgenmiş formdadır.

1) İlk k tane satır sıfırdan farklı ve (k+1) inci satır ile bundan sonraki satırların tüm elemanları sıfırdır.

2) Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman 1 dir. Her bir satırdaki sıfırdan farklı 1 değeri, bir önceki satırdaki sıfırdan farklı ilk 1 elemanının sağında yer alır.

3) Bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman $a_{ij}=1$ ise j. inci sütundaki a_{ij} nin altında bulunan tüm elemanlar sıfırdır.

Bu üç koşula " a_{ij} nin bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır " şeklinde alınırsa matrise satırca indirgenmiş eşolan formdadır denir.

ÖR/ $\underbrace{A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{satırca indirgenmiş formdadır.}}$

$\underbrace{C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Satırca indirgenmiş eşolan formdadır}} \quad \underbrace{D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{satırca indirgenmiş formda olmayan matristir.}}$

Tanım; (Matrisin rangı)

Satırca indirgenmiş formdaki bir matrisin sıfırdan farklı satırlarının sayısına o matrisin rangı denir. r_A veya rank A ile gösterilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad r_A = ?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-1)$, $H_{31}(-2)$, $H_2(\frac{1}{2})$ $H_{32}(-4)$ $\quad r_A = 2$

ÖR/ $A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{bmatrix}$ $r_A=?$

$$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-4&-2&2\\0&-5&0&5\\0&-4&-2&2\\0&1&-2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-4&-2&2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&-2&-3\end{bmatrix}$$

$H_{21}(-3)$, $H_{31}(-2)$, $H_{41}(-5)$, $H_{51}(-1)$ $\quad$ $H_3\left(\frac{-1}{5}\right)$, $H_{42}(-1)$

$$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&-1\\0&-4&-2&2\\0&1&-2&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-2&-2\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

H_{23}, H_{45} $\quad$ $H_{32}(4)$, $H_{42}(-1)$

$$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

sıfırdan farklı satırların sayısı 3 dur.

$r_A=3$

$H_3\left(\frac{-1}{2}\right)$, $H_{43}(-1)$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

veriliyor.

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ise

$AB = ?$

$$AB = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 4} = C_{3\times 4}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.3 + 0.(-1) & 5.1 + 0.(-4) & 5.2 + 0.0 & 5.4 + 0.6 \\ (-1).3 + 2(-1) & (-1).1 + 2.(-4) & (-1).2 + 2.0 & (-1).4 + 2.6 \\ 1.3 + 3.(-1) & 1.1 + 3.(-4) & 1.2 + 3.0 & 1.4 + 3.6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 10 & 20 \\ -5 & -9 & -2 & 8 \\ 0 & -11 & 2 & 22 \end{bmatrix}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri

veriliyor. $AB = C$ olacak şekilde B matrisini

bulunuz.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x & -y \\ 5x+2z & 5y+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$-x = 3 \Rightarrow \underline{x = -3}$

$-y = 2$

$\underline{y = -2}$

$5x + 2z = 1$

$5(-3) + 2z = 1$

$2z = 1 + 15$

$2z = 16 \quad \underline{z = 8}$

$5y + 2t = 0$

$5(-2) + 2t = 0$

$2t = 10$

$\underline{t = 5}$

$B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ elde edilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$$AA^{-1} = I$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}} \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ 6a+8c & 6b+8d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2a+4c=1$ $\quad$ $2b+4d=0$

$6a+8c=0$ $\quad$ $6b+8d=1$

$a=-1$ $\quad$ $b=1/2$ $\quad$ $c=3/4$ $\quad$ $d=-1/4$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$ dir.

ÖR/ $A+A^t$ nin simetrik matris olduğunu gösteriniz.

$(A+A^t)^t = A+A^t$ olduğu gösterilmeli

$$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

$\left.\begin{array}{l} * \ (A+B)^t = A^t + B^t \\ * \ A+B = B+A \end{array}\right\}$ kullanıldı

ÖR/ A ve B simetrik iki matris olmak üzere $5A^t + 7B^t$ matrisininde simetrik matris olduğunu gösteriniz.

A ve B simetrik olduğundan

$$A^t = A \qquad B^t = B \text{ dir.}$$

$$(5A^t + 7B^t)^t = 5A^t + 7B^t$$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(5A^t + 7B^t)^t = (5A^t)^t + (7B^t)^t$$

$$= 5(A^t)^t + 7(B^t)^t$$

$$= 5A + 7B = 5A^t + 7B^t$$

$*\ (\lambda A)^t = \lambda A^t$

$*\ (A^t)^t = A$

} kullanıldı.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin rangının 2 olması için m ne olmalıdır?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 2 & -11 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 0 & -14 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$H_{12}(-2)$, $H_{42}(-1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & m & -5 \\ 0 & -14 & 8 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4+m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

H_{12} , $H_{32}(1)$, $H_{42}(-2)$

$r_A = 2$ olması için $m+4=0 \Rightarrow m=-4$ olmalıdır.

ÖR/ A ve B n. mertebeden değişmeli $(AB=BA)$ matrisler ise A^2 ve B^3 matrislerinin de değişmeli olduğunu gösteriniz.

