Fonksiyonlar

A ve B gibi boş olmayan iki küme verildiğinde A kümesinin her elemanı B nin bir tek elemanına eşleyen bir f kuralına A dan B ye bir fonksiyon denir. $f: A \to B$ ile gösterilir.

$x \in A$ bir f kuralıyla $y \in B$ ye eşlenmiş ise bu ilişki $y = f(x)$ şeklinde gösterilir.

x'e bağımsız değişken, y ye bağımlı değişken denir.

$A = D(f)$ kümesine f in tanım kümesi denir.

Fonksiyonun tanım kümesi;

Bağımsız değişkenin belirli bir reel değerine karşılık, bir f fonksiyonu vasıtasıyla belirli bir reel değer bulunabiliyorsa, bağımsız değişkenin o değeri için f fonksiyonu tanımlıdır denir.

Herhangi bir f fonksiyonu tanım kümesi belirtilmeden tanımlanmışsa, bu fonksiyonun tanım kümesi olarak, fonksiyonu reel bir sayıya karşılık getirdiği tüm reel sayıların kümesini alacağız.

Fonksiyon	Tanım kümesi
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$x \geq 0$, $[0, \infty)$

$y = \sqrt{4-x}$ $\quad 4-x \geq 0 \quad -x \geq -4$

$x \leq 4 \quad (-\infty, 4]$

$y = \sqrt{1-x^2}$ $\quad 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -1$

$x^2 \leq 1$

$\sqrt{x^2} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$\forall x \in [-1, 1]$

$y = f(x)$ polinom ise $\forall x \in R$ için $f(x) \in R$ dir.

Yani polinom fonksiyonların kümesi $D(f) = \mathbb{R}$ dir.

ÖR/ $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ise $D(f) = \mathbb{R}$ dir.

$\dfrac{P(x)}{\theta(x)} = f(x)$ şeklindeki rasyonel fonksiyonların

tanım kümesi $D(f) = \{x \in R \mid \theta(x) \neq 0\}$ dir.

ÖR/ $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ fonk tanım kümesini bulunuz.

$3x - 1 = 0 \quad 3x = 1 \quad x = \dfrac{1}{2}$ için $\dfrac{2x+1}{3x-1}$ tanımsızdır.

$D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ tir.

ÖR/ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ $\quad D(f) = ?$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$ dir. $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ dir.

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ fonksiyonu

$g(x) \geq 0$ koşulunu gerçekleyen $\forall x \in R$ için

tanımlıdır.

ÖR/ $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$ $\quad D(f) = ?$

$2x^2 - x \geq 0$ için tanımlıdır.

$2x^2 - x = 0 \quad x(2x-1) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$1/2$		∞
		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	
		çözüm				çözüm	

$D(f) = (-\infty, 0] \cup [1/2, \infty)$ dur.

ÖR/ $f(x) = \ln(x-2)$ $\quad D(f) = ?$

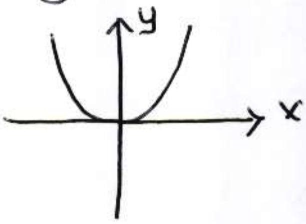
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ için tanımlıdır.

$D(f) = (2, \infty)$

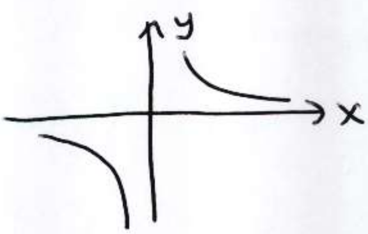
Bir fonksiyonun grafiği

Bir f fonksiyonunun grafiği $y = f(x)$ denklemini sağlayan noktaların kartezyen düzlemdeki yerlerinin gösterilmesiyle oluşan grafiktir.

