Belirsiz İntegral

$dy = f'(x)dx$ ifadesine $y=f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Tanım: Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x)dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in belirsiz integrali ya da ilkel fonksiyonu denir

$\int f(x)dx = F(x) + c$ seklinde gösterilir.

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$ dır.

$c \in \mathbb{R}$ ye integral sabiti denir.

İntegral ile türev birbirinin tersi olan işlemlerdir. Bundan dolayı integrale ters türevde denir.

ÖR/ $\int 4x^3 dx$ belirsiz integralini bulunuz.

$\int 4x^3 dx = x^4 + c$ $\qquad (x^4)' = 4x^3$

ÖR/ $\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad (e^x)' = e^x$

ÖR/ $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + c$ $\qquad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

ÖR/ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Bir fonksiyonun integrali ve türevi arasındaki ilişki

1) $d\int f(x)\,dx = f(x)dx$

2) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

ÖR/ $d\int (e^x+2)\,dx = (e^x+2)dx$

ÖR/ $\dfrac{d}{dx}\int \dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx = \dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}$

ÖR/ $f(x) = \int \dfrac{dx}{x}$ ve $f(e^3) = -2$ olduğuna göre $f(x)$ değerini bulunuz.

$f(x) = \int \dfrac{dx}{x} = \ln x + c$

$f(x) = \ln x + c$

$f(e^3) = \ln e^3 + c = -2$

$3 + c = -2$

$c = -5$

$f(x) = \ln x - 5$

ÖR/ $\int f(x)dx = x^3 - x^2 + 4x - 1$ olduğuna göre $f(-1)$ değerini bulunuz.

Türev alalım.

$\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = \dfrac{d}{dx}(x^3 - x^2 + 4x - 1)$

$f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

$f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 4 = 9$

Belirli integral

$F ; [a,b] \to R$, $F'(x) = f(x)$ integrali alınabilen bir fonksiyon olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun belirli integrali a alt sınır, b üst sınır olmak üzere

$\int_a^b f(x)dx$ şeklindedir.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ dır.}$$

ÖR/ $\int f(x)dx = x^3 + 2x + c$ $(c \in R)$ olduğuna göre

$\int_1^4 f(x)dx$ integral sonucunu bulunuz

$$\int f(x)\,dx = x^3 + 2x + c \qquad F(x) = x^3 + 2x$$

$$\int_1^4 f(x)dx = F(x)\Big|_1^4 = F(4) - F(1)$$

$$= 4^3 + 2.4 - (1^3 + 2)$$

$$= 64 + 8 - 3$$

$$= 72 - 3 = 69$$

Belirsiz integral Alma Kuralları

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

1) $n, c \in \mathbb{R}$ ve $n \neq -1$ olmak üzere

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

2) $\int dx = x + c$

3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

6) $\int \cos x dx = \sin x + c$

7) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

8) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

9) $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$

10) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$

11) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$

12) $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$

13) $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$

ÖR/ $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5} x^{5/3} + c$$

ÖR/ $F(x) = \int \frac{1}{x} dx$ olduğuna göre $F(e^3) - F(e^{-2})$ değerini bulunuz.

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$F(e^3) - F(e^{-2}) = \ln|e^3| - \ln|e^{-2}|$$

$$= 3 - (-2) = 5$$

ÖR/ $\int 2^x dx + \int e^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + c$

ÖR/ $E(x) = \int e^x dx$ olduğuna göre $E(3) - E(1)$ değerini bulunuz.

$$E(x) = e^x + c$$

$$\left.\begin{array}{l} E(3) = e^3 + c \\ E(1) = e + c \end{array}\right\} E(3) - E(1) = e^3 - e$$

ÖR/ $\int (\cos 3x + e^x) dx = \frac{1}{3} \sin 3x + e^x + c$

ÖR/ $\int \frac{dx}{2\sec x} = \int \frac{dx}{2 \cdot \frac{1}{\cos x}} = \int \frac{\cos x \, dx}{2} = \frac{1}{2} \int \cos x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \sin x + c$$

ÖR/ $\int 2 \tan^2 x \, dx = ?$

$$2 \int \tan^2 x \, dx = 2 \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx$$

$$= 2 \int (\tan^2 x - 1) dx - 2 \int dx$$

$$= 2 \int \sec^2 x \, dx - 2 \int dx$$

$$= 2 \tan x - 2x + c$$

Değişken değiştirme Yöntemi

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere

$\int f(g(x)) g'(x) dx$ integralinde $u = g(x)$ değişken değiştirmesi yapılır.

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x) dx$$

$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$ olur.

ÖR/ $\int (x^2-3x+2)^2 . (2x-3)dx = ?$

$u = x^2-3x+2$

$du = (2x-3)dx$

$$\int u^2 . du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(x^2-3x+2)^3}{3} + c$$

ÖR/ $\int 2x . \sqrt{x^2+3}\, dx = ?$

$u = x^2+3$

$du = 2x dx$

$$\int \sqrt{u}\, du = \int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} . u^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+3)^3} + c$$

ÖR/ $2\int f'(x) . f''(x)dx = ?$

$f'(x) = u$

$f''(x)\, dx = du$

$$2\int u . du = 2 . \frac{u^2}{2} + c = [f'(x)]^2 + c$$

ÖR/ $\int (e^x+1)^2 . e^x dx = ?$

$e^x + 1 = u$

$e^x dx = du$

$$\int u^2 . du = \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{(e^x+1)^3}{3} + c$$

ÖR/ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = ?$

$x = at \qquad dx = a\,dt$

$$\int \frac{a\,dt}{a^2+a^2t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\,t + c$$

$$= \frac{1}{a}\,\arctan\frac{x}{a} + c$$

ÖR/ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}\,x + c$ dir.

Benzer şekilde;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{ar\,sin}\,\frac{x}{a} + c$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ dir.

ÖR/ $\int \frac{dx}{x \ln x} = ?$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(\ln x) + c$$

ÖR/ $\int \frac{3^{\ln x}}{x} dx = ?$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$

$$\int 3^u \cdot du = \frac{3^u}{\ln 3} + c = \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^{\ln x} + c$$

ÖR/ $\int \frac{dx}{e^x + 1} = ?$

$u = e^x + 1$

$du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \int \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = \int dx - \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

$$= x - \int \frac{du}{u}$$

$$= x - \ln |u| + c$$

$$= x - \ln |e^x + 1| + c$$

ÖR/ $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = ?$

$\ln x = u$

$\frac{1}{x} dx = du$

$\int \cos u . du = \sin u + c$

$= \sin(\ln x) + c$

ÖR/ $\int e^{\sin x} . \cos x \, dx = ?$

$\sin x = u$

$\cos x \, dx = du$

$\int e^{u} . du = e^{u} + c = e^{\sin x} + c$

ÖR/ $\int \frac{\sin x}{\sin^2(\cos x)} dx = ?$

$\cos x = u$

$-\sin x \, dx = du$

$\int \frac{-du}{\sin^2 u} = -\int \frac{du}{\sin^2 u} = \cot u + c$

$= \cot(\cos x) + c$

$$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$$

ÖR/ $\int \frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c$

$= -\ln|3+\cos^2 x| + c$

$u = 3+\cos^2 x$

$du = -2\cos x \sin x \, dx$

$du = -\sin 2x \, dx$

$dx = -\frac{du}{\sin 2x}$

ÖR/ $\int \frac{3\,dx}{(3x+1)^2} = ?$

$3x+1=u \qquad 3dx = du$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{3x+1} + c$$