$A^2B^3 = B^3A^2$ olduğu gösterilmeli

$$A^2B^3 = (A.A)(BB^2) = A(AB)B^2 = A(BA)B^2$$

$$= (AB)(AB)B = BA(BA)B = B(AB)(AB)$$

$$B(BA)(BA) = B^2(AB)A = B^2(BA)A$$

$$= B^3A^2 \text{ elde edilir.}$$

Determinantlar

Tanım; Bir A kare matrisinin determinantı det (A) veya $|A|$ ile gösterilir.

1) 1×1 mertebesinden $A=[a]$ kare matrisinin determinantı

$$\det(A) = |A| = |a| = a \text{ dır.}$$

2) 2×2 mertebesinden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ kare matrisinin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ dir.}$$

3) 3×3 mertebesinden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

kare matrisinin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Bu ifade A matrisinin determinantının 1 inci satıra göre açılımıdır.

Tanım: $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ mertebesinden bir matris olsun. ve M_{ij}, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle A dan elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ mertebeden matrisi göstersin. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir. Ayrıca

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

değerine a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ olsun.

$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ve $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$A_{23} = -(8-25) = 17$ dir

Teorem; $n \geqslant 2$ olmak üzere A, $n \times n$ mertebeden bir kare matris olsun.

$i = 1, 2 \dots n$ ve $j = 1, 2 \dots n$ için

$$\det A = |A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$
$$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \text{ dir.}$$

Determinantın bu şekilde hesaplanmasına Laplace açılımı denir.

Determinantın bu şekilde hesaplanmasında açılım için kullanacağımız satır veya sütunlarda sıfırı en çok bulunduran satır veya sütun tercih edilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $|A| = \det(A) = ?$

$|A| = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$ (1 sütuna göre)

$$= 1 . (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 . (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \underbrace{0 . (-1)^{3+1} \left| \quad \right|}_{0}$$

0 olduğu için

$$|A| = 1 . (2 - (-3)) + 2(-1) . [-2 - 9]$$
$$= 5 - 2(-11) = 5 + 22 = 27$$

Determinantın Özellikleri:

1) Bir determinantta herhangi bir satır (ya da sütun) elemanlarının hepsi sıfır ise determinantın değeri 0 dır.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2) Bir determinantın bir satırındaki (ya da sütunundaki) elemanlar bir k skaleri ile çarpılırsa determinant k ile çarpılmış olur.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3(-2) & 0 \\ 2 & 3.0 & -5 \\ 0 & 3.1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ dir.

3) Determinantta herhangi iki satır (ya da sütun) yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

4) Bir determinantın herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları bir k skaleri ile çarpılıp bir başka satırın (ya da sütunun) elemanlarına eklenirse determinantın değeri değişmez.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = a_{11} A_{11}$

$H_{21}(-3)$, $H_{31}(1)$

$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 21$

(1. sütuna göre açtım)

$a_{21} = 0 \quad a_{31} = 0$

5) Bir determinantın herhangi iki satırı (ya da sütunu) birbirine eşit ise determinantın değeri 0 dır.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (2. ve 3. satır aynı)

6) Bir determinantın herhangi iki satır (ya da sütun) elemanları karşılıklı olarak orantılı ise determinantın değeri 0 dır.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (1. ve 2. sütun orantılı)

7) Bir matrisin determinantı transpozesinin determinantına eşittir.

Yani A, $n \times n$ merteben matris

$$|A| = |A^t|$$

8) $|AB| = |A|\,|B|$

9) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

10) $|A^k| = |A|^k \qquad k \in \mathbb{Z}^+$

11) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

12) $|kA| = k^n\,|A|$ dır. $\quad n \times n \rightarrow$ mertebe

$k \in \mathbb{Z}^+$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_{2\times 2} = t$ ise $\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2 . |A|$ dır.

Bir matrisin Tersi:

Tanım: Bir kare matrisin elemanlarının yerine, o elemanların eş çarpanlarının alınmasıyla elde edilen matrisin transpozesine ilk matrisin ek matrisi (adjoint matrisi) denir.
Bir A matrisinin ek matrisi $Ek A$, $Adj A$ veya A^* ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ matrisinin ek matrisi

$$Ek A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$ dır.

ÖR/

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad Ek A = ?$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$A_{21} = -5 \qquad A_{22} = 9 \qquad A_{23} = -6$

$A_{31} = 2 \qquad A_{32} = -7 \qquad A_{33} = -1$

$$\text{Ek}A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$ olur.

Teorem: A bir kare matris olsun. $|A| \neq 0$ ise

$$A^{-1} = \frac{\text{Ek}A}{|A|}$$ dır.

Not: Bir A kare matrisi için $|A| = 0$ ise A^{-1} yoktur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = ?$

$$\text{Ek}A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(3+14)$$

$$|A| = -17$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/17 & 5/17 & -2/17 \\ 3/17 & -9/17 & 7/17 \\ -2/17 & 6/17 & 1/17 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Determinantlarla ilgili örnekler:

ÖR/

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

2. inci 3 üncü ve 4. sütunu 1. sütuna ekledim.

