

SORU 1. $x^2 \cdot y' - x \cdot y = e^{\frac{x}{y}} \cdot y^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz..

ÇÖZÜM. Soruda verilen birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin bir Homojen Diferansiyel Denklemler olduğu açıkça görülmektedir. O halde, uygun olan

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u + x \cdot u'$$

dönüşümü yapılırsa, diferansiyel denklem;

$$\begin{aligned} x^2 \cdot (u + x \cdot u') - x \cdot u x &= e^{\frac{1}{u}} \cdot (x \cdot u)^2 \\ x^2 \cdot (u + x \cdot u') - x^2 \cdot u &= e^{\frac{1}{u}} \cdot x^2 \cdot u^2 \\ x^2 \cdot [(u + x \cdot u') - u] &= x^2 \cdot e^{\frac{1}{u}} \cdot u^2 \\ u + x \cdot u' - u &= e^{\frac{1}{u}} \cdot u^2 \\ x \cdot u' &= u^2 \cdot e^{\frac{1}{u}} \end{aligned}$$

aşamalarını takip ederek Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler haline gelir. Bu denklem,

$$x \cdot \frac{du}{dx} = u^2 \cdot e^{\frac{1}{u}} \Rightarrow \frac{1}{u^2 \cdot e^{\frac{1}{u}}} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u^2} du = \int \frac{dx}{x}$$

şeklinde integral alma aşamasına getirilir. Sol taraftaki integralde $-\frac{1}{u} = t$ ve

buna bağlı olarak bulunan $\frac{1}{u^2} du = dt$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int e^t dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow e^t = \ln x + \ln C \Rightarrow e^t = \ln(Cx)$$

şeklinde çözülerek ve yapılan değişken değiştirmesi de yerine iade edilmek suretiyle,

$$e^{-\frac{1}{u}} = \ln(Cx) \Rightarrow e^{-\frac{x}{y}} = \ln(Cx) \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{x}{y}}} = \ln(Cx) \Rightarrow 1 = e^{\frac{x}{y}} \cdot \ln(Cx)$$

şeklinde genel çözüme ulaşılır.

SORU 2. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ diferansiyel denklemini **Tam Diferansiyel Denklemler haline getirdikten sonra** çözünüz

ÇÖZÜM $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x) dy = 0 .$

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 .$$

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 .$$

$$P \neq Q_x .$$

$$Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 .$$

$$\begin{aligned} \frac{P_y - Q_x}{Q} &= \frac{(8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1) - (2xy^4e^y - 2xy^2 - 3)}{x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x} \\ &= \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x} = \frac{4 \cdot (2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{x \cdot (xy^4e^y - xy^2 - 3)} \neq f(x) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_x - P_y}{P} &= \frac{(2xy^4e^y - 2xy^2 - 3) - (8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1)}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} \\ &= \frac{-8xy^3e^y - 8xy^2 - 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = \frac{-4 \cdot (2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{y \cdot (2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} \\ &= -\frac{4}{y} = g(y) . \end{aligned}$$

$$\mu = \mu(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{-\int \frac{4}{y} dy} = e^{-4 \ln y} = e^{\ln y^{-4}} = e^{\ln(\frac{1}{y^4})} = \frac{1}{y^4} . \therefore \text{İntegrasyon Çarpanı.}$$

$$(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}) dx + (x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}) dy = 0 .$$

$$M(x, y) + N(x, y) = 0 .$$

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4} .$$

$$M_y = N_x . \quad : \text{Tam Diferansiyel Denklem.}$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4} .$$

$$(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}) dx + (x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}) dy = 0 .$$

$$M(x, y) + N(x, y) = 0 .$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0. \Rightarrow du = 0. \Rightarrow u(x, y) = C. : \text{ Genel Çözüm.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = 2x e^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}. \Rightarrow u(x, y) = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + h(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}. \Rightarrow u(x, y) = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + k(x).$$

$$\Rightarrow u(x, y) = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + K. \quad (K \in \mathbb{R}).$$

$$u(x, y) = C.$$

$$x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + K = C. \Rightarrow x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C - K.$$

$$\Rightarrow x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = A. : \text{ Genel Çözüm. } (A \in \mathbb{R}).$$

Genel çözüm biraz düzenlenirse,

$$x^2 y^3 e^y + x^2 y^2 + x = A \cdot y^3$$

şeklinde ifade edilebilir.