ÖR/ $\int 2\cot x\,dx = ?$

$$2\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + c = 2\ln|\sin x| + c$$

$\sin x = u \Rightarrow \cos x\,dx = du$

ÖR/ $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{\sqrt{x}}dx = ?$

$\sqrt{x}+1 = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du \qquad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

$$\int u^4 . 2du = 2\int u^4 du = 2\frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{2}{5}(\sqrt{x}+1)^5 + c$$

ÖR/ $\int \cos(5x+3)dx = ?$

$5x+3 = u \Rightarrow 5\,dx = du \qquad dx = \frac{du}{5}$

$$\int \cos u . \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \cos u\,du = \frac{1}{5}\sin u + c$$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x+3) + c$$

ÖR/ $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{-x}+e^x}\,dx = ?$

$$\int \frac{e^x}{\frac{1}{e^x}+e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{\frac{1+e^{2x}}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$e^{2x}+1=u$$

$$2e^{2x}\,dx = du \Rightarrow e^{2x}\,dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|+c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1|+c$$

ÖR/ $f(x) = \int x\, g(x^2)\, g'(x^2)\,dx$ $\quad f(-1)=-5$ ve

$g(1)=2$ olduğuna göre $f(x)$ in $g(x)$ türünden

değerini bulunuz.

$$g(x^2)=u$$

$$2x\cdot g'(x^2)\,dx = du$$

$$f(x) = \int x\cdot u\cdot\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u\,du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2}+c$$

$$f(x) = \frac{1}{4}g^2(x^2)+c$$

$$\underbrace{f(-1)} = \frac{1}{4}\underbrace{g^2(1)}_{4}+c$$

$$-5 = 1+c \Rightarrow c=-6$$

$$f(x) = \frac{1}{4}g^2(x^2)-6$$

ÖR/ $\int \frac{-\sin(\ln\sqrt{x})}{x}dx = ?$

$\ln\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1/2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = du \qquad \frac{1}{2x}dx = du$

$\int -\sin u \cdot 2du = -2\int \sin u\, du = -2(-\cos u) + c$

$= 2\cos u + c$

$= 2\cos(\ln\sqrt{x}) + c$

ÖR/ $\int \frac{2\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx = ?$

$1 + \tan x = u$

$(\sec^2 x)dx = du$

$\int \frac{2du}{\sqrt{u}} = 2 \cdot \int u^{-1/2}du = \frac{2u^{1/2}}{1/2} + c$

$= 4\sqrt{u} + c$

$= 4\sqrt{1+\tan x} + c$

Kısmi İntegrasyon Yöntemi;

$\int f(x) \cdot g(x)$ biçiminde iki fonksiyonun çarpımının integralinin hesaplanmasında genellikle kısmi integrasyon kullanılır.

$u = u(x) \qquad v = v(x)$

$u \cdot v$ nin diferansiyeli

$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v\,du$ olup

$\int d(u \cdot v) = \int u\,dv + \int v\,du$

$u \cdot v = \int u\,dv + \int v\,du$

$\int u\,dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

ÖR/ $\int 3x \cdot \sin x \, dx = ?$

$u = 3x \Rightarrow du = 3dx$

$dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x$

$\int u \, dv = u.v - \int v \, du$

$\int 3x \sin x = 3x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 3 \, dx$

$= -3x \cos x + 3 \sin x + c$

ÖR/ $\int \ln x \, dx = ?$

$u = \ln x \qquad dx = dv$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad x = v$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x \ln x - x + c$

ÖR/ $\int x^2 \ln x \, dx = ?$

$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$

$x^2 dx = dv \quad \frac{x^3}{3} = v$

$\int x^2 \ln x \, dx = u.v - \int v \, du$

$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c$

$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$

ÖR/ $\int 4^x \cdot e^x \, dx = ?$

$4^x = u \Rightarrow 4^x \cdot \ln 4 \, dx = du$

$e^x dx = dv \Rightarrow e^x = V$

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$= 4^x \cdot e^x - \int e^x \cdot 4^x \ln 4 \, dx$

$\int 4^x \cdot e^x dx = 4^x \cdot e^x - \ln 4 \int e^x \cdot 4^x dx + c$

$I = 4^x \cdot e^x - \ln 4 \cdot I$

$I + \ln 4 \cdot I = 4^x \cdot e^x$

$I(1 + \ln 4) = 4^x \cdot e^x$

$\int 4^x \cdot e^x dx = \dfrac{4^x \cdot e^x}{1 + \ln 4} + c$

ÖR/ $\int x \cdot \sec^2 x \, dx = ?$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$\sec^2 x \, dx = dv \Rightarrow \tan x = V$

$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$

$= x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot dx$

$= x \tan x + \ln|\cos x| + c$

$\int \tan x dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx$

$u = \cos x$

$du = -\sin x$

$-\int \dfrac{du}{u} = -\ln|\cos x| + c$

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

1) $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ integrali için $P(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden büyük veya eşit ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna bölünerek integrali alınabilir hale getirilir.

ÖR/ $\int \frac{5x+3}{x-2}\,dx = ?$

$$\begin{array}{r|l} 5x+3 & x-2 \\ \cline{2-2} -5x \pm 10 & 5 \\ \hline 13 & \end{array} \qquad \frac{5x+3}{x-2} = 5 + \frac{13}{x-2}$$

$$\int \frac{5x+3}{x-2}\,dx = \int\left(5 + \frac{13}{x-2}\right)dx = 5x + 13\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= 5x + 13\ln|x-2| + c$$

$x-2 = u$

$dx = du$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln u + c$$

ÖR/ $\int \frac{2x^3+x^2-1}{x+3}\,dx = ?$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-1 & x+3 \\ \cline{2-2} -2x^3 \mp 6x^2 & 2x^2-5x+15 \\ \hline -5x^2-1 & \\ \pm 5x^2 \pm 15x & \\ \hline 15x-1 & \\ -15x \mp 45 & \\ \hline -46 & \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3+x^2-1}{x+3}\,dx = \int\left(2x^2-5x+15-\frac{46}{x+3}\right)dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 15x - 46\ln|x+3| + c$$

ÖR/ $\int \frac{x^3-5x+2}{x-3}dx = ?$

$\int \frac{x^3-5x+2}{x-3}dx = \int\left(x^2+3x+4+\frac{14}{x-3}\right)dx$

$= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x+14\ln|x-3|+C$

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x+2 & x-3 \\ \underline{-x^3 \overset{+}{-} 3x^2} & x^2+3x+4 \\ 3x^2-5x+2 & \\ \underline{-3x^2 \overset{+}{-} 9x} & \\ 4x+2 & \\ \underline{-4x \overset{+}{-} 12} & \\ 14 & \end{array}$$

2) $\int \frac{P(x)}{\theta(x)}$ integrali için $P(x)$ in derecesi $\theta(x)$ in derecesinden küçük ise basit kesirlere ayırma yöntemi uygulanır.