ÖR/

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 4(-9) - 6\cdot(-3)$$

$$= -39 + 18 = -18$$

ÖR/ $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0$

2. sütun 3. sütuna eklendi
1. sütun ve 3 sütun aynı
det değeri 0 dır.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = ?$ determinant özelliklerini kullanarak bulunuz.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= 1. \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-a & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c^2+ac-ab-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c^2+ac-ab-b^2)$$

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$ determinant özelliklerini kullanarak determinantı bulunuz.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2-x^2 & y-x & 0 \\ z^2-x^2 & z-x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y^2-x^2 & y-x \\ z^2-x^2 & z-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y-x)(y+x) & y-x \\ (z-x)(z+x) & z-x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} y+x & 1 \\ z+x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)\left[y+x-(z+x) \right]$$

$$= (y-x)(z-x)(y-z)$$

ÖR/ $\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix}$ det özelliklerini kullanarak çarpanlara ayırınız.

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & abc \\ b^2 & b^4 & abc \\ c^2 & c^4 & abc \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{abc} \cdot abc \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2 & b^4 & 1 \\ c^2 & c^4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2-a^2 & b^4-a^4 & 0 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$b^4-a^4 = (b^2-a^2)(b^2+a^2)$

$c^4-a^4 = (c^2-a^2)(c^2+a^2)$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & (b^2-a^2)(b^2+a^2) \\ c^2-a^2 & (c^2-a^2)(c^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2 \\ 1 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2)\left[(c^2+a^2)-(b^2+a^2)\right]$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)$$

Not/ A, $n \times n$ tekil olmayan bir kare matris ve $\text{Adj } A = (\text{Ek } A)$ A nın ek matrisi ise

$$|\text{Adj } A| = |A|^{n-1}$$ dir.

ÖR/ A ve B, 3×3 mertebesinden iki matris ve $\det A = -7$, $\det B = 4$ olsun.

a) $\det(A^t (5B)^{-1}) = ?$

b) $\det(2A^{-1} + \text{Adj } A) = ?$

a) $\det(A^t . (5B)^{-1}) = \det(A^t) \det(5B)^{-1}$

$= \det(A^t) \det\left(\frac{1}{5} B^{-1}\right)$

$= \det A \cdot \det\left(\frac{1}{5} B^{-1}\right)$

$= -7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{\det B}$

$= -7 \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-7}{4.125}$

$= \frac{-7}{500}$

b) $\det(2A^{-1} + \text{Adj } A) = \det(2A^{-1} - 7A^{-1})$

$\text{Adj } A = \text{Ek } A$

$A^{-1} = \frac{\text{Ek } A}{|A|}$

$\text{Ek } A = \text{Adj } A = A^{-1} \cdot |A|$

$= -7A^{-1}$

$= \det(-5A^{-1})$

$= (-5)^3 \det(A^{-1})$

$= -125 \cdot \frac{1}{\det A}$

$= \frac{-125}{-7} = 125/7$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersinin olmaması için x bilinmeyenleri ne olmalıdır?

A matrisinin tersinin olmaması için $|A| = 0$ olmalıdır?

$$|A| = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ x+2 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$-1.$$

$$= (x+2).(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2)(x+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2)(x+4) = 0$$

$x = -2 \quad x = 2, \; x = -4$

içi A matrisinin tersi yoktur.

ÖR/ $\begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix}$ determinantını determinant özelliklerini kullanarak çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b) & 2(a+b) & a+b \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2a+2b-2c & -2c & a+c \\ a-b & a-b & b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b) \begin{vmatrix} -a+b-c & -c \\ a-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)(a-b) \begin{vmatrix} -a+b-c & -c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)(a-b) \begin{vmatrix} -a+b & -c \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)(a-b)(-a+b)$$

$$= -2(a+b)(a-b)(a-b)$$

$$= -2(a+b)(a-b)^2$$

ÖR/ $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$ determinant özelliklerini kullanarak çarpanlara ayırınız.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a & b & c \\ 0 & x & d & e \\ 0 & x & x & f \\ 0 & x & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a) \begin{vmatrix} x & d & e \\ x & x & f \\ x & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a) \begin{vmatrix} x-d & d & e \\ 0 & x & f \\ 0 & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d) \begin{vmatrix} 1 & d & e \\ 0 & x & f \\ 0 & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d) \begin{vmatrix} x & f \\ x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d) \begin{vmatrix} x & f \\ 0 & x-f \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d)\,(x(x-f))$$

$$= x(x-a)(x-d)(x-f)$$

Lineer Denklem Sistemleri

Tanım; $i = 1, 2 \dots m$ ve $j = 1, 2 \dots n$ için

a_{ij} ler ve b_i ler birer reel sayı

$x_1, x_2 \dots x_n$ ler bilinmeyenler olmak üzere

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

şeklindeki bir sisteme m denklem ve n bilinmeyenden oluşan bir lineer denklem sistemi denir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matrisine sistemin katsayılar matrisi

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ matrisine bilinmeyenler ve $$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

matrisine de sistemin ikinci tarafı denir.

Lineer denklem sistemi

$AX = B$ şeklinde ifade edilebilir.

Lineer Denklem Sistemlerinin denk matrisler yardımıyla çözümü;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

lineer denklem sistemi ele alınsın.

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine arttırılmış katsayılar matrisi denir.
Yukarıdaki lineer denklem sisteminin çözümü için aşağıdaki yolu izleyeceğiz.

