MATRİSLER

Tanım: Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olabilen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

şeklindeki düzenli tabloya m satır ve n sütunlu bir matris veya kısaca $m\times n$ matris denir. $m\times n$'e matrisin mertebesi denir.

Elemanları a_{ij} ler olan bir A matrisi $A=[a_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

ÖR/ $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$D=\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 2i & i+5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ birer matristir.

Tanım: Bir tek satırdan oluşan matrise satır matris denir. Satır matrisin mertebesi $1\times n$ dir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

Bir tek sütundan oluşan matrise sütun matris denir. Sütun matris $m\times 1$ mertebelidir.

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Tanım; Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matris denir.

$$A=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Tanım; Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matris denir. Kare matris $n\times n$ mertebelidir.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}_{3\times3}$$

kare matrislerdir.

$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ mertebeli kare matris ise

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına A nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matrisin asal köşegen elemanlarının toplamına da kare matrisin izi denir.

Yani $\quad iz\,A = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ dir.

Tanım; $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa matrise köşegen matris denir.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$ köşegen matris örnekleridir.

Tanım; Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=k$ ise matrise skaler matris denir.

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$ skaler matristir.

Tanım; Bir skaler matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar 1 ise matrise birim matris denir. nxn mertebeden birim matris I_n ile gösterilir.

$$I_1 = [1] \quad , I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{--- dir.}$$

Tanım; Karşılıklı elemanları eşit olan aynı mertebeden matrislere eşit matrisler denir. mxn mertebeden $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri eşit ise $A = B$ şeklinde yazılır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & z & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ x & -5 & y \end{bmatrix}$ matrislerinin eşit olması için $x = 2$, $y = 4$ $z = -5$ olmalıdır.

Tanım; Aynı mertebeden iki matrisin toplamı karşılıklı elemanların toplamıyla elde edilen, aynı merteben bir matristir.

$$A = [a_{ij}]_{mxn} \text{ ve } B = [b_{ij}]_{mxn} \text{ ise } A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} \text{ dir.}$$

Farklı mertebeden matrisler toplanamazlar.

Tanım; A bir matris ve λ bir skaler olmak üzere, λA skaler çarpımı A nın her bir elemanının λ ile çarpılmasından elde edilen bir matristir.

$(-1)A$ çarpımı $-A$ ile gösterilir.

Bu iki matrisin farkı

$$A - B = A + (-B) = A + (-1)B \text{ dir.}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $3A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorem; A, B, C aynı mertebeden matrisler ve k, ℓ birer skaler olmak üzere,

1) $A+B = B+A$
2) $A+(B+C) = A+(B+C)$
3) $A+O = A$
4) $A-A = O$
5) $k(A+B) = kA+kB$
6) $(k+\ell)A = kA+\ell A$
7) $(k\ell)A = k(\ell A)$

Tanım; $A = [a_{ij}]$ bir $m\times r$ matris ve $B = [b_{ij}]$ bir $r\times n$ matris ise bunların çarpımı $i = 1 .. m$ $j = 1 .. n$ için

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

olmak üzere $AB = [c_{ij}]$ $m\times n$ - matristir.

Herhangi iki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Teorem; A, $m\times n$ matris, B ve C, $n\times r$ matrisler, D, $r\times t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere

1) $A(BD) = (AB)D$
2) $A(B+C) = AB + AC$
3) $(B+C)D = BD + CD$
4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
5) $A0 = 0$
6) $AI = IA = A$
7) Genellikle $AB \neq BA$ dır. A ve B iki kare matris olmak üzere $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B ye değişmelidir denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olup $AB \neq BA$ dır.

Tanım; A bir kare matris olsun. A'nın n defa kendisiyle çarpımı sonucunda elde edilen matrise A'nın n. kuvveti denir. Yani

$$A \cdot A \cdots A = A^n \text{ der.}$$

$A^k \cdot A^\ell = A^{k+\ell}$ ve $(A^k)^\ell = A^{k\ell}$ $\quad (k, \ell \in \mathbb{N})$ dir.

Tanım; Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise A'nın transpozesi denir ve A^t ile gösterilir.

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi ise $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$ matrisidir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $B^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$C = [6]$ $C^t = [6]$ dır.

Teorem; A ve B aynı mertebeden iki matris ve λ bir skaler olmak üzere

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(A^t)^t = A$

3) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

4) $(AB)^t = B^t A^t$ dir.

Tanım; $A^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ dir.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ bir simetrik matristir.

Tanım; $A^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ters-simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir ters simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ dir. Şu halde bir ters simetrik matriste asal köşegen elemanları hep sıfırdır.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ bir ters simetrik matristir.

Tanım; A_{nxn} kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

Tanım; Bir A kare matrisi için $A^{p+1} = A$ olacak şekilde bir pozitif p tamsayısı varsa A matrisine periyodik matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı p ye de A matrisinin periyodu denir.

$A^2 = A$ ise A matrisine idenpotent matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$ matrisi bir idempotent matristir.

Tanım; Bir A kare matrisi için $A^q = 0$ olacak şekilde bir pozitif q varsa A matrisine nilpotent matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı q ye de nilpotent matrisin indeksi (derecesi) denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ üçüncü dereceden bir nilpotent matristir.

Tanım; $A^2 = I$ olacak şekilde A kare matrisine involut matris denir.