SORU 3. $y' + y \cdot \tan x = y^2 \cdot \sec x$ diferansiyel denkleminin $x=0$ için $y=1$ başlangıç koşuluna uyan özel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM Bize verilmiş olan birinci mertebeden adi diferansiyel denkleme dikkatlice bakıldığında; onun, $n \in \mathbb{Q}$ (Rasyonel Sayı Kümesi) olmak üzere,

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

şeklinde bir yapıya sahip olduğu ve dolayısıyla Bernoulli Diferansiyel Denklemi türünde bir denklemle karşı karşıya bulunduğumuz açıkça görülür. Bu durumda,

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} \cdot \tan x = \sec x$$

aşamasından sonra; $\frac{1}{y} = u$ denilirse, $-\frac{y'}{y^2} = u'$ olur. Buradan,
 $-u' + u \cdot \tan x = \sec x \Rightarrow u' - u \cdot \tan x = -\sec x$

şeklinde bir Lineer Diferansiyel Denklem elde edilir. Bilindiği gibi; bulunan,

$$\lambda = \lambda(x) = e^{-\int \tan x \, dx} = e^{\ln(\cos x)} = \cos x$$

fonksiyonu ile denklemin her iki tarafı çarpılması sonucunda elde edilen

$$u' \cdot \cos x - u \cdot \sin x = -1$$

eşitliğinin sol tarafı $(\lambda \cdot u)' = (u \cdot \cos x)'$ çarpımının türevi haline gelir.

Buradan,

$$\frac{d}{dx}(u \cdot \cos x) = -1 \Rightarrow d(u \cdot \cos x) = -dx \Rightarrow \int d(u \cdot \cos x) = -\int dx$$

$$u \cdot \cos x = -x + C \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \cos x = C - x \Rightarrow \frac{\cos x}{y} = C - x$$

işlemleriyle sonuca ulaşılır.

$x = 0$ için $y = 1$ koşuluna uyan özel çözüm eğrisine ise; bu değerleri genel çözüm olan eğri ailesinin denkleminde yerlerine koyup, keyfi sabitin alacağı

$$\frac{\cos(0)}{1} = C - 0 \Rightarrow \frac{1}{1} = C \Rightarrow C = 1$$

özel değerini bulduktan sonra bu kez bu değerini genel çözümde yerine konulmasıyla,

$$\frac{\cos x}{y} = 1 - x$$

şeklinde erişiriz.

SORU 4. $2y' \cos x = 2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \sin x$ fonksiyonu olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Bize soruda verilmiş bulunan birinci mertebeden adi diferansiyel denkleme dikkatlice bakıldığında; onun,

$$y' + p(x) \cdot y^2 + q(x) \cdot y + r(x) = 0$$

şeklinde bir yapıya sahip olduğu ve dolayısıyla **Riccati Diferansiyel Denklemi** türünde bir denklemle karşı karşıya bulunduğumuz açıkça görülebilir. O halde, bu tür diferansiyel denklemlerin bir özel çözümü olan $y_1 = y_1(x)$ fonksiyonu biliniyorsa

genel çözümünün bulunması için yapılması gereken $y = y_1 + \frac{1}{u}$ dönüşümü

uygulanmak suretiyle yeni $u = u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu cinsinden Lineer Diferansiyel Denklemler elde edilerek çözüme ulaşılabacağı bilgisinden hareket edelim.

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \sin x + \frac{1}{u} . \Rightarrow y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} = \cos x - \frac{u'}{u^2} .$$

Bu dönüşümü tatbik edelim.

$$2 \cdot \left(\cos x - \frac{u'}{u^2} \right) \cdot \cos x = 2 \cos^2 x - \sin^2 x + \left(\sin x + \frac{1}{u} \right)^2 .$$

$$2 \cos^2 x - 2 \frac{u'}{u^2} \cdot \cos x = 2 \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x + \frac{2 \sin x}{u} + \frac{1}{u^2} .$$

$$- 2 \frac{u'}{u^2} \cdot \cos x = \frac{2 \sin x}{u} + \frac{1}{u^2} . \Rightarrow - 2 \cdot u' \cdot \cos x = 2 \cdot u \cdot \sin x + 1 .$$

$$- 2 \cdot u' \cdot \cos x - 2 \cdot u \cdot \sin x = 1 . \Rightarrow u' \cdot \cos x + u \cdot \sin x = - \frac{1}{2} .$$

$$\Rightarrow u' + u \cdot \tan x = - \frac{1}{2} \sec x . : \text{Lineer Diferansiyel Denklemler}$$

$$\lambda = \lambda(x) = e^{\int \tan x \, dx} = e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x .$$