1) $r_A \neq r_{A:B}$ ise sistemin çözümü yoktur.

2) $r_A = r_{A:B} = r$ ise sistemin çözümü vardır.

a) $r = n$ ise tek bir çözümü vardır.

b) $r < n$ ise $n-r$ keyfi değişkene bağlı sonsuz çözümü vardır.

Bu şekildeki çözüm bulmaya Gauss-Jordan indirgeme yöntemi veya denk matrisler yardımıyla çözüm denir.

ÖR/ $\left.\begin{aligned} -2x+y+5z&=1 \\ x+2y-z&=0 \\ 3y+2z&=1 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \underset{H_{12}(2)}{\left[\begin{array}{cccc} 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]}$$

$$\underset{H_{12}}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{23}(-2)}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]}$$

$$\underset{H_2(-1)}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{32}(-3)}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{12}(-2),\ H_3(-1)}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}$$

$$\overbrace{}^{r_A=3} \qquad \underset{H_{12}(3),\ H_{23}(-1)}{\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{r_{A:B}=3}}$$

Burada $r_A = 3 = r_{A:B}$

sistemin çözümü vardır.

$n=3=r$ tek çözüm var

$x=4$

$y=-1$ dir.

$z=2$

ÖR/ $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=1\\ 2y+7z&=4\\ 3x+3y+6z&=3 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$[A\vdots B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 7 & 4\\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \sim \underset{H_{31}(-3)}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

$$\underset{H_2(1/2)}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 7/2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{12}(-1)}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & -1\\ 0 & 1 & 7/2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}$$

$r_A=2$

$r_{A:B}=2$

$r_A=r_{A:B}=2=r$ Sistemin çözümü vardır.

$n=3$ $\quad r<n$ $\quad n-r=3-2=1$ tane keyfi sabit var.

Sistemin $n-r=1$ keyfi sabite bağlı sonsuz çözümü vardır.

$x-\frac{3}{2}z=-1$ $\qquad z=2$ alırsak

$y+\frac{7}{2}z=2$

$x=\frac{3}{2}z-1$

$y=-\frac{7}{2}z+2$

$x=3-1=2$

$y=-7+2=-5$

$z=2$

$z=2$ için çözümdür.

$z=2k$ alırsak, $x=3k-1$, $y=2-7k$, $z=2k$ elde edilir.

ÖR/
$$\left.\begin{aligned} 3x+2y&=7 \\ 17x+y&=0 \\ 6x+4y&=3 \end{aligned}\right\}$$
lineer denklem sistemini çözünüz.

$$[A;B]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 17 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-6)$, $H_{31}(-2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -31 & -119 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -31 & -119 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_{12}(3)$ $\qquad$ $H_3\left(\frac{-1}{11}\right)$

$$\begin{bmatrix} -1 & -11 & -42 \\ 0 & -31 & -119 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 11 & 42 \\ 0 & 31 & 119 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H_{12} $\qquad$ $H_1(-1)$, $H_2(-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 42 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/31 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$H_2\left(1/31\right)$ $\qquad$ $H_{12}(-11)$

$r_A=2$

$r_{A:B}=3$

$r_A=2$ ve $r_{A:B}=3$

olduğundan sistemin çözümü yoktur.

Lineer Homojen Denklem Sistemleri

Tanım;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

şeklindeki bir lineer denklem sistemine lineer homojen denklem sistemi denir.

Daima $r_A = r_{A:B}$ olacağından, homojen lineer denklem sisteminin her zaman çözümü vardır.

$AX=0$ homojen lineer denklem sistemi için $X=0$ daima bir çözümdür. Bu çözüme sıfır çözüm veya aşikar çözüm denir.

$r_A = r_{A:B} = r$ olsun.

Eğer $r=n$ ise sistemin tek çözümü sıfır çözümdür.

Eğer $r<n$ ise sistemin $n-r$ keyfi değişkene bağlı sonsuz çözümü vardır.

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{array}\right\}$ lineer homojen denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$[A:B]=\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\-1&1&1&0\\2&1&-2&0\end{bmatrix}$$ dir.

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\-1&1&1&0\\2&1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&3&0&0\\0&-3&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&1&0&0\\0&-3&0&0\end{bmatrix}$$

$H_{21}(1)$, $H_{31}(-2)$ $\qquad H_2\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

elde edilir. Burada $r_A=r_{A:B}=2$ olduğundan sistemin $n-r=3-2=1$ keyfi bilinmeyene bağlı sonsuz çözüm vardır.

$x-z=0$ $\qquad z=k$ alırsak

$y=0$ $\qquad x=k \quad y=0 \quad z=k$ şeklinde bulunur.

$z=1=k$ alırsak

$x=1 \quad y=0 \quad z=1$ olur.

ÖR/ $\left.\begin{aligned}-3x+2y-3z&=0\\2x+5y+2z&=0\\4x+y-3z&=0\end{aligned}\right\}$ lineer homojen denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$[A:B]=\begin{bmatrix}-3&2&-3&0\\2&5&2&0\\4&1&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&7&-1&0\\2&5&2&0\\4&1&-3&0\end{bmatrix}$$

$H_{12}(1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_2\left(\frac{1}{19}\right)$ $\qquad$ $H_{12}(7)$, $H_{32}(-29)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$H_3\left(-\frac{1}{7}\right)$ $\qquad$ $H_{13}(-1)$

$r_A = r_{A:B} = 3$ olduğundan tek çözümü sıfır çözümüdür. Yani $x=y=z=0$ dır.