Tanım; Elemanları karmaşık sayılar olan bir A matrisinde her elemanın yerine eşleniğinin yazılmasıyla elde edilen matrise A matrisinin eşleniği denir $\overline{A}$ ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & 7i \\ 3-4i & i & 1+i \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & -7i \\ 3+4i & -i & 1-i \end{bmatrix}$$ dir.

Teorem; A ve B aynı mertebeden iki matris ve λ herhangi bir skaler olsun.

i) $\overline{\overline{A}} = A$

ii) $\overline{kA} = k\overline{A}$

iii) $(\overline{A+B}) = \overline{A} + \overline{B}$

iv) A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere

$$(\overline{AB}) = \overline{A}\,\overline{B}$$

Tanım; $(\overline{A})^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine Hermitian matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ kare matrisi Hermitian matris ise $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ dir. Bir hermitian matrisin köşegen elemanları reel sayılardır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$ matrisi bir hermitian matrisdir.

Tanım; $(\overline{A})^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ters-hermitian matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ kare matrisi ters-hermitian matris ise $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ dir. Bir ters Hermitian matrisin köşegen elemanları 0 veya sanal sayılardır.

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$ matrisi bir ters hermitian matristir.

Tanım; A, bir kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine <u>ortogonal matris</u> denir.

Tanım; A, nxn mertebesinden bir kare matris olmak üzere $AB = BA = I_n$ bağıntısını sağlayan (eğer varsa) B matrisine A matrisinin tersi veya inversi denir. A matrisinin inversi A^{-1} ile gösterilir. Her kare matrisin tersi yoktur.

ÖR/ * $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ $(k \in R)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım; A, nxn mertebesinden bir kare matris olmak üzere A nın tersi yoksa A ya singüler veya tekil matris denir.

* nxn mertebeden A kare matrisinin tersi varsa bu bir tanedir.

Elemanter Satır ve Sütun işlemleri:

1) Matriste herhangi i ve j numaralı satırların yerlerini değiştirmek, bu işlem H_{ij} ile gösterilir.

2) Matriste herhangi i ve j numaralı sütunların yerlerini değiştirmek. Bu işlem K_{ij} ile gösterilir.

3) Matriste i numaralı satır elemanlarını sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpmak $H_i(k)$ ile gösterilir.

4) Matriste j numaralı sütun elemanlarını sıfırdan farklı bir ℓ sayısı ile çarpmak $K_j(\ell)$ ile gösterilir.

5) Matriste herhangi bir i numaralı satır elemanlarını sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpıp herhangi j numaralı satır elemanlarına eklemek.

$H_{ji}(k)$ ile gösterilir.

6) Matriste herhangi bir i numaralı sütun elemanlarını sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpıp herhangi j numaralı sütun elemanlarına eklemek

$K_{ji}(k)$ ile gösterilir.

Tanım: (Denk matris)

Bir A matrisine ard arda elemanter satır (veya sütun işlemleri) uygulayarak B matrisi elde edilirse A ve B matrislerine satırca (veya sütunca) denk matrisler denir. $A \sim B$ ile gösterilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine denk matris bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{12}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{21}(1)\quad H_{31}(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 15 & 9 \end{bmatrix} = B$$

Tanım; Bir matris aşağıdaki şekilde ise satırca indirgenmiş formdadır.

1) Matriste sıfır satırı (yani tamamı sıfırdan oluşan satır) varsa bu satır matrisin en altında olmalıdır.

2) Bir satırda sıfırdan farklı ilk eleman 1 olmalıdır.

3) Bu 1 ler bir önceki satırın 1 ine göre sağ ve altta konumlanmalıdır.

4) Bir sütunda 1 varsa o sütundaki diğer tüm elemanlar sıfır olmalıdır.

1, 2, 3 koşulunu sağlayan matris satırca indirgenmiş formda 4 koşuluda sağlarsa satırca indirgenmiş eşolan formdadır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ satırca indirgenmiş formdadır.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ satırca indirgenmiş formda değildir.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satırca indirgenmiş formda değil

$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satırca indirgenmiş formda değildir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ satırca indirgenmiş eşolan formdadır.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satırca indirgenmiş eşolan formda değildir.

Tanım; Bir matrisin Rangı

Satırca indirgenmiş formdaki bir matrisin sıfırdan farklı satırlarının sayısına o matrisin rangı denir. r_A ile gösterilir.

Ör/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $r_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_A = 2$$

$H_{21}(-3)$ $H_2(1/4)$

Ör/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ $r_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-3)$, $H_{31}(-2)$, $H_{41}(-5)$, $H_{51}(-1)$, $H_{42}(-1)$, $H_3(-1/5)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_A = 3$$

H_{45}, H_{23} $H_{32}(4)$, $H_{42}(-1)$ $H_{43}(-1)$, $H_3(-1/2)$

Tanım; Bir matrise elemanter satır ve elemanter sütun işlemleri uygulanarak matris hem satırca hem de sütunca indirgenmiş eşolan forma getirilebilir. Böylece matris aşağıdaki şekillerden birine denk olur.

$$[I_k, 0] \quad , \quad \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad I_k$$

Bir matrisi yukarıdaki formlardan herhangi biri şeklinde yazmaya matrisi normal şekle getirme denir. Matrisin rangı k olur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ matrisini normal forma getiriniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -8 \end{bmatrix} \underset{H_{21}(-2)\ \ H_{31}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \underset{H_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{H_{12}(1)\ ,\ H_{32}(-2)}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{K_{23}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \sim \underset{K_{31}(-3)\ ,\ K_{41}(-2)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{K_{42}(3)}{\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}^{I_2} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}}$$

A matrisi $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ normal formuna getirilmiştir.