Bulduğumuz $\lambda = \lambda(x) = \sec x$ fonksiyonu ile denklemin her iki tarafını çarpalım.

$$u' + u \cdot \tan x = - \frac{1}{2} \sec x .$$

$$u' \cdot \sec x + u \cdot \sec x \cdot \tan x = - \frac{1}{2} \sec^2 x .$$

Eşitliğin sol tarafının $(\lambda \cdot u)' = (u \cdot \sec x)'$ şeklindeki çarpımın türevi ifadesinin açılmış şekli olduğunun görülmesi üzerine aşağıdaki aşamalar izlenerek çözüme ulaşılır.

$$\frac{d}{dx} (u \cdot \sec x) = - \frac{1}{2} \sec^2 x . \Rightarrow d(u \cdot \sec x) = - \frac{1}{2} \sec^2 x \, dx .$$

$$\int d(u \cdot \sec x) = - \frac{1}{2} \int \sec^2 x \, dx . \Rightarrow u \cdot \sec x = - \frac{1}{2} \int (1 + \tan^2 x) \, dx .$$

$$u \cdot \sec x = -\frac{1}{2} \tan x + C. \quad \Rightarrow \quad 2 u \cdot \sec x = -\tan x + 2C.$$

Yaptığımız $u = u(x)$ dönüşünün karşılığını bulalım.

$$y = \sin x + \frac{1}{u}. \quad \Rightarrow \quad y - \sin x = \frac{1}{u}. \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{y - \sin x}.$$

Elde ettiğimiz bu sonuçta $u = u(x)$ fonksiyonunun karşılığını yerine koyalım.

$$2 \cdot \frac{1}{y - \sin x} \cdot \sec x = -\tan x + 2C. \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \cdot \sec x}{y - \sin x} = -\tan x + K.$$

$$\frac{2}{y - \sin x} = -\sin x + K \cdot \cos x.$$

SORU 5: $(x + 2y + 3) dx + (2x + 3y + 4) dy = 0$
diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 PUAN)**

ÇÖZÜM Soruda, bize, $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ formunda verilmiş bulunan birinci mertebeden adi diferansiyel denkleme bakıldığında; ilk olarak, onun, **Homojen Hale Gelebilen** tipte bir diferansiyel denklem olduğu kolaylıkla görülebilmektedir. O halde, yapılması gereken dönüşümler

$$h, k \in R \quad \text{olmak üzere,} \quad \begin{aligned} x &= x_1 + h. \quad \Rightarrow \quad dx = dx_1 \\ y &= y_1 + k. \quad \Rightarrow \quad dy = dy_1 \end{aligned} \quad \text{şeklindedir.}$$

Buradan,

$$[(x_1 + h) + 2(y_1 + k) + 3] dx_1 + [2(x_1 + h) + 3(y_1 + k) + 4] dy_1 = 0$$

$$(x_1 + 2y_1 + h + 2k + 3) dx_1 + (2x_1 + 3y_1 + 2h + 3k + 4) dy_1 = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Son diferansiyel denklemin Homojen Dif. Denklem haline gelmesi için,

$$\begin{aligned} h + 2k + 3 &= 0 \\ 2h + 3k + 4 &= 0 \end{aligned}$$

olması gerektiği açıktır. Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda ise, $h = 1$, $k = -2$ değerleri elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + 1 & \Rightarrow & x_1 = x - 1 \\ y &= y_1 - 2 & \Rightarrow & y_1 = y + 2 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda, ortaya çıkan

$$(x_1 + 2y_1) dx_1 + (2x_1 + 3y_1) dy_1 = 0$$

diferansiyel denklemi, artık, bir homojen diferansiyel denklem haline gelmiş olup; bu duruma uyan