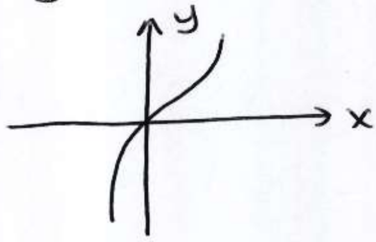
$y = x^2$



$y = 1/x$



$y = x^3$



Fonksiyonlarla ilgili bazı kavramlar:

Artan- azalan fonksiyonlar:

$f(x)$ fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun. $\forall \; x_1, x_2 \in I$ için

a) $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f, I aralığında artandır.

b) $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f, I aralığında azalandır.

ÖR/ $f(x) = 2-3x$ fonk artan, azalan olduğuna bakalım.

$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow 2-3x_1 > 2-3x_2$

$3x_1 < 3x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

olduğundan $f(x) = 2-3x$ fonksiyonu azalandır.

ÖR/ $f(x) = \frac{1}{x}$ fonk artan, azalan olduğuna bakalım

$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

f fonk azalan

ÖR/ $f(x) = e^x$ artan mı? azalan mı?

$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ olacağına göre $f(x_1) < f(x_2)$ dır $f(x) = e^x$ fonksiyonu artandır.

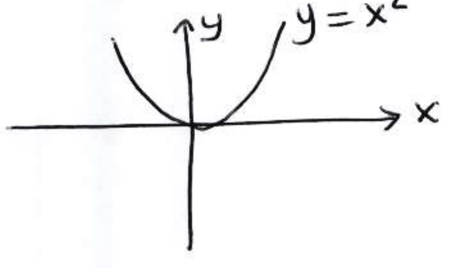
Tek - çift fonksiyonlar:

$y = f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her x için

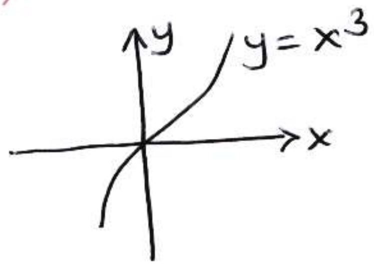
* $f(-x) = f(x)$ ise f çift fonksiyondur. ve y eksenine göre simetrik bir grafiği vardır.

* $f(-x) = -f(x)$ ise f tek fonksiyondur. ve orjine göre simetrik bir grafiği vardır.