$r_A = 2$ dir.

Teorem; Bir A kare matrisinin tersinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul birim matrise satırca denk olmasıdır. n-inci mertebeden bir regüler A matrisi için

$[A ; I_n] \sim [I_n ; A^{-1}]$ olacak şekilde bulunan

A^{-1} matrisi A matrisinin tersidir.

ÖR/ $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

$$[A ; I_n]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$H_{21}(-1)$, $H_{31}(-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3 ; A^{-1}]$$

$H_{12}(-3)$ $\quad$ $H_{13}(-3)$ $\quad$ I_3 $\quad$ A^{-1}

ÖR/ A ve B değişmeli iki kare matris ise A^n ve B^m matrislerinin de değişmeli olacağını gösteriniz.

Çözüm: A ve B değişmeli olduğundan $AB=BA$ dır.

$A^n B^m$ çarpımında her seferinde AB yerine BA yazılarak yani

$$A^n B^m = AA\ldots \underbrace{A.B}_{BA}.B\ldots B$$

$$A^n B^m = BB\ldots B.A.A\ldots A = B^m A^n \text{ elde edilir.}$$

yani A^n ve B^m değişmelidir.

ÖR/ $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm:

Tümevarım yöntemiyle $n=1$ için doğruluğu açıktır.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edip n için ispat yapalım.

$n-1$ için $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$ dir.

n için

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

ÖR/ $(A-B)^t = A^t - B^t$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$(A+B)^t = A^t + B^t$

ve

$(kA)^t = kA^t$ olduğunu biliyoruz.

$$(A-B)^t = (A+(-1)B)^t = A^t + (-1)B^t$$
$$= A^t - B^t \text{ dir.}$$

ÖR/ A ve B matrisleri toplanabilir ve çarpılabilir iki kare matris olsun.

A ve B matrisleri değişmeli ise

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ olacağını gösteriniz.

Çözüm: A kare matrisi için

$A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ tane}}$ olduğundan ve $AB = BA$

verildiğinden

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - \underbrace{BA}_{AB} + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

elde edilir.

ÖR/ $A+A^t$ nin simetrik matris olduğunu gösteriniz.

$(A+A^t)^t = A+A^t$ olduğu gösterilmeli

($A^t = A$ ise A matrisi simetrik matris)

$$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$$
$$= A + A^t \text{ dir.}$$

İki özellik kullandık

$(A+B)^t = A^t + B^t$

$A+B = B+A$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$ matrisi idenpotent bir matris olduğuna göre k ne olmalıdır.

Çözüm:

A matrisi idenpotent ise $A^2 = A$ olmalı.

$$A.A = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-k & 3k-12 & k^2-k-15 \\ 1 & -3 & 15-4k \\ 4-k & 3k-12 & k^2-k-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$$

$A^2 = A$ dan $4-k=-1$

$k=5$ bulunur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri verilsin.

a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{bmatrix}$ ve

b) $B^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

a) $n=1$ için eşitlik açıktır. $n-1$ için kabul edip n için ispatlayalım.

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)a & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

b) Benzer şekilde

$n=1$ için eşitlik açıktır. $n-1$ için

$$B^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & (n-1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$B^n = B^{n-1}B = \begin{bmatrix} 1 & (n-1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

ÖR/ $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & y\\ x & -2 & 7\\ 8 & z & 0\end{bmatrix}$ matrisinin simetrik olması için x, y, z değerleri ne olmalıdır?

$A^t = A$ simetrik matris

$A^t = \begin{bmatrix}1 & x & 8\\ 5 & -2 & z\\ y & 7 & 0\end{bmatrix}$ $\quad A^t = A$

$$\begin{bmatrix}1 & x & 8\\ 5 & -2 & z\\ y & 7 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5 & y\\ x & -2 & 7\\ 8 & z & 0\end{bmatrix}$$

$x = 5 \quad z = 7 \quad y = 8$ olmalı

ÖR/ $A = \begin{bmatrix}5 & 2-i & 3\\ 2+i & 0 & -i\\ 3 & i & 7\end{bmatrix}$ matrisinin Hermitian matris olduğunu gösteriniz.

$(\bar{A})^t = A$ A matrisi hermitian

$\bar{A} = \begin{bmatrix}5 & 2+i & 3\\ 2-i & 0 & i\\ 3 & -i & 7\end{bmatrix}$ $\quad (\bar{A})^t = \begin{bmatrix}5 & 2-i & 3\\ 2+i & 0 & -i\\ 3 & i & 7\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}5 & 2-i & 3\\ 2+i & 0 & -i\\ 3 & i & 7\end{bmatrix}$ $\quad (\bar{A})^t = A$

A hermitian

ÖR/ $A+A^t$ nin simetrik matris olduğunu göster.

$(A+A^t)^t = A + A^t$ olduğu gösterilecek

$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$

* $(A+B)^t = A^t + B^t$
* $(A^t)^t = A$
* $A + B = B + A$

kullanıldı.

ÖR/ A ve B simetrik iki matris olmak üzere

$5A^7 + 7B^5$ matrisininde simetrik matris olduğunu gösteriniz.

A ve B simetrik matris ise $A^t = A$, $B^t = B$ dır.