$$y_1 = u \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad dy_1 = u dx_1 + x_1 du \quad \text{dönüşümü yapılarak,}$$

$$(x_1 + 2u x_1) dx_1 + (2x_1 + 3u x_1) (u dx_1 + x_1 du) = 0$$

denklemine erişilir. Buradan, parantezleme yapılması sonucunda gelen

$$x_1 \cdot [(1 + 2u) dx_1 + (2 + 3u)(u dx_1 + x_1 du)] = 0$$

x_1 çarpanı kısaltılarak,

$$(1 + 2u + 2u^2 + 3u^2) dx_1 + (2 + 3u) x_1 du = 0$$

$$(3u^2 + 4u + 1) dx_1 + (2 + 3u) x_1 du = 0$$

şeklinde Değişkenlerine Ayrılabilen Denklem türünde bir diferansiyel denkleme ulaşılır. Devam edilerek,

$$(3u^2 + 4u + 1) dx_1 = - (2 + 3u) x_1 du$$

$$\frac{dx_1}{x_1} = - \frac{3u + 2}{3u^2 + 4u + 1} du$$

aşamasından sonra; her iki tarafın aynı anda integralinin alınmasıyla,

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = - \int \frac{3u + 2}{3u^2 + 4u + 1} du$$

eşitliğine ulaşılır. Sağ taraftaki integralde, $3u^2 + 4u + 1 = t \Rightarrow (6u + 4) du = dt$

dönüşümü uygulandığında; bu durumda $2(3u + 2) du = dt \Rightarrow (3u + 2) du = \frac{1}{2} dt$

olacağından,

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}$$

eşitliğine ulaşılır. Her iki taraftaki integrallerin kolayca alınmasıyla,

$$\ln x_1 + \ln C = - \frac{1}{2} \ln t$$

sonucu elde edilir. Buradan, logaritma fonksiyonunun özellikleri de kullanılarak,

$$\begin{aligned} \ln (C \cdot x_1) &= \ln t^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow C \cdot x_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow C^2 \cdot x_1^2 = \frac{1}{t} \Rightarrow \\ x_1^2 \cdot t &= \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenmiş sonuca ulaşılır. Sağ taraftaki integrali almak üzere yapılmış olan değişken değiştirmesi yerine iade olunarak ve keyfi sabit yeniden tanımlanmak suretiyle,

$$x_1^2 \cdot t = \frac{1}{C^2} \Rightarrow x_1^2 \cdot t = K \Rightarrow x_1^2 \cdot (3u^2 + 4u + 1) = K$$

eşitliğine geçilir. Homojen diferansiyel denklemin çözümü için yapılmış bulunan $y_1 = u \cdot x_1$ dönüşümü de yerine aide olunarak,

$$x_1^2 \cdot \left(3 \frac{y_1^2}{x_1^2} + 4 \frac{y_1}{x_1} + 1 \right) = K \Rightarrow 3 y_1^2 + 4 x_1 y_1 + x_1^2 = K$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak da, $\begin{aligned} x &= x_1 + 1 \Rightarrow x_1 = x - 1 \\ y &= y_1 - 2 \Rightarrow y_1 = y + 2 \end{aligned}$ karşılıkları

yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned} 3 (y + 2)^2 + 4 (x - 1) (y + 2) + (x - 1)^2 &= K \\ 3 (y^2 + 4y + 4) + 4 (xy + 2x - y - 2) + (x^2 - 2x + 1) &= K \\ 3y^2 + 12y + 12 + 4xy + 8x - 4y - 8 + x^2 - 2x + 1 &= K \\ 3y^2 + x^2 + 4xy + 6x + 8y + 12 - 8 + 1 &= K \\ 3y^2 + x^2 + 4xy + 6x + 8y + 5 &= K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y^2 + x^2 + 4xy + 6x + 8y &= K - 5 \\ 3y^2 + x^2 + 4xy + 6x + 8y &= A \end{aligned} \Rightarrow$$

şeklinde sonuca ulaşılır.