$\theta(x)$ polinomu çarpanlara ayrılabiliyorsa $\frac{P(x)}{\theta(x)}$ in hangi kesirlerin toplamı olduğunun bulunması işlemi basit kesirlere ayırma işlemidir.

$$\frac{ax+b}{(x-k_1)(x-k_2)} = \frac{A}{x-k_1}+\frac{B}{x-k_2} \qquad A, B = ?$$

$$\frac{ax+b}{x^2(x+k)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+k}$$

ÖR/ $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = ?$

$\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{-1}{x+2}dx + \int \frac{2\,dx}{x+1}$

$= -\ln|x+2| + 2\ln|x+1| + C$

$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$

$\frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{A}{\underset{x+1}{x+2}} + \frac{B}{\underset{x+2}{x+1}} = \frac{Ax+A+Bx+2B}{(x+2)(x+1)}$

$A+B = 1 \qquad A = -1$

$A+2B = 3 \qquad B = 2$

ÖR/ $\int \frac{dx}{x^2-9} = ?$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-3B}{(x-3)(x+3)}$$

$x+3 \quad x-3$

$A+B=0$

$3A-3B=1$

$A=-B$

$3(-B)-3B=1$

$-6B=1$

$B=-1/6$

$A=1/6$

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \int \frac{1/6}{x-3}dx + \int \frac{-\frac{1}{6}dx}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

ÖR/ $\int \frac{x+4}{x^2+x^3}dx = ?$

$$\frac{x+4}{x^2+x^3} = \frac{x+4}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}$$

$x(1+x) \quad 1+x \quad x^2$

$$\frac{x+4}{x^2+x^3} = \frac{Ax(1+x)+B(1+x)+Cx^2}{x^2(1+x)}$$

$$= \frac{Ax+Ax^2+B+Bx+Cx^2}{x^2(1+x)}$$

$A+B=1$

$A+C=0$

$B=4 \quad A=-3 \quad C=3$

$$\int \frac{x+4}{x^2+x^3}dx = \int -\frac{3dx}{x} + \int \frac{4\,dx}{x^2} + \int \frac{3}{1+x}dx$$

$$= -3\ln|x| - \frac{4}{x} + 3\ln|1+x| + C$$

$$\int \frac{4}{x^2}dx = 4\int x^{-2}dx$$

$$= 4\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+C$$

ÖR/ $\displaystyle\int \frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = ?$

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$(x-1)(x^2+1)$ $\quad x^2+1$ $\quad (x-1)^2$

$$-2x+4 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$-2x+4 = A(x^3+x-x^2-1) + Bx^2+B + (Cx+D)(x^2-2x+1)$$

$$-2x+4 = Ax^3+Ax-Ax^2-A+Bx^2+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D$$

$$-2x+4 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x - A+B+D$$

$A+C=0$

$A+C-2D=-2$

$\underbrace{A+C}_{0} \quad -2D=-2 \quad \underline{D=1}$

$-A+B-2C+D=0$

$-A+B+D=4$

$-2C+4=0 \quad -2C=-4 \quad \underline{C=2}$

$A=-2$

$-A+B+D=4$

$2+B+1=4 \quad B=4-3$

$B=1$

$\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int\frac{dx}{x^2+1}$

$$\int \frac{-2x+4}{(x-1)^2(1+x^2)}\,dx = \int -\frac{2}{x-1}\,dx + \int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x^2+1| + \arctan x + c$$

Trigonometrik özdeşliklerden yararlanarak integral bulma;

$\int \sin^n x\, dx$ ve $\int \cos^n x\, dx$ integrallerinde

n tek iken $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

n çift ise $\cos 2x = 2\cos^2 - 1 = 1 - \sin^2 x$

özdeşlikleri kullanılır.

ÖR/ $\int \sin^5 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 . \sin x\, dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx$

$\cos x = u$
$-\sin x\, dx = du$

$= \int (1-u^2)^2 . (-du) = -\int (1-2u^2+u^4)\, du$

$= -\left[u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right] + c$

$= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

ÖR/ $\int \sin^2 x . \cos^3 x\, dx = ?$

$\int \sin^2 x . \cos^2 x . \cos x\, dx = \int \sin^2 x . (1-\sin^2 x) \cos x\, dx$

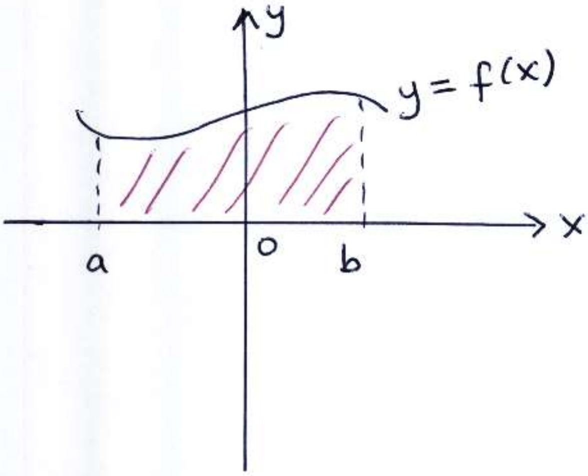
$u = \sin x$
$du = \cos x\, dx$

$= \int u^2 . (1-u) . du$

$= \int (u^2 - u^3)\, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + c$

$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + c$

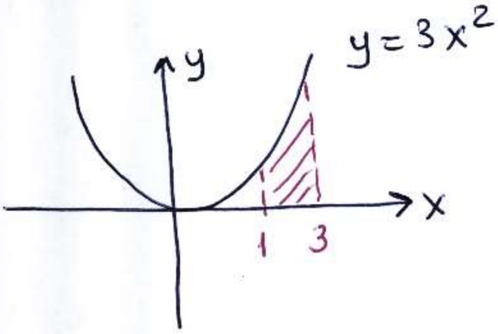
İntegral ile Alan Hesabı:



$y=f(x)$ eğrisi $x=a$; $x=b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı

$$\int_a^b f(x)dx$$ ile hesaplanır.