$(5A^7 + 7B^5)^t = 5A^7 + 7B^5$ olduğu gösterilecek.

$$\begin{aligned}(5A^7 + 7B^5)^t &= (5A^7)^t + (7B^5)^t \\ &= 5(A^7)^t + 7(B^5)^t \\ &= 5(A^t)^7 + 7(B^t)^5 \\ &= 5.A^7 + 7.B^5\end{aligned}$$

DETERMİNANTLAR

Tanım; Bir A kare matrisinin determinantı det A veya $|A|$ ile gösterilir.

1) 1x1 mertebeli $A=[a]_{1\times1}$ determinantı

det $A=|A|=a$ dır.

2) 2x2 mertebeden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}_{2\times2}$ matrisinin determinantı

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

3) 3x3 mertebeli $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times3}$ matrisin determinantı

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

1. satıra göre açılımdır. İstediğiniz satıra ve sütuna göre açılımı yapabiliriz.

Tanım; $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ bir matris olsun ve M_{ij}, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle A dan elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ mertebeden matrisi göstersin. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir. Ayrıca $A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ değerine a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ olsun.

$M_{23} \rightarrow a_{23}$ elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen matrisdir.

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(8-25) = 17$$

Teorem; $n \geqslant 2$ olmak üzere A, $n \times n$ mertebeli bir kare matris olsun. $i = 1, 2 \ldots n$ ve $j = 1, 2 \ldots n$ için

$$\left.\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \\ &= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \text{ dir} \end{aligned}\right\} \text{Laplace Açılımı}$$

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = ?$

2. sütuna göre $a_{12} = -6$ $a_{22} = 0$ $a_{32} = 3$

$$|A| = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} = -6 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 = -12 + 15 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)(-5) = 5$$

Determinantın Özellikleri

1) Bir determinantta herhangi bir satır (ya da sütun) elemanlarının hepsi 0 ise determinantın değeri 0 dır.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2) Bir determinantın bir satırındaki (ya da sütunundaki) elemanlar bir k skaleri ile çarpılırsa determinant k ile çarpılmış olur.

ÖR

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot |A| \text{ dır.}$$

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \cdot 0 \\ -1 & 3 & 4 \cdot 2 \\ 0 & 1 & 4 \cdot 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

3) Determinantta herhangi iki satır (ya da sütun) yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

4) Bir determinantın herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları bir k skaleri ile çarpılıp bir başka satırın (ya da sütunun) elemanlarına eklenirse determinant değeri değişmez.

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ Birinci sütuna göre determinantı açarsak

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8-12 = -20$ bulunur.

5) Bir determinantın herhangi iki satırı (yada sütunu) birbirine eşit ise determinantın değeri 0 dır.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ 1 ve 3 satır aynı

6) Bir determinantın herhangi iki satır (yada sütun) elemanları orantılı ise determinantın değeri 0dır

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ 1 ve 2 sütun orantılı

7) Bir determinantın herhangi bir satır (yada sütun) elemanları başka bir satır (yada sütun) elemanlarının eşçarpanlarıyla çarpılarak elde edilen terimlerin toplamı 0 dır.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

1 satır elemanlarını 3 üncü satır elemanlarının eşçarpanları ile karşılıklı çarpıp toplayalım.

$a_{31} = -1 \quad a_{32} = 4 \quad a_{33} = 1$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1-6) = -7 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 1 \cdot (-7) - 1(-1) + 3 \cdot 2$$
$$= -7 + 1 + 6 = 0$$

8) $$\begin{vmatrix} a & d+e & k \\ b & f+g & s \\ c & h+l & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & k \\ b & f & s \\ c & h & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e & k \\ b & g & s \\ c & l & t \end{vmatrix}$$

9) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $|A| = |A^t|$

10) $|AB| = |A| \cdot |B|$

11) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

12) $|A^k| = |A|^k \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$

13) $|kA| = k^n |A|$ dir. ($n\times n$ mertebe)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = t \text{ ise } \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2 t \text{ dir.}$$

Bir Matrisin Tersi;

Tanım; Bir kare matrisin elemanlarının yerine, o elemanların eş çarpanlarının alınmasıyla elde edilen matrisin transpozesine ilk matrisin ek matrisi (adjoint matrisi) denir. Ek A, Adj A ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ ek matrisi}$$

$$\text{Ek } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{dır.}$$

ör/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \text{Ek}A = ?$

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$$\text{Ek}A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorem; A bir kare matris olsun.. $|A| \neq 0$ ise

$$A^{-1} = \frac{EkA}{|A|}$$ dır.

İspat: $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$EkA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ dır.

$$A.EkA = \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n} & \cdots \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$A.EkA = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A| . I$$

$A.EkA = |A|.I$ elde edilir.

$$\underbrace{A^{-1} A}_{I} . EkA = A^{-1} |A| . I$$

$$EkA = |A| . A^{-1} . I$$

$$EkA = |A| . A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{EkA}{|A|}$$ elde edilir.

Not: Bir A kare matrisi için $|A|=0$ ise A matrisinin tersi yoktur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$$

$$\text{Ek}A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Ek}A}{|A|} = \frac{-1}{17} \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/17 & 5/17 & -2/17 \\ 3/17 & -9/17 & 7/17 \\ -2/17 & 6/17 & 1/17 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin alt matrisi;

mxn mertebeli herhangi bir matrisin herhangi satır veya sütunlarının silinmesiyle oluşan matrislere alt matris denir.