2 nci Yol : Bu diferansiyel denklem; aynı zamanda bir Tam Diferansiyel Denklem olduğundan dolayı ikinci bir çözüm yolu olarak izlenerek de çözülebilir.

$$(x + 2y + 3) dx + (2x + 3y + 4) dy = 0$$

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = 2.$$

$$\Rightarrow M_y = N_x : \text{Tam Diferansiyel Denklem}$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 2.$$

$$u = f(x, y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

$$du = 0.$$

$$\Rightarrow u(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = x + 2y + 3. \Rightarrow u = f(x, y) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 3x + h(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = 2x + 3y + 4. \Rightarrow u = f(x, y) = 2xy + 3\frac{y^2}{2} + 4y + k(x).$$

Bu durumda, tam diferansiyeli alınmış $u = f(x, y)$ fonksiyonunun, $A \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$u = f(x, y) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 3\frac{y^2}{2} + 3x + 4y + A$$

şeklinde olduğu ortaya çıkmaktadır. O halde, genel çözüme, gerekli olan bazı düzenlemeler de yapılarak,

$$u(x, y) = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 2xy + 3\frac{y^2}{2} + 3x + 4y + A = C$$

$$\frac{x^2}{2} + 2xy + 3\frac{y^2}{2} + 3x + 4y = C - A \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 2xy + 3\frac{y^2}{2} + 3x + 4y = B$$

$$x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x + 8y = 2B \Rightarrow x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x + 8y = K$$

şeklinde sonuca ulaşılır. İkinci yoldan ulaşılan sonucun ilk çözümde elde edilen ile aynı olduğu görülmektedir.

SORU 6 : $(e^y + x + x \cdot \cos y) dy + (e^x + y + \sin y) dx = 0$
diferansiyel denkleminin $x = 0$ için $y = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümünü bulunuz.

CÖZÜM Bize, yine, $M (x , y) dx + N (x , y) dy = 0$ kalıbında verilmiş olduğu görülen bu birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi; belirtilen şekle getirip, baktığımızda; onun,

$$(e^x + y + \sin y) dx + (e^y + x + x \cdot \cos y) dy = 0$$

$$M (x , y) dx + N (x , y) dy = 0$$

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + \cos y$$

$$\Rightarrow M_y = N_x$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \cos y$$

olmasından dolayı Tam Diferansiyel Denklem türünde bir denklem olduğunu görüyoruz.

O halde, bu diferansiyel denklem,

$$z = f (x , y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$$

$$dz = 0$$

$$\Rightarrow z (x , y) = C$$

şeklinde çözülecektir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M (x , y) = e^x + y + \sin y . \Rightarrow z = f (x , y) = e^x + xy + x \cdot \sin y + h (y) .$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = N (x , y) = e^y + x + x \cdot \cos y . \Rightarrow z = f (x , y) = e^y + xy + x \cdot \sin y + k (x) .$$

Bu durumda, tam diferansiyeli alınmış $z = f (x , y)$ fonksiyonunun, $A \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$z = f (x , y) = e^x + xy + x \cdot \sin y + e^y + A$$

şeklinde olduğu ortaya çıkmaktadır. O halde, gerekli olan bazı düzenlemeler de yapılarak,

$$z (x , y) = C \Rightarrow e^x + xy + x \cdot \sin y + e^y + A = C$$

$$e^x + xy + x \cdot \sin y + e^y = C - A \Rightarrow e^x + xy + x \cdot \sin y + e^y = K$$

şeklinde genel çözüme ulaşılır. İstenilen, $x = 0$ için $y = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan

özel çözümleri elde etmek için; bu değerler, genel çözüm olan eğri ailesinin denkleminde yerlerine konulduğunda ortaya çıkan

$$e^0 + (0) \cdot (0) + (0) \cdot \sin 0 + e^0 = K \Rightarrow 1 + 0 + 0 + 1 = K \Rightarrow K = 2$$

değerini genel çözümde yerine koymak suretiyle,

$$e^x + x y + x \cdot \sin y + e^y = 2$$

integral (çözüm) eğrisi olarak bulunur.

SORU 7: $(2xy^2e^{xy} + x^2y^3e^{xy} + 2xy) dx + (x^3y^2e^{xy} - x^2) dy = 0$ diferansiyel denklemini Tam Diferansiyel Denklem haline getirerek çözünüz.