Cramer Yöntemi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots &+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots &+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots &+ a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminde A, $n\times n$ mertebeden bir kare matris ve $|A| \neq 0$ ise

$$AX = B$$

lineer denklem sisteminin tek bir çözümü vardır.

ve bu çözüm

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dir. Burada $\Delta = |A|$ ve Δ_i, $(i=1,2 \ldots n)$

A katsayılar matrisinde i ninci sütun yerine

$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$ ifadesinin yazılmasıyla elde edilen

matrisin determinantı olmak üzere

$i = 1,2 \ldots n$ için $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ alınarak $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

çözümünü bulmaya Cramer yöntemi ile

çözüm bulma denir.

Eğer $|A| = 0$ ise cramer yöntemiyle çözemeyiz.

ÖR/ $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 2y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemini cramer yöntemiyle çözünüz.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1 \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2$$ elde edilir.

Katsayılar Matrisinin İnversi Yardımıyla Çözüm

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots &+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots &+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots &+ a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini ele alalım. Eğer $|A| \neq 0$ ise A^{-1} vardır. Böylece $AX = B$ eşitliğinden $A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B$ ve buradan $X = A^{-1} \cdot B$ elde edilir. Lineer denklem sisteminin bu şekildeki çözümüne katsayılar matrisinin inversi yardımıyla çözüm denir.

ÖR/

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=5\\ 2x+y+z&=4\\ -2x+2y-z&=3 \end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin inversi yardımıyla çözünüz.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 5/3 & 2/3\\ 0 & 1/3 & 1/3\\ 2 & -8/3 & -5/3 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} \qquad X=A^{-1}B$$

$$X=\begin{bmatrix} -1 & 5/3 & 2/3\\ 0 & 1/3 & 1/3\\ 2 & -8/3 & -5/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5\\ 4\\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} 11/3\\ 7/3\\ -17/3 \end{bmatrix}$$

$x=11/3$ $\quad y=7/3$ $\quad z=-17/3$ olarak bulunur.

Uygulama

ÖR/

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+4z&=a\\ -x+4y-2z&=0\\ 3x+2y+6z&=-2 \end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için a hangi değeri almalıdır?

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & a\\ -1 & 4 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right] \underset{H_{12}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & a\\ -1 & 4 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 7 & 0 & a \\ 0 & -7 & 0 & -2-3a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & a/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2a \end{bmatrix}$$

$H_{21}(1)$, $H_{31}(-3)$ $\qquad H_2(1/7)$ $\quad H_{32}(1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 4a/7 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & a/7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2-2a \end{bmatrix}$$ elde edilir.

$r_A = 2$

Buna göre sistemin çözümünün olabilmesi için $r_A = r_{A:B} = 2$ olmalıdır.

yani $-2-2a=0$ olmalıdır. Buradan

$a=-1$ bulunur.

ÖR/

$$\left.\begin{aligned} x + ty + 2z &= 1 \\ 2x + 8y + tz &= 3 \end{aligned}\right\}$$ lineer denklem sisteminin

a) Çözümsüz
b) Tek çözümlü
c) Sonsuz çözümlü olması için t ne olmalıdır?

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & t & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 8 & t & \vdots & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & t & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 8-2t & t-4 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

$H_{21}(-2)$

a) Lineer denklem sisteminin çözümsüz olması için $r_{A:B} \neq r_A$ olmalıdır. Bunun için

$8-2t=0$ ve $t-4=0$ olmalıdır. Şu halde

$t=4$ olur.

b) Verilen lineer denklem sisteminin 3 bilinmeyenli 2 denklemden oluştuğu için tek çözüm durumu yoktur.

c) Lineer denklem sisteminin sonsuz çözümlü olması için $r_{A;B} = r_A = 2$ olmalıdır. Bunun için $8-2t \neq 0$ veya $t-4 \neq 0$ ifadeleri sağlanmalıdır. Şu halde $t \neq 4$ şartını sağlayan tüm t değerleri için verilen lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

ÖR/
$$\left.\begin{aligned} y-2z&=b \\ x-y+z&=2 \\ x+ay&=3 \end{aligned}\right\}$$
lineer denklem sisteminin
a) Çözümsüz
b) Tek çözümlü
c) sonsuz çözümlü olması için
a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A;B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{H_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & a & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2+b \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 2a+1 & 1-ab-b \end{array}\right]$$

a) Lineer denklem sisteminin çözümsüz olması için $r_{A;B} \neq r_A$ olmalıdır.
$r_A = 2$ iken $r_{A;B} = 3$ olmalıdır.
Yani $2a+1=0$ iken $1-ab-b \neq 0$ olmalıdır. Burada $a = -1/2$ ve $b \neq 2$ bulunur.

b) Verilen lineer denklem sisteminin tek çözümünün olması için

$r_{A:B} = r_A = 3$ olmalıdır. Yani $2a+1 \neq 0$

$a \neq -\frac{1}{2}$ ve $(b \in \mathbb{R})$ dir.

c) Lineer denklem sisteminin sonsuz çözümlü olması için $r_{A:B} = r_A < 3$ olmalıdır.