Bir matrisin rangı: A, mxn mertebeli bir matris olsun. A nın kare alt matrisleri arasında determinantı sıfırdan farklı olanlardan mertebesi en büyük olanın mertebesine bir matrisin rankı denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matris 3x3 mertebeli

$|A| = 0$ (çünkü 3. satırın tümü 0)

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ dır. Alt kare matrisin mertebesi 2x2 old.dan A matrisinin rangı 2 dir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $r_A = ?$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $r_A = 3$ tür.

ÖR/

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5+6=11$$

ÖR/

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$ determinant özelliklerini kullanarak determinantı hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ÖR/

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$ determinant öz kullanarak determinantı hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b-a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ (c-a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c^2+ac-ab-b^2 \end{vmatrix}$$

$$c^2-b^2+a(c-b)$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & (c-b)(c+b)+a(c-b) \end{vmatrix}.$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

ÖR/ $\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix}$ det öz kullanarak çarpanlara ayırınız.

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & abc \\ b^2 & b^4 & abc \\ c^2 & c^4 & abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2 & b^4 & 1 \\ c^2 & c^4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2-a^2 & b^4-a^4 & 0 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & (b^2-a^2)(b^2+a^2) \\ c^2-a^2 & (c^2-a^2)(c^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2 \\ 1 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2 \\ 0 & c^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)$$

ÖR/ $\begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = 7$ old göre determinant özelliklerini kullanarak

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix}$$ determinant değerini hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 2 & s & u \end{vmatrix}$$

$$2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ -p & 1 & -w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = -2.7 = -14$$

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n-1 & 3n \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2-1 & n^2 \end{vmatrix} = 0$ old gösterin

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n & 2n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n^2-n & n^2-n & n^2-n & \cdots & n^2-n & n^2-n \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.}$$

orantılı

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = (-1)^{n-1}(n-1)$$ olduğunu gösteriniz.

Birinci sütuna diğer sütunları ekle

$$|A| = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$|A| = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$|A| = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (n-1).(-1)^{n-1}$$ bulunur.

ÖR/ $n\times n$ mertebeden

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y & x & \cdots & x \\ x & x+y & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{vmatrix}$$

determinant özellikleri yardımıyla hesaplayınız.

$$|A| = \begin{vmatrix} nx+y & x & \cdots & x \\ nx+y & x+y & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ nx+y & x & \cdots & x+y \end{vmatrix} = (nx+y) \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}$$

$$= (nx+y) \cdot y^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (nx+y)y^{n-1}$$

ÖR/ A, $n\times n$ mertebeli tekil olmayan bir kare matris ve $\text{Adj}\,A$, A nın ek matrisi ise $|\text{Adj}\,A| = |A|^{n-1}$ dir. Gösteriniz.

$|\text{Ek}A| = |\text{Adj}\,A| = |A|^{n-1}$ old gösterecepiz.

$$A \cdot \text{Ek}A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$ old biliyoruz.

$$A \cdot \text{Ek}A = |A|^n \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{birim matris}} = |A| \cdot I$$

$$|A| \cdot |\text{Ek}A| = |A|^n$$

$$|\text{Ek}A| = \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$$ dir.

ÖR/ A ve B , 3x3 mertebeden iki matris ve

$\det A = -7$, $\det B = 4$ olsun.

a) $\det(A^t (5B)^{-1})$ değerini hesaplayınız.

b) $\det(2A^{-1} + \mathrm{Adj}A)$ " "

a) $\det(A^t(5B)^{-1}) = \underbrace{\det A^t}_{\det A} \cdot \det\left(\frac{1}{5}B^{-1}\right)$

$= -7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det B^{-1}$

$= \frac{-7}{5^3} \cdot \frac{1}{\det B} = \frac{-7}{5^3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-7}{500}$

Kullanılan özellikler

1) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

2) $|kA| = k^n |A|$ $(n \times n)$

3) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

4) $A^{-1} = \frac{EkA}{|A|}$

5) $|A| = |A^t|$

b) $\det(2A^{-1} + \mathrm{Adj}A)) = \det\left[(2A^{-1}) + |A| \cdot A^{-1}\right]$

$= \det\left[(2A^{-1} - 7A^{-1})\right]$

$= \det\left[-5A^{-1}\right]$

$= (-5)^3 \cdot \det A^{-1}$

$= (-5)^3 \cdot \frac{1}{|A|}$

$= \frac{-125}{-7} = 125/7$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersinin olmaması için x bilinmeyenleri ne olmalıdır?

Tersinin olmaması içi $|A| = 0$ olmalıdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ x+2 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= x+2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$(x+2)(x-2)(x+4) = 0$$

$x = -2 \quad x = 2 \quad x = -4$

içi matrisin tersi yoktur.

ÖR/ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^4(4-x)$ eşitliğini determinant özelliklerini kullanarak ispatlayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -1-x & 1+x \\ 0 & 0 & -1-x & 0 & 1+x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 & 1+x \\ 0 & 1+x & 1+x & 1+x & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

Önce 1-inci satıra göre açıp sonra tüm satırlardan $(x+1)$ çarpanı dışarı alınarak

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -(1+x) & 1+x \\ 0 & -(1+x) & 0 & 1+x \\ -(1+x) & 0 & 0 & 1+x \\ 1+x & 1+x & 1+x & (1+x)(1-x) \end{vmatrix} = (x+1)(1+x)(1+x)(1+x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$+$

$$(x+1)^4\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2-x \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (x+1)^4(-1)^{4+1}\cdot 1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$+$

$$= -(x+1)^4\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-x \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^4(-1)^{3+1}\cdot 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^4\left[(-1)(3-x)-1\right]$$

$$= -(x+1)^4\left[\underbrace{-3+x-1}_{-4+x}\right]$$

$$= (x+1)^4(-x+4)$$

ÖR/

$$A=\begin{vmatrix} \lambda & c & \cdots & c \\ c & \lambda & \cdots & c \\ c & c & \lambda \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & c & c \cdots & \lambda \end{vmatrix}_{n\times n}$$

matrisi veriliyor. $|A|$ yı bulunuz.