ÇÖZÜM

$$(2xy^2e^{xy} + x^2y^3e^{xy} + 2xy) dx + (x^3y^2e^{xy} - x^2) dy = 0$$

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy e^{xy} + 5x^2 y^2 e^{xy} + x^3 y^3 e^{xy} + 2x.$$

$$\Rightarrow P_y \neq Q_x.$$

$$Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 y^2 e^{xy} + x^3 y^3 e^{xy} - 2x.$$

a.) Önce, $\mu = \mu(x)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı arayalım.

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{4xy e^{xy} + 2x^2 y^2 e^{xy} + 4x}{x^3 y^2 e^{xy} - x^2} = 2x \frac{2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} + 4}{x^2(xy^2 e^{xy} - 1)} \neq f(x).$$

Görüldüğü gibi, $\mu = \mu(x)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı yoktur.

b.) Bu kez, $\mu = \mu(y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı arayalım.

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-4xy e^{xy} - 2x^2 y^2 e^{xy} - 4x}{2xy^2 e^{xy} + x^2 y^3 e^{xy} + 2xy} = \frac{-2}{y} \frac{2xy e^{xy} + x^2 y^2 e^{xy} + 2x}{2xy e^{xy} + x^2 y^2 e^{xy} + 2x} = h(y).$$

İntegrasyon çarpanı :

$$\mu = \mu(y) = e^{\int h(y) dy} = e^{-2 \int \frac{1}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = e^{\ln y^{-2}} = \frac{1}{y^2}.$$

Bulunan integrasyon çarpanı ile diferansiyel denklemimizin her iki tarafını çarparak, onu, bir Tam Diferansiyel Denklem haline getirelim.

$$(2xe^{xy} + x^2ye^{xy} + 2\frac{x}{y})dx + (x^3e^{xy} - \frac{x^2}{y^2})dy = 0.$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Denklemimizin, bir tam diferansiyel denklem haline gelip, gelmediğini kontrol edelim.

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2e^{xy} + x^2e^{xy} + x^3y^2e^{xy} - \frac{2x}{y^2}.$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2e^{xy} + x^3ye^{xy} - \frac{2x}{y^2}.$$

$$\Rightarrow M_y = N_x : \text{ Tam Diferansiyel}$$

Denklem

O halde, diferansiyel denklemimizin sol tarafı, iki değişkenli bir $u = f(x, y)$ fonksiyonunun tam (toplam) diferansiyeli alınarak elde edilmiştir. Bu durumda, diferansiyel denklemimizin genel çözümünün bulunması için izlenmesi gereken işlem sırası aşağıdaki gibidir.

$$u = f(x, y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

$$du = 0.$$

$$\Rightarrow u(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} + \frac{2x}{y} \Rightarrow u = f(x, y) = x^2e^{xy} + \frac{x^2}{y} + h(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x^3e^{xy} - \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow u = f(x, y) = x^2e^{xy} + \frac{x^2}{y} + k(x).$$

Bu durumda, tam diferansiyeli alınmış $u = f(x, y)$ fonksiyonunun, $A \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$u = f(x, y) = x^2e^{xy} + \frac{x^2}{y} + A$$

şeklinde olduğu ortaya çıkmaktadır. O halde, genel çözüme, bazı düzenlemeler de yapmak suretiyle,

$$u(x, y) = C \Rightarrow x^2 e^{xy} + \frac{x^2}{y} + A = C \Rightarrow x^2 e^{xy} + \frac{x^2}{y} = C - A$$

$$x^2 e^{xy} + \frac{x^2}{y} = K \Rightarrow x^2 y e^{xy} + x^2 = K y$$

şeklinde ulaşılır.

SORU 8: $x \cdot y' \cdot \ln x + y = 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM Soruda bize verilmiş olan birinci mertebeden ve birinci dereceden adi diferansiyel denkleme bakıldığında; onun, **Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler** türünden olduğu kolaylıkla görülebilmektedir. O halde, gereken hazırlıklar

$$x \cdot y' \cdot \ln x = 1 - y$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \ln x = - (y - 1)$$

$$\frac{dy}{y - 1} = - \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

şeklinde yapıp, denklemin her iki tarafı integrasyona hazırlandıktan sonra; geçilen,

$$\int \frac{dy}{y - 1} = - \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

eşitliğinin sol tarafındaki integralde $u = y - 1 \Rightarrow du = dy$ ve sağ tarafındaki integralde

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \text{ dönüşümleri uygulanarak elde edilen,}$$

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{dt}{t}$$

integralleri rahatlıkla alınmak ve diğer gereken işlemleri yapmak suretiyle,

$$\ln u = -\ln t + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln u = \ln \left(\frac{C}{t} \right) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{C}{t}$$

$$u = \frac{C}{t} \quad \Rightarrow \quad u \cdot t = C \quad \Rightarrow \quad (y - 1) \cdot \ln x = C$$

şeklinde genel çözüme ulaşılır.