Bunun için $2a+1=0$ ve $1-ab-b=0$

ifadeleri sağlanmalıdır. Yani $a=-1/2$ ve

$b=2$ olmalıdır.

ÖR/ $$\left.\begin{aligned} 3x-(2a+1)y-z&=-1 \\ -x+2ay+2z&=3 \\ 3x+ay+4z&=1 \end{aligned}\right\}$$ lineer denklem sistemi a nın hangi değerleri için Cramer kuralı ile çözülebilir.

Cramer Kuralına göre çözüm olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı 0 dan farklı bir değer almalıdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -(2a+1) & -1 \\ -1 & 2a & 2 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4a-1 & 5 \\ -1 & 2a & 2 \\ 0 & 7a & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4a-1 & 5 \\ 7a & 10 \end{vmatrix} = 10(4a-1)-35a$$

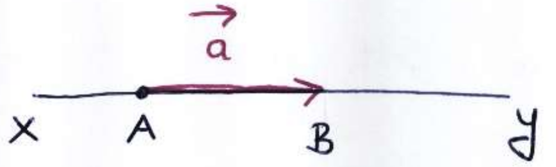
$$= 10(4a-1)-35a$$

$$= 40a-10-35a$$

$$= 5a-10 \neq 0$$ yani $a \neq 2$ için Cramer kuralı ile çözülebilir.

Vektörler

Tanım: Başlangıç ve bitim noktaları bulunan belli bir doğrultusu yönü ve uzunluğu olan doğru parçasına vektör denir.

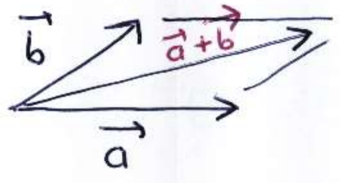


A başlangıç noktası, B bitim noktası, yönü A dan B ye ve uzunluğu AB olan $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektörü görülmektedir. Doğrultusu xy dir.
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektörünün uzunluğu (modulü) $|\vec{a}|$ ile gösterilir. Uzunluğu sıfır olan vektöre sıfır vektör denir ve $\overline{0}$ ile gösterilir.

Tanım; Doğrultuları ve yönleri aynı uzunlukları eşit olan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerine eşit vektörler denir. $\vec{a} = \vec{b}$ ile gösterilir.

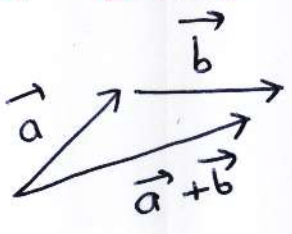
Vektörlerin toplamı:

a) Paralel kenar kuralı:



$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın köşegeni $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin toplamıdır.

b) Üçgen kuralı.



Verilen $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri için

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$ vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$

vektörlerinin farkı denir. $\vec{a} - \vec{a} = 0$ dır.

$-\vec{b}$ vektörü $\vec{b}$ vektörü ile aynı doğrultuya, aynı uzunluğa ve zıt yöne sahip bir vektördür.

Teorem; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri ve λ_1, λ_2 skalerleri için aşağıdaki özellikler verilebilir.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3) $\lambda_1 (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_1 \vec{b}$

4) $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$

5) $\lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{a} = \lambda_2 (\lambda_1 \vec{a})$

Tanım; Uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir. $|\vec{a}| \neq 0$ olmak üzere

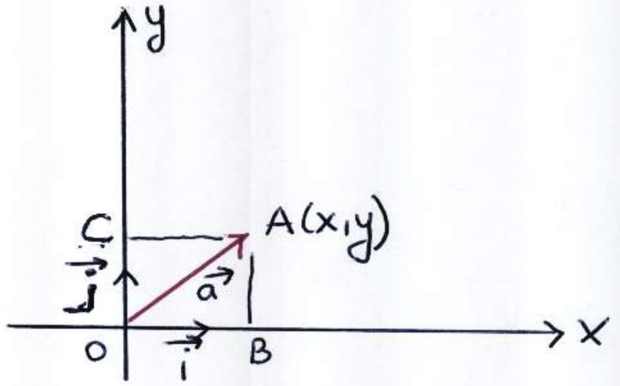
$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$ vektörü $\vec{a}$ ile aynı doğrultu

ve yöndeki birim vektördür.

Vektörlerin Analitik İfadesi:

i) Düzlemde

Düzlemde x, y dik koordinat sistemini gözönüne alalım. x ve y eksenleri üzerindeki birim vektörleri sırasıyla $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ ile gösterelim. Düzlemdeki bir A(x,y) noktasını ele alalım.



$\vec{OA} = \vec{a}$ vektörüne A noktasının yer vektörü denir. Burada

$\vec{OB} = x\vec{i}$

$\vec{OC} = y\vec{j}$ ve

$\vec{a} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$

olduğundan $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ şeklinde ifade edilir.

$x\vec{i}$ ve $y\vec{j}$ vektörlerine $\vec{a}$ vektörünün sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusundaki bileşen vektörleri ve x, y sayılarına da $\vec{a}$ vektörünün x, y doğrultusundaki bileşenleri denir.