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & c & \cdots & c \\ c & \lambda & \cdots & c \\ c & c & \lambda \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & c & c \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

2, 3 ... n-inci sütunları 1. sütuna eklersek

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda+(n-1)c & c & \cdots & c \\ \lambda+(n-1)c & \lambda & \cdots & c \\ \lambda+(n-1)c & c & \lambda \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda+(n-1)c & c & c \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$\lambda+(n-1)c$ ortak (1. sütunda)

$$|A|=(\lambda+(n-1)c)\begin{vmatrix} 1 & c & \cdots & c \\ 1 & \lambda & & c \\ 1 & c & & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & & \lambda \end{vmatrix}$$

$$|A|=(\lambda+(n-1)c)\begin{vmatrix} 1 & c & \cdots & c \\ 0 & \lambda-c & 0 \cdots & c \\ 0 & 0 & \lambda-c \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda-c \end{vmatrix}$$

$$|A|=(\lambda+(n-1)c)(\lambda-c)^{n-1}$$

ÖR/

A ortogonal matris ise $|A| = ?$

Ortogonal matris: A, bir kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

$A^t = A^{-1}$ her iki tarafın determinantını alalım.

$$|A^t| = |A^{-1}| \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|}$$

1) $|A^t| = |A|$
2) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
idi.

$$|A|^2 = 1$$

$|A| = \mp 1$ dir.

Şöyle de yapılabilir.

$A^t = A^{-1}$ ise

$$A^t . A = A^{-1} A$$

$$A^t . A = I$$

$$|A^t . A| = |I|$$

$$\underbrace{|A^t|}\,.\,|A| = 1$$

$|AB| = |A| . |B|$

$$|A| . |A| = 1$$

$$|A|^2 = 1$$

$|A| = \mp 1$ elde edilir.

ÖR/ A tersi olan bir matris ise ve

$A^2 = A$ ise $|A|$ yı hesaplayınız.

A matrisinin tersi olduğundan $|A| \neq 0$ dır.

$A^2 = A$ eşitliğinden

$|A^2| = |A| . |A| = |A|$ dır.

$|A| [(|A| - 1)] = 0$ bulunur.

$|A| \neq 0$ olduğundan $|A| = 1$ elde edilir.

ÖR/ Reel bileşenli $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$|A| = 5$ olduğuna göre

a) $|2A| = ?$ b) $|3A^{-1}| = ?$ nedir

A, 3x3 mertebeli matris

1) $|kA| = k^n . |A|$ $n \times n$

2) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

a) $|2A| = 2^3 . |A| = 8 . 5 = 40$

b) $|3A^{-1}| = 3^3 . |A^{-1}| = 27 . \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{27}{5}$

Lineer Denklem Sistemleri:

Tanım; $i=1,2\ldots m$ ve $j=1,2\ldots n$ için a_{ij} ler ve b_i ler birer reel sayı $x_1, x_2, \ldots x_n$ bilinmeyenler olmak üzere

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

şeklindeki bir sisteme m denklem ve n bilinmeyenden oluşan bir lineer denklem sistemi denir

Burada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ Katsayılar Matrisi

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ bilinmeyenler ve $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ sistemin ikinci tarafıdır.

Lineer denklem sistemini $AX=B$ şeklinde ifade edebiliriz.

Lineer Denklem Sisteminin Denk Matrisler Yardımıyla Çözümü;

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

lineer denk sistemini gözönüne alalım.

$$[A;B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -- & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & -- & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & -- & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine arttırılmış katsayılar matrisi denir.

Elemanter satır işlemleri ile $[A;B]$ arttırılmış katsayılar matrisinin indirgenmiş eşolan formu elde edilir.

1) $r_A \neq r_{A;B}$ ise sistemin çözümü yoktur.

2) $r_A = r_{A;B}$ " " " vardır.

a) Eğer $r=n$ ise sistemin tek çözümü vardır.

b) Eğer $r<n$ ise $n-r$ tane keyfi sabite bağlı sonsuz çözümü vardır.

Bu yönteme Gauss-Jordan yöntemi de denir.

ÖR/
$$\left.\begin{array}{r} -2x+y+5z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 3y+2z=1 \end{array}\right\}$$
denk sis çözünüz.

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]}_{r_A}}_{r_{A;B}}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_A = r_{A;B} = 3 \\ n=3 \end{array}\right\} \text{Tek çözüm}$$

$x=4$ $y=-1$ $z=2$

ÖR/ $x+y+2z=1$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$2y+7z=4$$
$$3x+3y+6z=3$$

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&2&7&4\\3&3&6&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&2&7&4\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&1&7/2&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$H_{31}(-3)$ $\quad$ $H_2(1/2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3/2&-1\\0&1&7/2&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$r_A=r_{A;B}=2 \quad n=3$

$n-r=3-2=1$ tane keyfi sbt bağlı sonsuz çözüm vardır.