2 nci Yol: Soruda bize verilmiş bulunan diferansiyel denklemin, aynı zamanda, birinci mertebeden ve birinci dereceden bir adi diferansiyel denklem; yani,

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

yapısına sahip olan bir **Lineer Diferansiyel Denklem** olduğu görüldüğünden dolayı bir kez de bu yoldan gidilerek çözümü bulunabilir.

Bilindiği üzere, bu tür diferansiyel denklemleri çözmek için denklemin her iki tarafını

$$\lambda = \lambda(x) = e^{\int P(x) dx}$$

şeklinde bulunan $\lambda = \lambda(x)$ fonksiyonu ile çarpmak gerekir. Belirtilen $P(x)$ fonksiyonunu doğru olarak almak için denklemimiz uygun forma getirildiğinde,

$$y' + \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot y = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

şeklinde düzenlenen yapıda; bu fonksiyonun, $P(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ olduğu görülmektedir.

O halde,

$$\lambda = \lambda(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx}$$

şeklinde elde edilecek olan λ fonksiyonun bulunması için integralde $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

dönüşümü uygulanırsa, $\lambda = \lambda(x)$ fonksiyonu,

$$\lambda = \lambda(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx} = e^{\int \frac{dt}{t}} = e^{\ln t} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$$

olarak bulunur. Bulunan bu λ fonksiyonu ile diferansiyel denklemimizin her iki tarafı çarpılırsa,

$$y' + \frac{1}{x \cdot \ln x} y = \frac{1}{x \cdot \ln x} \quad \Rightarrow \quad y' \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x}$$

denklemini elde edilir ki, bu denklemin sol tarafının $(\lambda \cdot y) = (y \cdot \ln x)$ çarpımının türevi

olduğu açıkça görülmektedir. O halde, bilinen çözüm yolu izlenerek,

$$\frac{d}{dx} (y \cdot \ln x) = \frac{1}{x} \Rightarrow d(y \cdot \ln x) = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int d(y \cdot \ln x) = \int \frac{1}{x} dx$$

$$y \cdot \ln x = \ln x + \ln C \Rightarrow \ln x^y = \ln (C \cdot x) \Rightarrow x^y = C \cdot x$$

şeklinde genel çözüme erişilir. İlk çözüm yolundan gidilerek bulunan $(y-1) \cdot \ln x = C$ sonucu;

$$(y-1) \cdot \ln x = \ln K \Rightarrow \ln x^{y-1} = \ln K \Rightarrow x^{y-1} = K \Rightarrow x^y \cdot x^{-1} = K \Rightarrow x^y \cdot \frac{1}{x} = K \Rightarrow x^y = Kx \text{ şeklinde düzenlendiğinde aynı eğri ailesi olduğu görülür.}$$

SORU 9: $x(x^2 - 1)y' + xy = \frac{x+1}{y^3}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM Soruda bize verilmiş olan diferansiyel denklem biraz düzenlenip,

$$y' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot y = \frac{1}{x \cdot (x - 1)} y^{-3}$$

haline getirilirse, onun; $n \in \mathbb{Q}$ (n , bir rasyonel sayı) olmak üzere,

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

şeklinde belirtilen yapıya sahip olan **“Bernoulli Diferansiyel Denklemi”** tipinde bir birinci mertebeden ve birinci dereceden adi diferansiyel denklem olduğu açıkça görülür. Bundan sonra,

$$y^3 \cdot y' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot y^4 = \frac{1}{x \cdot (x - 1)}$$

yapılıp; $y^4 = u \Rightarrow 4y^3 y' = u' \Rightarrow y^3 \cdot y' = \frac{u'}{4}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{u'}{4} + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot u = \frac{1}{x \cdot (x - 1)}$$

ve buradan

$$u' + \frac{4}{x^2 - 1} u = \frac{4}{x \cdot (x - 1)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin, $u' + P(x) \cdot u = Q(x)$ şeklinde birinci mertebeden bir **“Lineer Diferansiyel Denklem”** haline geldiğini görüyoruz. Bilindiği gibi, birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için

$$\lambda = \lambda(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{4}{x^2-1} dx}$$

fonksiyonu ile denklemimizin her iki tarafının çarpılması gerekir. Buradaki integralin alınması için yapılması gereken Basit Kesirlere Ayırma işlemi aşağıdaki gibi uygulanır.