Bir $\vec{a}$ vektörünün bu şekilde ifadesine kartezyen baz vektörleri cinsinden ifadesi denir.

$\vec{i} = (1,0)$ $\vec{j} = (0,1)$ dir.

Uzayda $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şeklinde kartezyen baz vektörleri cinsinden ifade edilir.

$\vec{i} = (1,0,0)$ $\quad \vec{j} = (0,1,0)$ $\quad \vec{k} = (0,0,1)$ dir.

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektörü bileşenleri cinsinden

$\vec{a} = (x,y,z)$ yada $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ biçiminde gösterilir.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dir.

Tanım; $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

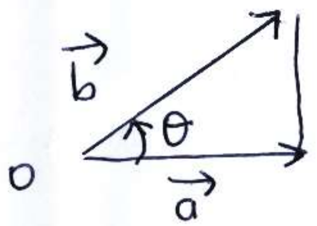
$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ ise

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$ dır.

λ bir skaler ve $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ olmak üzere

$\lambda\vec{a} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j} + \lambda z\vec{k}$ dır.

Tanım ; (Skaler Çarpım)



$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin skaler çarpımı (nokta çarpımı)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

dır.

İki vektörün skaler çarpımı bir sayıdır.

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \qquad \cos 90 = 0, \ \cos 0 = 1$$

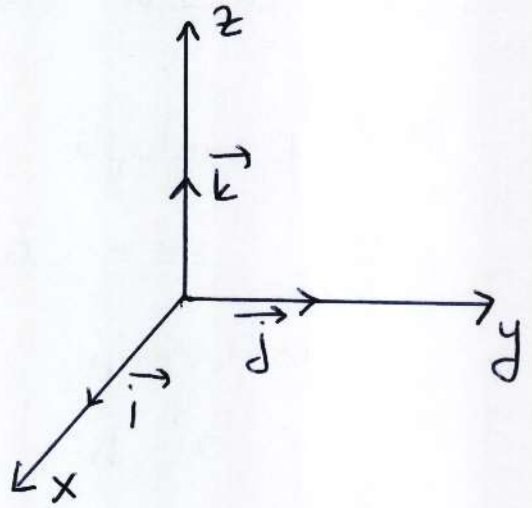
olduğundan

$$\vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = \underbrace{|\vec{i}|}_{1} . \underbrace{|\vec{i}|}_{1} \underbrace{\cos 0}_{1} = 1$$

$$\vec{j}^2 = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{k}^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} . \vec{j} = 0 \qquad \vec{i} . \vec{k} = 0 \qquad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$



$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \text{ dir.}$$

$$\vec{a} . \vec{a} = x x + y y + z . z = x^2 + y^2 + z^2$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} . \vec{a} \text{ dır.}$$

* $$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \vec{a} . \vec{a}$$

Teorem: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri ve k skaleri için aşağıdaki özellikler verilebilir.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

4) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dır.

ÖR/ Uzunluğu 2 ve 3 olan ve aralarında 60 derecelik açı bulunan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin skaler çarpımı

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ dır.}$$

ÖR/ $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ve $\vec{b} = 2\vec{i} + c\vec{j} + \vec{k}$ vektörleri için $\vec{a} \perp \vec{b}$ ise c nedir?

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ dır.

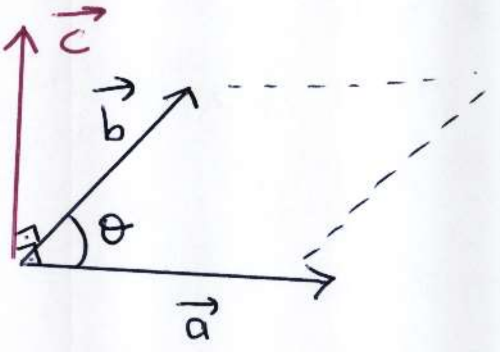
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (2\vec{i} + c\vec{j} + \vec{k}) = 0$$

$$2 - 2c + 3 = 0$$

$$-2c = -5 \qquad c = \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

Tanım: Vektörel Çarpım

İki vektörün vektörel çarpımı bu vektörlerin belirttiği düzleme dik doğrultuda bir vektördür. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{c}$ vektörü ise



$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ veya $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ şeklinde gösterilir.

$\vec{c} \perp \vec{a}$ ve $\vec{c} \perp \vec{b}$ dir.

$\vec{u}$ vektörü $\vec{c}$ ile aynı doğrultu ve yönde bir birim vektör olmak üzere

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta \cdot \vec{u} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

dir.

Teorem: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri ve k skaleri için aşağıdaki özellikler verilebilir.

1) Vektörel çarpımın değişme özelliği yoktur.
$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$ dır.

2) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$

3) $k(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b})$

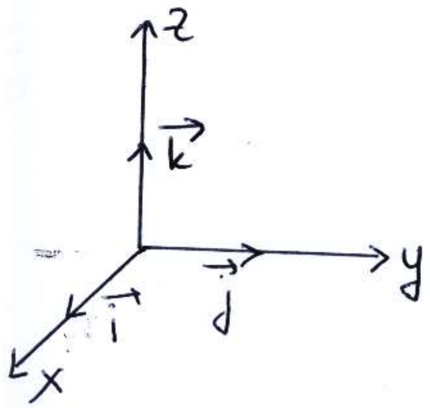
4) $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ ve θ, $\vec{a}$ vektörü ile $\vec{b}$ vektörü arasındaki açı olmak üzere

$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$ dır.