$x-\frac{3}{2}z=-1$ $\quad$ $z=2$ alalım.

$y+\frac{7}{2}z=2$

$$x=\frac{3}{2}z-1=\frac{3}{2}\cdot 2-1=2$$
$$y=-\frac{7}{2}z+2=-\frac{7}{2}\cdot 2+2=-5$$

$x=2 \quad y=-5 \quad z=2$ bir çözümdür.

$z=k$ alalım.

$x=\frac{3}{2}k-1 \quad y=-\frac{7}{2}k+2 \quad z=k$ dır.

ÖR/ $\left.\begin{array}{l}3x+2y=7\\17x+y=0\\6x+4y=3\end{array}\right\}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$[A:B]=\left[\begin{array}{cc|c}3&2&7\\17&1&0\\6&4&3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}3&2&7\\-1&-11&-42\\0&0&-11\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}0&-31&-119\\-1&-11&-42\\0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}-1&-11&-42\\0&-31&-119\\0&0&1\end{array}\right]$$

$H_{21}(-6)$, $H_{31}(-2)$ $\quad$ $H_3\left(\frac{-1}{11}\right)$ $\quad$ H_{12}

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&11&42\\0&1&119/31\\0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-7/31\\0&1&119/31\\0&0&1\end{array}\right]$$

$H_2(-11)$

$r_A=2 \quad r_{A;B}=3$

$r_A\neq r_{A;B}$

sistemin çözümü yoktur.

Lineer Homojen Denklem Sistemleri

Tanım;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

şeklindeki bir lineer denklem sistemine lineer homojen denklem sistemi denir.

$r_A = r_{A:B}$ olacağından denklem sisteminin her zaman çözümü vardır.

$AX = 0$ homojen denklem sistemi için $X = 0$ daima bir çözümdür. Bu çözüme aşikar çözüm denir.

$r_A = r_{A:B} = r$ olsun.

1) Eğer $r = n$ ise sistemin tek çözümü sıfır çözümdür.
2) Eğer $r < n$ " " $n-r$ keyfi sabite bağlı sonsuz çözümü vardır.

ÖR/
$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=0\\ -x+y+z&=0\\ 2x+y-2z&=0 \end{aligned}\right\}$$ lineer homojen denklem sistemini çözünüz.

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$H_{21}(1)$, $H_{31}(-2)$, $H_{32}(1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$H_2(1/3)$, $H_{12}(-2)$

$$\left.\begin{aligned} r_A = r_{A;B} &= 2\\ n &= 3 \end{aligned}\right\} n-r = 3-2 = 1 \text{ keyfi sbt}$$

$x - z = 0$
$y = 0$ $\quad z = k$ alırsak

$x = k \quad y = 0 \quad z = k$ dır.

ÖR/ $\left.\begin{aligned} -3x+2y-3z&=0 \\ 2x+5y+2z&=0 \\ 4x+y-3z&=0 \end{aligned}\right\}$ lineer homojen denklem sistemini çözünüz.

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$H_{12}(1)$ $\quad$ $H_1(-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-4)$ $\quad$ $H_2(1/19)$ $\quad$ $H_{32}(-29)$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$H_3(-1/7)$ $\quad$ $H_{12}(7)$ $\quad$ $H_{13}(-1)$ $\quad$ $r_A = r_{A;B} = 3 = n$

Tek çözüm sıfır çözümdür.

$x=0 \quad y=0 \quad z=0$ dır.

CRAMER YÖNTEMİ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots &+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots &+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots &+ a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminde A, $n\times n$ mertebeden kare matris

$|A| \neq 0$ ise $AX=B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ dır. Burada $\Delta = |A|$ ve Δ_i $(i=1,2,\dots,n)$

A katsayılar matrisinde i . ninci sütun yerine

$\left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}\right\}$ ifadesinin yazılmasıyla elde edilen matrisin

determinantı olmak üzere $i = 1, 2 \ldots n$ için

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ alınarak $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ çözümünü bulmaya

Cramer Yöntemi ile çözüm bulma denir.

ÖR/ $\left.\begin{matrix} 3x + 2y - z = 9 \\ y - z = 4 \\ 2x + y + z = 2 \end{matrix}\right\}$ denk sistemini Cramer Yöntemi ile çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$$

$H_{23}^{(1)}$, $H_{13}^{(1)}$ $\qquad \Delta = |A| = 4$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 18$$

$$\Delta_1 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 22 = 8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 + 10) = -8$$

$H_{23}^{(-1)}$, $H_{13}^{(-2)}$

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1 \qquad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{8}{4} = 2 \qquad z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-8}{4}$

$z = -2$

Katsayılar Matrisinin İnversi Yardımıyla Çözüm:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

lineer denklem sistemini gözönüne alalım.

$|A| \neq 0$ ise A^{-1} vardır.

$$AX = B$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$X = A^{-1}B$ elde edilir. Bu şekildeki çözüme katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözüm denir.

ÖR/
$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x + 5y + 3z &= 3 \\ x + 8z &= 17 \end{aligned}\right\}$$
lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$
$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x = 1 \quad y = -1 \quad z = 2$$

Genel örnekler;

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ 2x-2y+5z=3 \end{array}\right\}$ lineer denk sistemini çözünüz

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 5/4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/4 & 11/4 \\ 0 & 1 & -3/4 & 5/4 \end{array}\right]$$

$r_A = r_{A;B} = 2$

$n=3$

$n-r = 3-1 = 1$ keyfi sbt

$x+\frac{7}{4}z = 11/4$

$y-\frac{3}{4}z = 5/4$

$z=k$ alalım

$x = -\frac{7}{4}k + 11/4$

$y = \frac{3}{4}k + 5/4$

Sonsuz çözüm vardır.