ÖR/ $y=3x^2$ fonksiyonu $x=1$, $x=3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



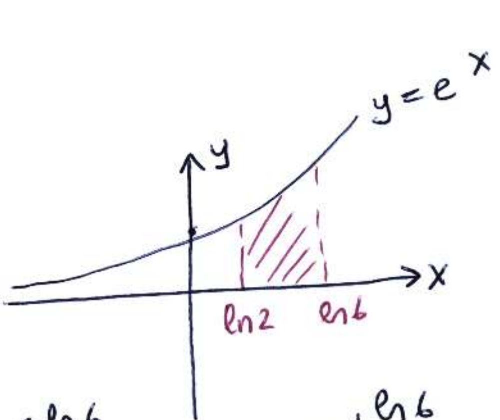
$$A=\int_1^3 3x^2dx = \cancel{3}.\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_1^3 = 27-1 = 26\,br^2$$

ÖR/ $y=e^x$ fonksiyonu $x=\ln 2$, $x=\ln 6$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

$y=e^x$ $T.K=(-\infty,\infty)$

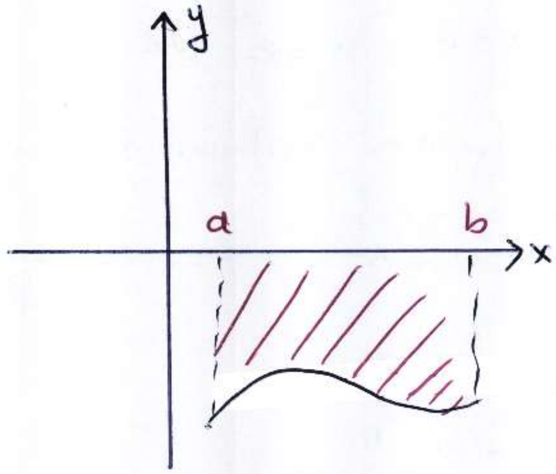
x	$-\infty$		0		∞
$y=e^x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

$y=e$



$$\int_{\ln 2}^{\ln 6} e^x dx = e^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 6} = e^{\ln 6}-e^{\ln 2} = 6-2 = 4\,br^2$$

*



$[a,b]$ aralığında $f(x) \le 0$ dır.

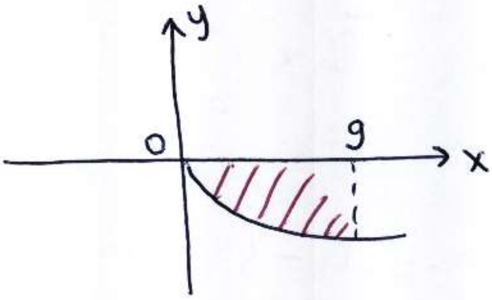
$\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin değeri bu nedenle negatiftir.

Alan değeri negatif olamayacağı için x eksenin altında kalan alan

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$ ile hesaplanır.

ÖR/

$y = -\sqrt{x}$ fonksiyonu, $x=0$, $x=9$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$$A = -\int_0^9 (-\sqrt{x})\,dx = \int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^9$$

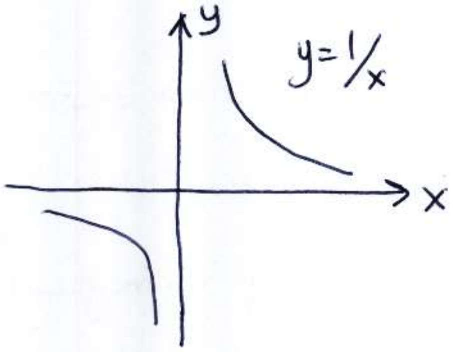
$$= \left.\frac{2}{3}x^{3/2}\right|_0^9$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 9^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3}\left(3^2\right)^{3/2}$$

$$= \frac{\cancel{27}^{\,9}\cdot 2}{\cancel{3}} = 18\,br^2$$

ÖR/ $y=-\frac{1}{x}$ fonksiyonu $x=e$, $x=e^4$ ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$y=-\frac{1}{x}$ $T.K=\mathbb{R}-\{0\}$ $y=0$ yatay asimptot

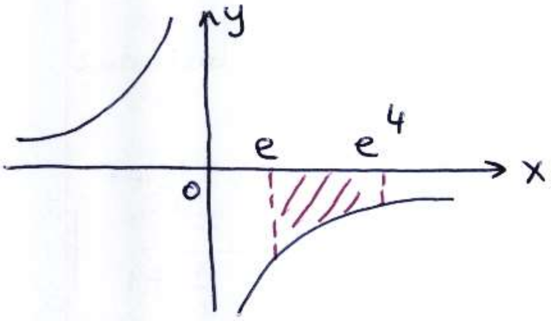
$x=0$ D.A

x	$-\infty$	0		∞
y	0	$+\infty$ ‖	$-\infty$	0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{0+h} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{0-h} = \frac{1}{0} = \infty$$

$y=-\frac{1}{x}$ in grafiği



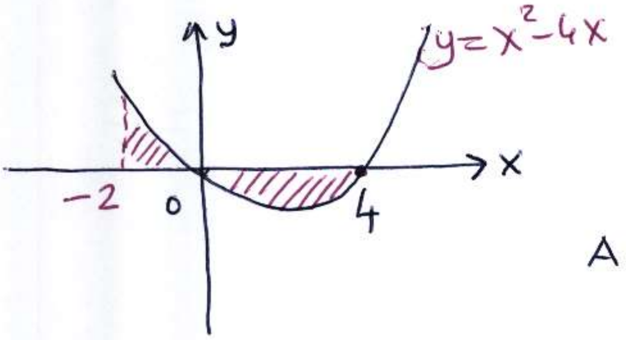
$$A = -\int_e^{e^4} \frac{-1}{x}dx = \int_e^{e^4} \frac{1}{x}dx$$

$$= \ln x \Big|_e^{e^4}$$

$$= \ln e^4 - \ln e$$

$$= 4-1 = 3 \text{ br}^2$$

ÖR/ $f(x)=x^2-4x$ eğrisi $x=-2$, $x=4$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.