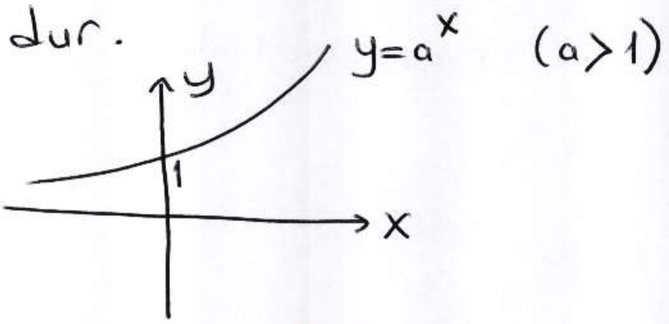
ÖR/ $y = x^2$ çift fonk

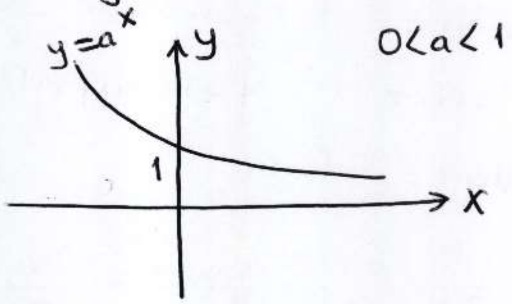


ÖR/ $y = x^3$ tek fonk

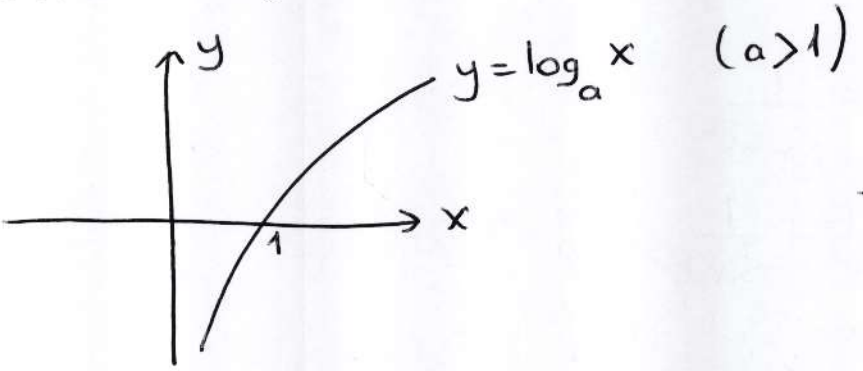


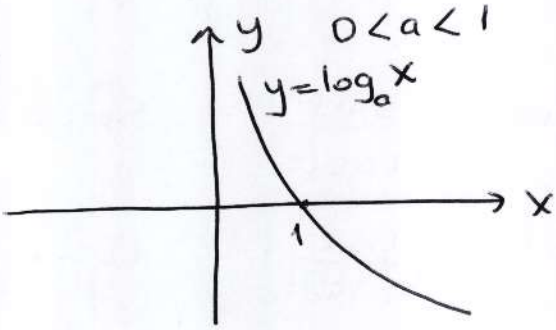
Üstel fonksiyonlar: $a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y=f(x)=a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonksiyon denir. Bütün üstel fonksiyonların tanım kümesi $(-\infty,\infty)$, görüntü kümeside $(0,\infty)$ dur.





Logaritmik fonksiyon: $a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f(x)=\log_a x$ fonksiyonuna logaritmik fonksiyon denir. $x>0$ için tanımlıdır.

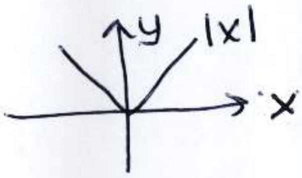




Bileşke Fonksiyon; f ve g fonksiyonları için, bileşke fonksiyon $f \circ g(x) = f(g(x))$ şeklinde tanımlanır.

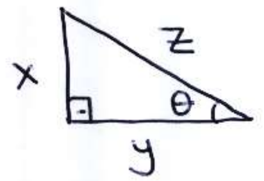
Parçalı Fonksiyon; Bazen bir fonksiyonu, tanım kümesinin farklı parçaları üzerinde farklı formüller kullanarak tanımlamak gerekir. Böyle fonksiyonlara parçalı fonksiyon denir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Periyodik Fonksiyonlar: Her x değeri için $f(x+p)=f(x)$ olacak şekilde bir p pozitif sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonk denir.

Trigonometrik Fonksiyonlar: $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ fonksiyonlarına trigonometrik fonksiyonlar denir.



$$\sin\theta=\frac{x}{z} \qquad \cos\theta=\frac{y}{z}$$

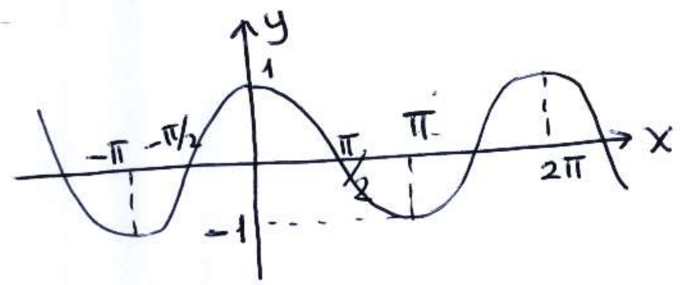
$$\tan\theta=\frac{x}{y} \qquad \cot\theta=\frac{y}{x}$$

$$\sec\theta=\frac{z}{y} \qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{z}{x}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

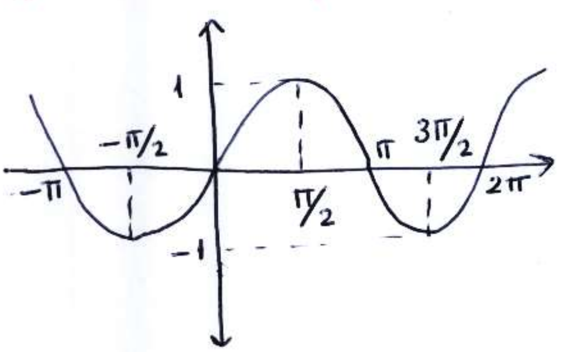
$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$y=\cos x$ fonksiyonu;