5) $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşittir.

6) $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ elde edilir.



7) $\vec{a} = \vec{b}$ veya $\vec{a}$ vektörü $\vec{b}$ vektörüne paralel ise $\theta = 0$ olacağından $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ olur.

8) $\vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ dır.

9) $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ olmak üzere

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$ dır.

ÖR/ $\vec{u} = (0,-1,2)$ ve $\vec{v} = (1,2,3)$

olmak üzere

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (-3-4)\vec{i} - (0-2)\vec{j} + (0+1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -7\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

ÖR/ $\vec{a} = (2,1,1)$, $\vec{b} = (1,0,-1)$ olmak üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$ olduğundan

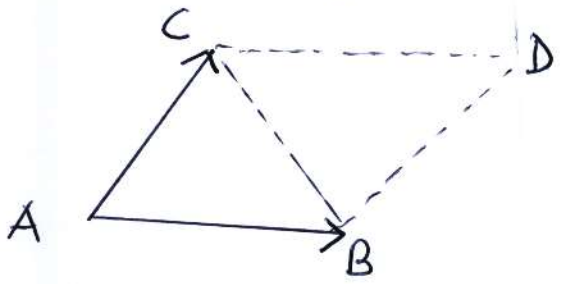
$$\sin\theta = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{1+9+1}}{\underbrace{\sqrt{4+1+1}}\ \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

$\sqrt{6} . \sqrt{2}$

$\sqrt{2.3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$ $\quad \theta = \text{Arc} \sin \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$ olur.

ÖR/ Köşeleri $A(2,-1,3)$ $B(1,0,2)$ $C(5,-1,2)$ olan $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin alanını bulalım.



$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} S(ABCD) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}| \text{ dür.}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (3,0,-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$$

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ br}^2$$

Tanım; Karışık çarpım

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörleri için $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$ değerine üç vektörün karışık çarpımı denir. Karışık çarpımın sonucu bir skalerdir.

Tanım; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ üç vektor olmak üzere

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ olmak üzere

$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ dır.}$$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$ karışık çarpımı $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmine eşittir.

ÖR/ $\vec{a} = (2,1,3)$ $\vec{b} = (-1,2,+3)$ $\vec{c} = (4,0,5)$ olmak üzere $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & +3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & +3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$H_{12}(1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & -12 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -12 & -19 \end{vmatrix} = -95 + 108 = 13 \text{ br}^3$$

ÖR/ $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \lambda \vec{k}$ vektörlerinin birbirine dik olması için λ ne olmalıdır?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 2 - \lambda = 0$$

$\lambda = 0$ bulunur.

ÖR/ $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektörlerine dik ve modülü 2 olan $\vec{w}$ vektörünü bulunuz.

$\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ olsun.

$\vec{u} \cdot \vec{w} = a - 2b + c = 0$ ve

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2a + b - 2c = 0$ olur.

Bu iki denklem çözülürse

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 \end{array}\right]$$

$r = 2$ $n = 3$

$n - r = 1$ keyfi sbt

$a - \frac{3}{5}c = 0$ $a = \frac{3}{5}c$ $c = t$ alırsak

$b - \frac{4}{5}c = 0$ $b = \frac{4}{5}c$

$a = 3/5\, t$, $b = 4/5\, t$ bulunur.

Böylece $w = \frac{3}{5}t\vec{i} + \frac{4}{5}t\vec{j} + t\vec{k}$

Şimdi $|\vec{w}| = 2$ olduğuna göre

$\vec{w}$ vektörünü belirleyelim.

$$|\vec{w}| = \sqrt{t^2\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}+1\right)} = \sqrt{2}\,t \text{ dan}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ bulunur}$$

Şu halde

$$w = \frac{3\sqrt{2}}{5}\vec{i} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k} \text{ dır.}$$

ÖR/ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$ vektörlerinin aynı bir düzlende olduklarını gösteriniz.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmi 0 ise bu üç vektör bir uzay şekli meydana getirmez yani aynı bir düzlemdedir.

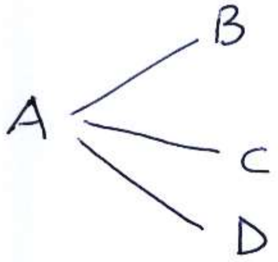
$$V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -9 + 9 = 0$$

üç vektör aynı düzlemdedir.

ÖR/ $A(2,-1,0)$ $B(3,2,1)$ $C(0,3,1)$ noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.



$D(x,y,z)$, denklemi istenen düzlemde değişken bir nokta olsun.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = (x-2)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ x-2 & y+1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \\ x-2 & y+1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ y+1 & z \end{vmatrix} + (x-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$10z - 3y - 3 + (x-2)[9-10] = 0$$

$$10z - 3y - 3 - x + 2 = 0$$

$$-x - 3y + 10z - 1 = 0$$

$x + 3y - 10z + 1 = 0$ düzlem denklemi bulunur.