$$A = \int_{-2}^{0}(x^2-4x)dx - \int_0^4 (x^2-4x)dx$$

$$A = \int_{-2}^{0}(x^2-4x)dx + \int_0^4 (-x^2+4x)dx$$

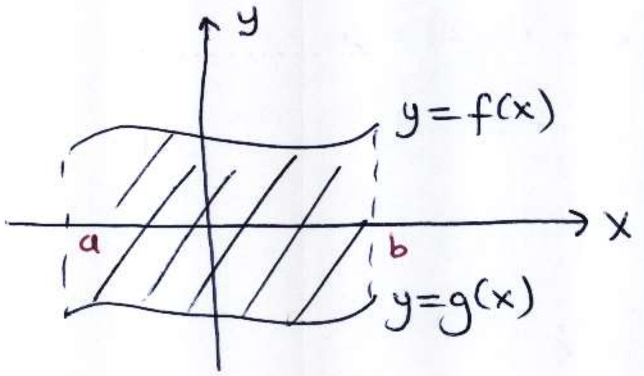
$$A = \frac{x^3}{3} - \cancel{4}^{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_{-2}^{0} + \left(-\frac{x^3}{3} + \cancel{4}^{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^4$$

$$A = \frac{8}{3} + 4 + \left(-\frac{64}{3} + 32\right) = -\frac{56}{3} + \frac{36}{1} = \frac{-56+108}{3}$$

$$= 64/3 \text{ br}^2$$

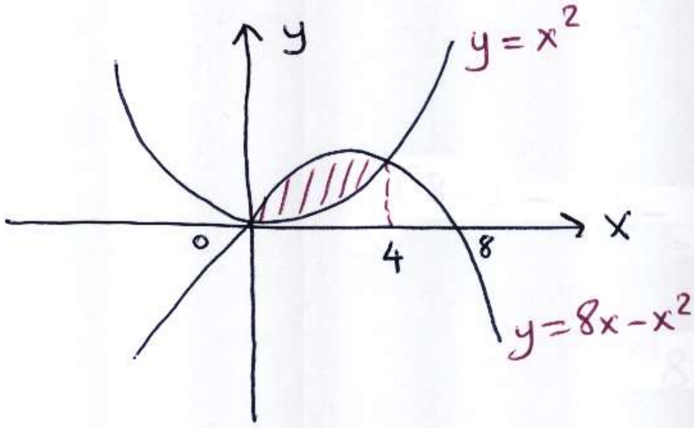
İki eğri arasında kalan alan;

$y=f(x)$, $y=g(x)$ eğrileri ile $x=a$ ve $x=b$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanı



$f(x) \geq g(x)$ ise $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ dir.

ÖR/ $y=x^2$ ve $y=8x-x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$y=x^2$ $\quad y=8x-x^2$

$x^2=8x-x^2$

$2x^2=8x$

$x^2=4x$

$x(x-4)=0$ $\quad x=0$, $x=4$

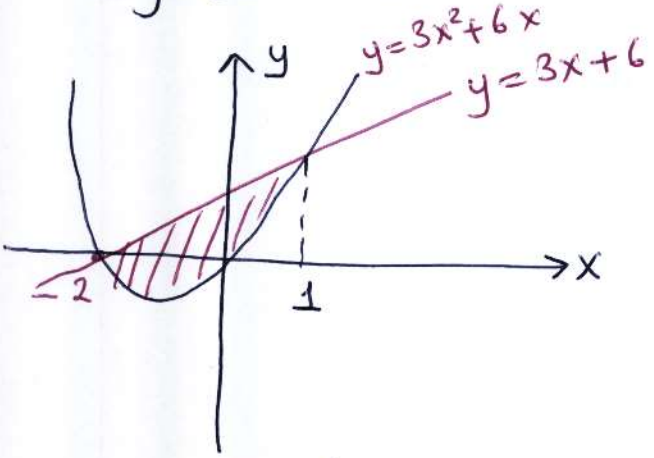
$$A=\int_0^4 (8x-x^2-x^2)dx = \frac{8x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$= 4x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$= 4.16 - \frac{2}{3}.64$$

$$= 64 - \frac{128}{3} = \frac{192-128}{3} = \frac{64}{3} br^2$$

ÖR/ $f(x) = 3x^2 + 6x$ eğrisi ile $y = 3x + 6$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$3x^2 + 6x = 3x + 6$$
$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$
$$3(x^2 + x - 2) = 0$$
$$-2 \quad 1$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[3x + 6 - (3x^2 + 6x)\right] dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} (3x + 6 - 3x^2 - 6x) dx$$

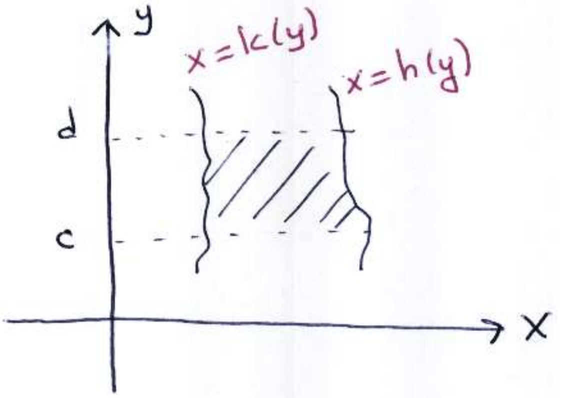
$$A = \frac{3x^2}{2} + 6x - \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \Big|_{-2}^{1}$$

$$A = -\frac{3x^2}{2} + 6x - x^3 \Big|_{-2}^{1}$$

$$A = -\frac{3}{2} + 6 - 1 - \left(-\frac{3}{2} \cdot 4 - 12 + 8\right)$$

$$A = -\frac{3}{2} + 5 - (-6 - 4)$$

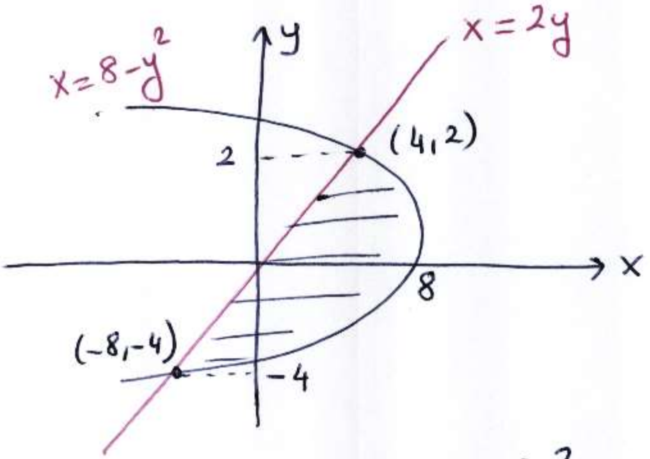
$$A = -\frac{3}{2} + 5 + 10 = \underset{(1)}{-\frac{3}{2}} + \underset{(2)}{\frac{15}{1}} = \frac{-3 + 30}{2} = \frac{27}{2} \text{ br}^2$$



h ve k fonksiyonları $[c,d]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ise $x=h(y)$, $x=k(y)$ eğrileri ile $y=c$ ve $y=d$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$$A=\int_c^d [h(y)-k(y)]\,dy \text{ dir.}$$