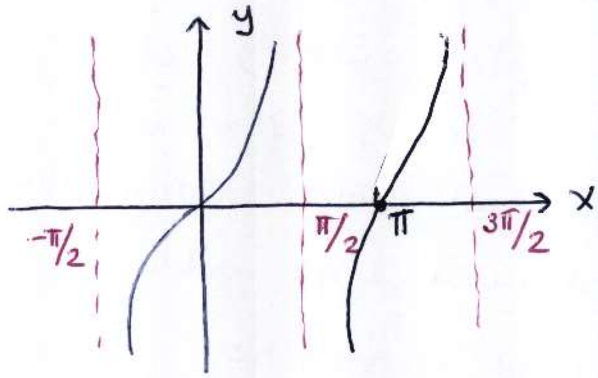
1) Çift fonksiyondur
2) Tanım kümesi $-\infty<x<\infty$
3) Görüntü 〃 $-1\leq y\leq 1$
4) Periyodu 2π

$y=\sin x$ fonksiyonu



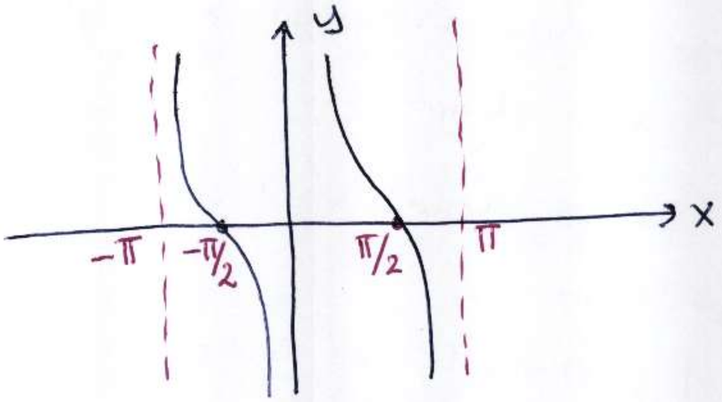
1) Tek fonksiyondur
2) Tanım kümesi $-\infty<x<\infty$
3) Görüntü 〃 $-1\leq y\leq 1$
4) Periyodu 2π

$y = \tan x$ fonksiyonu



1) Tek fonksiyondur.
2) Tanım kümesi
$x \neq \mp \pi/2 \,,\ \mp 3\pi/2 \ldots$
3) Görüntü kümesi
$-\infty < y < \infty$
4) Periyodu π

$y = \cot x$ fonksiyonu



1) Tek fonksiyondur
2) Tanım kümesi
$x \neq 0 \,,\ x \neq \mp\pi \,,\ x \neq \mp 2\pi$

Bazı trigonometrik özellikler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ $\qquad \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

Limit

$f(x)$ fonksiyonu a noktası yakınındaki her x için tanımlı (a da tanımlı olmayabilir) olsun. x'i a ya yeterince yakın olarak $f(x)$ in L ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak x' a ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu L ye yaklaşır denir. Bunu $\lim_{x \to a} f(x) = L$ şeklinde gösteririz.

Tanım: $f: A \to R$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için eğer $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x'a ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir.

ÖR/ $f: R \to R$ $f(x) = 3x - 4$ fonksiyonunun $x = 1$ de limitinin -1 olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ sağlayan ε değerine bağlı bir $\varepsilon > 0$ sayısını bulmalıyız.

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |3x - 4 - (-1)| < \varepsilon$$

$$|3x - 3| < \varepsilon \Rightarrow 3|x-1| < \varepsilon$$

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$$

$\forall \varepsilon > 0$ için ε değerine bağlı bir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ bulduk. O zaman $\lim_{x \to 1} 3x - 4 = -1$ dir.