$$\frac{4}{x^2-1} \equiv \frac{4}{(x+1) \cdot (x-1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \cdot x \equiv (A+B) \cdot x \\ 4 \equiv A-B \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = +2 \\ B = -2 \end{array} \right\}.$$

O halde, incelenen rasyonel kesir ifadesi

$$\frac{4}{x^2-1} \equiv \frac{4}{(x+1) \cdot (x-1)} \equiv \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılma işlemine tabii tutulur. Buna bağlı olarak,

$$\lambda = \lambda(x) = e^{\int \frac{4}{x^2-1} dx} = e^{\int (\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}) dx} = e^{2 \ln(x-1) - 2 \ln(x+1)} = e^{2 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

şeklinde elde edilen $\lambda = \lambda(x)$ fonksiyonu ile diferansiyel denklemimizin her iki tarafı çarpılırsa,

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \cdot u' + \frac{4(x-1)}{(x+1)^3} \cdot u = \frac{4(x-1)}{x \cdot (x+1)^2}$$

şeklinde ortaya çıkan denklemin sol tarafı, $u \cdot \lambda = u \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ çarpımının türevi olur.

Bunun böyle olduğu da, kontrol edildiğinde görülebilir. O halde,

$$\frac{d}{dx} \left[u \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \right] = \frac{4(x-1)}{x \cdot (x+1)^2} \Rightarrow d \left[u \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \right] = \frac{4(x-1)}{x \cdot (x+1)^2} dx$$

şeklinde yazılıp, her iki tarafta birden integral almaya geçildiğinde;

$$\int d \left[u \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \right] = \int \frac{4x-4}{x \cdot (x+1)^2} dx \Rightarrow$$

$$u \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \int \frac{4x-4}{x \cdot (x+1)^2} dx$$

eşitliğine erişilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integralin alınması için yine Basit Kesirlere Ayırma işlemine gerek bulunmaktadır.

$$\frac{4x - 4}{x \cdot (x + 1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

$$4x - 4 \equiv A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx.$$

$$4x - 4 \equiv A(x^2 + 2x + 1) + Bx(x + 1) + Cx.$$

$$4x - 4 \equiv Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx.$$

$$4x - 4 \equiv (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A.$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0. \\ 2A + B + C = 4. \\ A = -4. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -4. \\ B = +4. \\ C = +8. \end{array} \right\}.$$

$$\frac{4x - 4}{x \cdot (x + 1)^2} \equiv -\frac{4}{x} + \frac{4}{x + 1} + \frac{8}{(x + 1)^2}.$$

Bu aşamadan sonra sağ taraftaki integral,

$$u \cdot \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^2 = \int \left[-\frac{4}{x} + \frac{4}{x + 1} + \frac{8}{(x + 1)^2} \right] dx$$

$$u \cdot \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^2 = -4 \cdot \int \frac{dx}{x} + 4 \cdot \int \frac{dx}{x + 1} + 8 \cdot \int \frac{dx}{(x + 1)^2}$$

şeklinde yazılıp, ortaya çıkan integraller kolaylıkla alınarak;

$$u \cdot \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^2 = -4 \cdot \ln x + 4 \cdot \ln(x + 1) - 8 \cdot \frac{1}{x + 1} + C$$

sonucuna ulaşılır. Başlangıçta yapılan $u = y^4$ dönüşümü iade edilerek,

$$y^4 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 = -4 \cdot \ln x + 4 \cdot \ln(x+1) - \frac{8}{x+1} + C$$

ve logaritma fonksiyonunun özelliklerinden de yararlanmak suretiyle elde edilen sonuç,

$$y^4 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + \frac{8}{x+1} = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^4 + C$$

şeklinde düzenlenebilir.