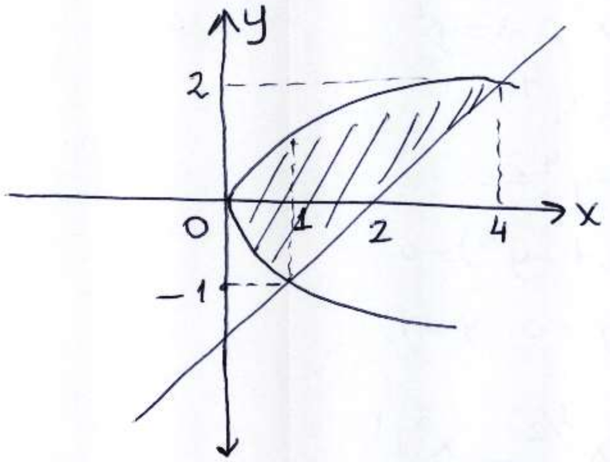
ÖR/ $x=2y$ doğrusuyla $x=8-y^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$2y=8-y^2$$
$$y^2+2y-8=0$$
$$y_1=-4 \qquad y_2=2$$
$$x_1=2y_1 \qquad x_2=2y_2$$
$$x_1=-8 \qquad x_2=4$$

$$A=\int_{-4}^{2}(8-y^2-2y)\,dy=8y-\frac{y^3}{3}-y^2\Big|_{-4}^{2}$$
$$=8.2-\frac{2^3}{3}-4-\left(8(-4)-\frac{(-4)^3}{3}-(-4)^2\right)$$
$$=16-\frac{8}{3}-4+32-\frac{64}{3}+16$$
$$=60-\frac{72}{3}=\frac{180-72}{3}=\frac{8}{3}\text{ br}^2$$

ÖR/ $x=y^2$ ve $y=x-2$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$y=x-2 \qquad x=y^2$

$y=y^2-2$

$y^2-y-2=0$

$2 \quad -1$

$$A=\int_{x=0}^{1}\left[\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\right]dx+\int_{x=1}^{4}\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]dx$$

$$=2\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^4(\sqrt{x}-x+2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1+\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\Big|_1^4$$

$$\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^1+\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\Big|_1^4$$

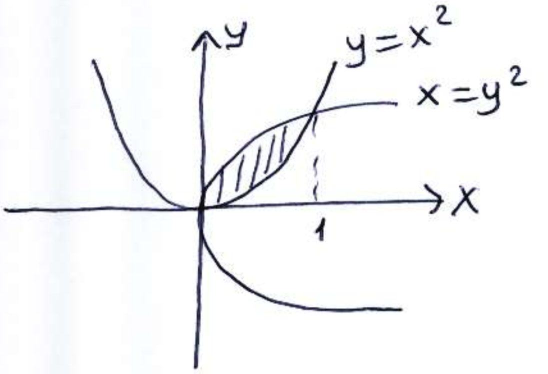
$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}(2^2)^{3/2}-\frac{4}{2}+8-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}\underbrace{-2+8}-\underset{(2)}{\frac{2}{3}}+\underset{(3)}{\frac{1}{2}}\underbrace{-2}$$

$$=\underset{(2)}{\frac{20}{3}}+\underset{(6)}{\frac{4}{1}}-\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{40+24-4+3}{6}$$

$$=\frac{64-1}{6}=\frac{63}{6}=\frac{21}{2}\ br^2$$

ÖR/ $y=x^2$ ve $x=y^2$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



$y=x^2,\ x=y^2$

$y=y^4$

$y-y^4=0$

$y(1-y^3)=0$

$y=0 \quad y=1$

$$A=\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \left.\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ br^2$$

ÖR/ $f(x)=x^2-3x+x\ln x$ eğrisinin ekstremum noktasını bulunuz.

$f'(x)=2x-3+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$

$f'(x)=2x+\ln x-2=0 \Rightarrow \ln x=2-2x$

$x=e^{2-2x}$

$\underline{x=1}$

$f''(x)=2+\frac{1}{x}$

$f''(1)=2+\frac{1}{1}=3>0$

$f''(1)=3>0$

$x=1 \Rightarrow f(1)=1-3+\underbrace{1.\ln 1}_{0}=-2$

$f(x)$ in $(1,-2)$ noktasında minimum değeri vardır.

ÖR/ $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx = ?$

$\ln x = u$

$\frac{1}{x}dx = du$

$\int 2^u \cdot du = \frac{2^u}{\ln 2} + c$

$= \frac{2^{\ln x}}{\ln 2} + c$

ÖR/ $\int e^{e^x} \cdot e^x\,dx = ?$

$u = e^x \quad du = e^x dx$

$\int e^{e^x} \cdot e^x dx = \int e^u \cdot du$

$= e^u + c$

$= e^{e^x} + c$

ÖR $\int x \sin x^2\,dx = ?$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

$\int \sin u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sin u\,du$

$= \frac{1}{2}(-\cos u) + c$

$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

ÖR/ $\int e^x \sin x\,dx = ?$

$u = e^x \qquad \sin x\,dx = dv$

$du = e^x dx \qquad -\cos x = v$

$\underbrace{\int e^x \sin x\,dx}_{I} = uv - \int v\,du = e^x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot e^x dx$

$= -e^x\cos x + \int \cos x \cdot e^x dx$

$e^x = u$

$e^x dx = du$

$\cos x\,dx = dv$

$\sin x = v$

$= -e^x\cos x + \left[e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx\right]$

$I = -e^x\cos x + e^x\sin x - I$

$2I = -e^x\cos x + e^x \sin x +$

$I = \frac{-e^x\cos x + e^x\sin x}{2} + c$

ÖR/ $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$ fonk grafiğini çiziniz.

$T.K = (-\infty, \infty)$

$y' = -3x^2 + 12x - 9 = 0$

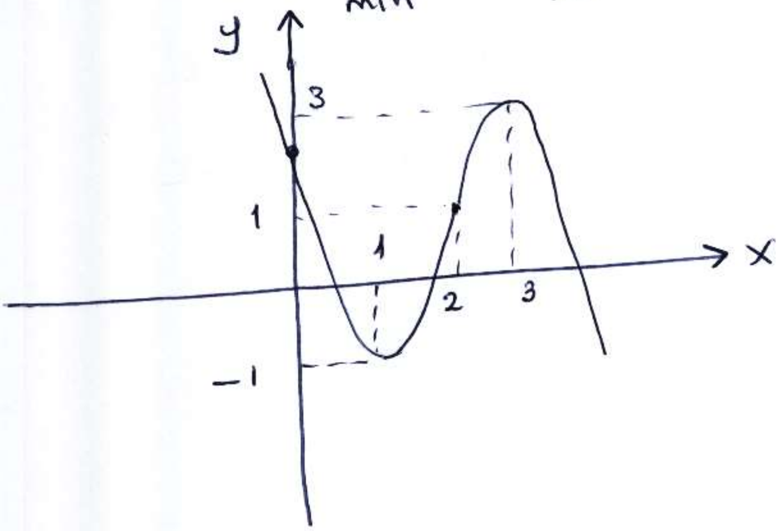
$-3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$(x-1)(x-3) = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$

$y'' = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	0	1		2	3		∞
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y''		$+$		$+$	0	$-$	$-$	
y	∞	3	-1		1	3		$-\infty$
			min			max		