ÖR/ $\left.\begin{array}{l} x+3y-2z+t=4 \\ x+2y-4z-3t=6 \\ 2x+5y-5z-2t=10 \end{array}\right\}$ denk sistemini çözünüz

$$[A;B]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & -5 & -2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$H_{21}(-1)$, $H_{31}(-2)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -8 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$H_2(-1)$, $H_{12}(-3)$, $H_{32}(1)$, $H_{23}(-2)$, $H_{13}(8)$

$r_A = r_{A;B} = 3$, $n=4$

$n-r = 4-3 = 1$ keyfi sabit

$x-11t=10$

$y+4t=-2$

$z=0$

$t=k$ alalım

$x=11k$ $y=-4k-2$ $z=0$ $t=k$

ÖR/ $\left.\begin{aligned} y-2z&=b \\ x-y+z&=2 \\ x+ay&=3 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sisteminin

a) Çözümsüz

b) Tek çözümlü

c) Sonsuz çözümlü olması için

a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 3 \end{array}\right] \underset{H_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & a & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{H_{31}(-1)}{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \end{array}\right]} \sim \underset{H_{12}(1),\ H_{32}(-a-1)}{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 2+b \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 2a+1 & 1-ab-b \end{array}\right]}$$

a) Çözümsüz $r_A \neq r_{A:B}$ olmalıdır.

$r_A = 2$ iken $r_{A:B} = 3$ olmalı

Yani $2a+1=0$ iken $1-ab-b\neq 0$ olmalıdır.

$a=-\frac{1}{2}$ ve $b\neq 2$ bulunur.

b) Tek çözümlü $r_A = r_{A:B} = n = 3$ olmalı

O da $2a+1\neq 0$ ise tek çözüm vardır.

$a\neq -\frac{1}{2}$ " " "

c) Sonsuz çözüm $r_A = r_{A:B} < 3$ $(n<r)$ olmalı

olmalı

$2a+1=0$ ve $1-ab-b=0$ olmalı.

$a=-\frac{1}{2}$ ve $b=2$ olmalıdır.

ÖR/

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+2az+t&=b \\ 2x-y+(2a+1)z+(a+1)t&=0 \\ -2x+y+(1-2a)z-2t&=-2b-2 \end{aligned}\right\}$$ lineer denklem sisteminin

a) Çözümsüz b) Tek çözümlü c) Sonsuz çözümlü

olması için a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A;B]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 2 & -1 & 2a+1 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & 1-2a & -2 & -2b-2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -b-2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & -2 \end{array}\right]$$

a) Çözümsüz $r_{A;B} \neq r_A$ olmalı. $-a-1=0$ ise $\underline{a=-1}$ de

$r_A=2$ $r_{A;B}=3$ olur. $b\in\mathbb{R}$

b) Tek çözümlü $r_A=r_{A;B}=n=4$

$r_{A;B}=r_A$ en fazla 3 olabilir. Sistemin tek çözümü yoktur.

c) $r_{A;B}=r_A<n$ olmalı $r_{A;B}=r_A=3<n$ olduğundan

$-a-1\neq 0$ olmalı. $(a\neq -1)$ için sonsuz çözüm var.

$b\in\mathbb{R}$

ÖR/ $\left.\begin{array}{l}(a-1)\,x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2\,x_1 + (a-1)\,x_2 = 0\end{array}\right\}$ Lineer denklem sisteminin

a) Sonsuz çözümü olması,

b) Tek çözümünün sıfır çözüm olmasını sağlayan a değerlerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ 2 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2/2 & \frac{a-1}{2} \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim$

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a-1}{2} \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{a-1}{2} \\ 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2} \end{bmatrix}$

$\frac{-a^2+2a+3}{2} = 0$ ise (yani $-a^2+2a+3=0$ ise)

$a=3$ veya $a=-1$ dir.

$n=2$ (bilinmeyen sayısı) $r=1$ olacağından

$n-r=1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

b) $\frac{-a^2+2a+3}{2} \neq 0$ ise yani $a \neq 3$ ve $a \neq -1$

ise $n=r$ olduğundan tek çözüm sıfır çözümdür. (Denklem sisteminin homojen denklem sistemi olduğuna dikkat edelim.

ÖR/
$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ x+4y-z&=4 \\ x+y+(a^2-8)z&=a \end{aligned}\right\}$$ Lineer denklem sisteminin

a) Çözümünün olmaması

b) Tek çözümünün olması

c) sonsuz çözümünün olması için a nasıl seçilmelidir.

$$[A;B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & a^2-8 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{array}\right]$$

c) $a-3=0$ ise yani $a=3$ ise $r=2$ $n=3$ olduğundan $n-r=3-2=1$ tane keyfi sabite bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ şeklinde olur.

a) $a-3\neq 0$ ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+3) & a-3 \end{array}\right]$$ 3. satır $a-3$ ile bölünürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 1 \end{array}\right]$$ olur. $a+3=0$ ise $(a=-3)$ sistemin çözümü yoktur. $r_A=2$ $r_{A:B}=3$ olduğundan

b) $a\neq\mp 3$ ise tek çözüm vardır.

Çünkü $n=r$ olur.