ÖR/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{\ln x} = ?$ $\dfrac{0}{0}$ belirsizlik.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{-x}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \arcsin x}{\sin 2x} = ?$ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\cos 2x} = \frac{2}{2} = 1$$

ÖR/ $f(x) = 2x-1$ $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x}$ olduğuna göre

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(g(x))}{x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

$$(g(2)) = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}$$

$$g'(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(g(x))\, g'(x)}{1} = \frac{f'(\overbrace{g(2)}^{1/2})\, g'(2)}{1} =$$

$$= \underbrace{f'(1/2)}_{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

ÖR/

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = ? \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin\sqrt{x}}{1} = \quad 0/0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}} \cos\sqrt{x}}{2 \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}}} = \frac{1}{2}$$

veya $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{1} = 1/2$$

ÖR/ Gercel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 3$$ olduğuna göre $f'(1) = ?$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x)} + f(h) + xh - \cancel{f(x)}}{h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}}_{3} + \frac{xh}{h} = f'(x)$$

$$3 + x = f'(x)$$

$$f'(1) = 1 + 3 = 4$$

ÖR/

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2-\sqrt{4-x}} = ?\ \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3.\cos 3x}{\dfrac{-(-1)}{2\sqrt{4-x}}} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$$

ÖR/

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x^2-1) = ? \qquad 0(-\infty)$$

$$\ln 0 = x \quad e^x = 0 \quad x = -\infty$$

$$\infty/\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x^2-1)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-2x}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\cdot(\cancel{x-1})^2$$

$$= \lim_{x\to 1^+}-\frac{2x(x-1)}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$$

ÖR/

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}+e^{2x}}{\ln x+3e^{2x}} = ?\ \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği var.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3\overset{\to 0}{e^{-3x}}+2e^{2x}}{\underset{\downarrow\ 0}{\frac{1}{x}}+3.2e^{2x}} =$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\ln\infty = x \Rightarrow e^x = \infty \quad x = \infty$$

$$\ln\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{e^{2x}}}{6\cancel{e^{2x}}} = \frac{1}{3}$$

ÖR/ $f'(x+2) = 2x-4$ ise $f(x) = ?$

$x+2=u \qquad x=u-2$

$f'(u) = 2.(u-2)-4$

$\int f'(u)du = \int (2u-8)du$

$f(u) = \frac{2u^2}{2} - 8u + c$

$f(u) = u^2 - 8u + c$

$f(x) = x^2 - 8x + c$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = ?$ 1^∞ belirsizliği

$y = x^{\frac{1}{x-1}} \qquad \ln y = \ln x^{1/x-1} = \frac{1}{x-1} \ln x$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln y = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln y = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} y = e^1 = e$ olur.

ÖR/

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = ? \qquad 0^0 \text{ belirsizliği}$$

$$y = x^{\sin x} \qquad \ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ln x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} y = e^0 = 1 \text{ olur.}$$

ÖR/

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/\ln x} = ? \qquad \infty^0 \text{ belirsizliği}$$

$$y = x^{1/\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{1/\ln x} = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1$$

$$\ln y = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln y = 1 \Rightarrow y = e^1 = e$$

ÖR/ $x=\sqrt{t+1}$, $y=\sin t$ ise $\dfrac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}}=2\sqrt{t+1}\cdot\cos t$$
$$=2x\cdot\sqrt{1-y^2}$$

$y=\sin t$
$y^2=\sin^2 t$
$1-y^2=\cos^2 t$
$\sqrt{1-y^2}=\cos t$

ÖR/ $y=x^{\sqrt{x}}$ $y'=?$

$\ln y=\sqrt{x}\ln x$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$y'=x^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right]$$

ÖR/ $2\sqrt{y}=x-y^2$ $y'=?$

$$2\cdot\frac{y'}{2\sqrt{y}}=1-2yy'$$
$$y'=\sqrt{y}\,(1-2yy')$$
$$y'=\sqrt{y}-2y\sqrt{y}\,y'$$
$$y'[1+2y\sqrt{y}]=\sqrt{y}\Rightarrow y'=\frac{\sqrt{y}}{1+2y\sqrt{y}}$$

$2\sqrt{y}-x+y^2=0$

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{F_x}{F_y}$$
$$y'=-\frac{-1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}+2y}$$

ÖR/ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ fonksiyonunun $[1,5]$ aralığındaki en küçük değerini bulunuz.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3$

$x = -1$

$f(1) = 1^3 - 3.1^2 - 9.1 + 1$

$f(1) = 1 - 3 - 9 + 1$

$= -10$

$f(1) = -10$

$f(5) = 6$

$f(3) = -26$

$f(-1) = 6$

$f(5) = 5^3 - 3.5^2 - 9.5 + 1$

$= 125 - 75 - 45 + 1$

$= 50 - 45 + 1$

$= 6$

$f(x)$ in $[1,5]$ aralığında en küçük değeri -26 dır.

ÖR/ $a \in R$ olmak üzere $f: R \to R$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + 5$ fonksiyonunun $x = 2$ de bir yerel maksimumu olduğuna göre $f(1)$ değerini bulunuz.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + a = 0$

$f'(2) = 3.2^2 - 18.2 + a = 0$

$12 - 36 + a = 0$

$a = 24$

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 5$

$f(1) = 1^3 - 9.1^2 + 24 + 5 = 21$

f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ veya

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ limit değerlerinin

var olması gerekir.

ÖR/ $f(x) = x^2 - x + 1$ olduğuna göre $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2}$

değerini bulunuz.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 1 - 3}{x-2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x-2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3 \text{ tür.}$$

ÖR/ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4, & x < 3 \\ ax^2 + x, & x \geq 3 \end{cases}$

fonksiyonu $x = 3$ te türevli olduğuna göre a değerini bulunuz.

f fonksiyonu $x = 3$ te türevli ise

$f'(3^-) = f'(3^+)$ dır.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - x + 4 - 10}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{ax^2 + x - 9a + 3}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{a(x^2 - 9) + (x - 3)}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 2)}{\cancel{x - 3}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{(x - 3)}\left[a(x + 3) + 1\right]}{\cancel{x - 3}}$$

$$5 = 6a + 1$$

$$6a = 4 \qquad a = \frac{2}{3}$$

ÖR/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}}{x-4}$ fonk tanım kümesini bulunuz.

$x-3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3$

$8-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leq 8$

$x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ $\quad$ $T.K = [3,8] \setminus \{4\}$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin a & \cos a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}$ ise $|A| = ?$

$$A = \begin{bmatrix} \cos a \sin\theta - \sin^2 a & \cos^2 a + \sin a \cos\theta \\ \sin^2 a - \cos a \sin a & \sin a \cos a + \cos^2 a \end{bmatrix}$$

$$|A| = \cos^2 \cancel{a} \sin^2 a + \cos^3 a \sin a - \sin^3 a \cos a - \cos^2 \cancel{a} \sin^2 a$$
$$- \cos^2 \cancel{a} \sin^2 a - \sin^3 a \cos a + \cos^3 a \sin a + \cos^2 \cancel{a} \sin^2 a$$

$$|A| = 2\cos a \sin a \left(\cos^2 a - \sin^2 a\right) = \sin 2a \cdot \cos 2a$$
$$= \frac{1}{2} \sin 4a$$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

$\dfrac{\sin 4x}{2} = \sin 2x \cos 2x$

ÖR/ A ve B kare matrislerinden A matrisi simetrik ve B matrisi ters simetrik matristir. Buna göre $A+B+B^t = ?$

A simetrik $\quad A = A^t$

B ters simetrik $\quad B = -B^t$

$\Big\}\ A + B + B^t = A - B^t + B^t = A$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3+a & 2-a & 2+a \\ 0 & 1-a & 3-a \\ 0 & 0 & 4-a \end{bmatrix}$ matrisinin tersi yoktur. Buna göre a nın alacağı değerler toplamı kaçtır?

$|A| = 0$ olmalı $\quad |A| = (3+a)\begin{vmatrix} 1-a & 3-a \\ 0 & 4-a \end{vmatrix} = (3+a)(1-a)(4-a) = 0$

$a=-3 \quad a=1 \quad a=4$

Toplam 2 dir.

ÖR/ Elemanları gerçel sayılar olan 3x3 mertebeli bir A matrisinin determinantı 3 tür. Buna göre det((Ek A)) kaçtır?

$$A^{-1} = \frac{Ek A}{|A|} = \frac{Ek A}{3} \Rightarrow 3A^{-1} = Ek A$$

$$\det(3A^{-1}) = \det(Ek A)$$

$$3^3 \cdot \det A^{-1} = \det(Ek A)$$

$$3^3 \cdot \frac{1}{\det A} = \det(Ek A)$$

$$9 = \frac{3^3}{3} = \det(Ek A)$$

ÖR/ $f(x) = \log\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$ fonk tanım kümesini bulunuz?

$\frac{x^2-3x+2}{x+1} > 0$ olmalı $\quad x \neq -1,\ x \neq 2,\ x \neq 1$

x		-1	1	2	
x^2-3x+2	$+$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$x+1$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$\frac{x^2-3x+2}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$T.K = (-1, 1) \cup (2, \infty)$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi x} = ?$

$x - \pi = t$

$x \to \pi \quad t \to 0$

$x^2 - \pi x = x(x-\pi)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin 2(\pi+t)}{t \cdot (\pi+t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(2\pi+2t)}{t \cdot (\pi+t)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin 2t}{t \cdot (\pi+t)} \cdot \frac{2}{2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{\sin 2t}{2t}}_{1} \cdot \frac{2}{\pi+t} = \frac{2}{\pi}$$

ÖR/ $\begin{aligned} x-y+2z&=a \\ -x+by+z&=4 \\ 2x+2z&=-4 \end{aligned}$ denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

$$[A \vdots B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ -1 & b & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & b-1 & 3 & 4+a \\ 0 & 2 & -2 & -4-2a \end{array}\right]$$

$H_{21}(1)$, $H_{31}(-2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & b-1 & 3 & 4+a \\ 0 & 2 & -2 & -4-2a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & b-1 & 3 & 4+a \\ 0 & 1 & -1 & -2-a \end{array}\right]$$

$H_3\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & -2-a \\ 0 & b-1 & 3 & 4+a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & -2-a \\ 0 & 0 & b+2 & ab+2b+2 \end{array}\right]$$

H_{23}

$r_A = r_{A:B} = r = 2$ olmalı

$n=3 \quad r<n$

$b+2=0$ ve $ab+2b+2=0$

olmalı

$b=-2 \qquad -2a-4+2=0$

$-2a=2$

$a=-1$

$a+b=-1-2=-3$ ✓

ÖR/ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$ fonk tanım kümesini bulunuz.

$\dfrac{x}{4-x} \geqslant 0 \qquad x \neq 4$ olmalı

x		0		4	
$\frac{x}{4-x}$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$

$T.K=[0,4)$

ÖR/ $\lim_{x \to \infty} \sqrt{e^{2x}+1} - e^{x} = ?$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{e^{2x}+1} - e^{x} \cdot \frac{\sqrt{e^{2x}+1} + e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+1} + e^{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{e^{2x}} + 1 - \cancel{e^{2x}}}{\sqrt{e^{2x}+1} + e^{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} + e^{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x}\left[\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\downarrow\, 0}} + 1\right]} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖR/ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+m, & x < 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 4 \\ 2x+m, & x > 4 \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 2$ ve $x = 4$ noktalarındaki limiti birer gerçel sayı olduğuna göre $m+n = ?$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow 2+m = 3.2$$

$$2+m = 6 \quad m = 4$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) \Rightarrow 3.4 = 2.4 + n$$

$$12 = 8 + n$$

$$4 = n$$

$$n + m = 4 + 4 = 8$$

ÖR/ $\left.\begin{aligned} x-3y+z&=1\\ x-y+2z&=a\\ x+y+(b+1)\cdot z&=5\end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemnin

a) Çözümsüz b) tek çözümlü c) sonsuz çözümlü olması için a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & a\\ 1 & 1 & b+1 & 5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a-1\\ 0 & 4 & b & 4\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a-1\\ 0 & 0 & b-2 & -2a+6\end{array}\right]$$

a) Lineer denklem sistemnin çözümsüz olması için

$r_{A;B}\neq r_A$ olmalıdır.

$r_A=2$ iken $r_{A;B}=3$ durumu ise

$b-2=0$ ve $-2a+6\neq 0$ iken sağlanır.

Yani $b=2$ ve $a\neq 3$ olmalıdır.

b) Tek çözümlü olması için

$r_{A;B}=r_A=n=3$ olmalıdır.

$b-2\neq 0 \Rightarrow b\neq 2$ olduğu durumda sistemin tek çözümü vardır.

c) Lineer denklem sistemnin sonsuz çözümünün olması için $r_{A;B}=r_A<n$ olmalı.

Yani $b-2=0$ ve $-2a+6=0$ için $r_{A;B}=r_A<n$ olduğundan $b=2$, $a=3$ olmalıdır.

ÖR/ $2x - y + 4z = a$, $-x + 4y - 2z = 0$, $3x + 2y + 6z = -2$ lineer denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için a hangi değeri almalıdır?

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & a \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 7 & 0 & a \\ 0 & -7 & 0 & -2-3a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & a/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4a/7 \\ 0 & 1 & 0 & a/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2a \end{array}\right]$$

Sistemin çözümünün olması için $r_A = r_{A;B} = 2$ olmalıdır. Şu halde $-2-2a=0$, yani $a=-1$ değerini almalıdır.

Lineer Cebir sayfa