$f(x)$ in $x = a$ da tanımlı olmadığı bazı durumlarda uygun cebirsel işlemler yapılarak $\lim_{x \to a} f(x)$ limiti hesaplanabilir.

ÖR/

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = ?$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+\cancel{2})(x-1)}{(x\cancel{+2})(x+3)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+3}$$

$$= 3$$

ÖR/

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1} = ?$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(x^2+2x-3)}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(x\cancel{-1})(x+3)}{(x\cancel{-1})(x+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(x+3)}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

ÖR/

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = ?$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{\sqrt{x} - 2}}{(\cancel{\sqrt{x}-2})(\sqrt{x}+2)(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+4)}$$

$$= \frac{1}{32}$$

ÖR/

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - 1}{x - 1} = ?$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - 1}{(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{2x^2-1} + 1}{\sqrt{2x^2-1} + 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 1 - 1}{(x-1)(\sqrt{2x^2-1} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2(\cancel{x-1})(x+1)}{(\cancel{x-1})(\sqrt{2x^2-1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x+1)}{\sqrt{2x^2-1} + 1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1}+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Limit kuralları;

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ ise

a) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \mp g(x)) = L \mp M$ dir.

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$

c) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = L^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

d) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ve n çift ise $L > 0$ şartı ile)

e) Limit tektir.

Sağ limit, sol limit

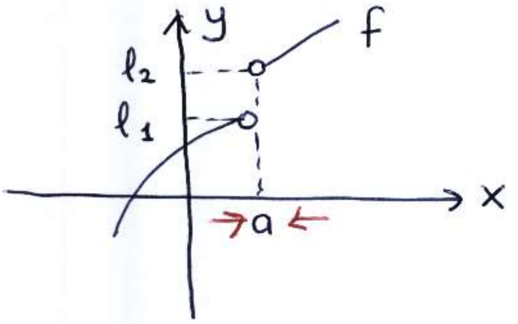
x değişkeni a'ya a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

Buna f(x) fonksiyonunun a noktasındaki soldan limiti L_1 dir denir.

x değişkeni a'ya a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

Buna f(x) fonksiyonunun a noktasındaki sağdan limiti L_2 dir denir.

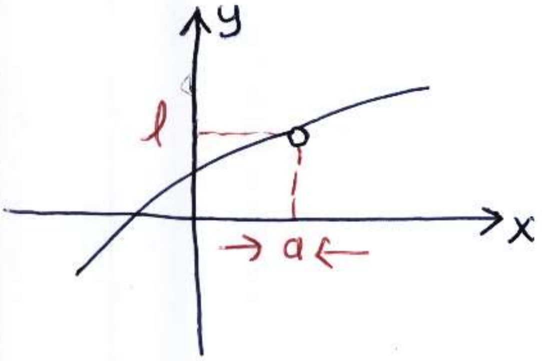
Bir fonksiyonun bir noktada sağdan limiti soldan limitine eşit değilse fonksiyonun o noktada limiti yoktur.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2$ olup

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$ oldupundan $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

deperi yoktur.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$

oldupundan

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dir.

Not; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a-h)$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$

ÖR/ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 1+x & , x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun a) $x=0$ da limiti varmı?

b) $x=1$ de limiti varmı?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1+x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0 \end{array}\right\} \neq \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) \text{ mevcut değil}$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 1+x = 2$

ÖR/ $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ olmak üzere

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

limitlerini bulunuz.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(2-x)}{(x+3)(x-2)}=-1/5$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x+3)(x-2)}=1/5$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ limiti mevcut değildir.

ÖR/ $f(x)=\begin{cases}2x, & x<1\\ 3, & x=1\\ x^3+1, & x>1\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=?$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x)&=\lim_{x\to 1^+} x^3+1=2\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)&=\lim_{x\to 1^-} 2x=2\end{aligned}\right\}\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Genişletilmiş Gerçek sayılar kümesi;

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $-\infty<x<\infty$ olmak üzere $\mathbb{R}\sqcup(-\infty,\infty)$ kümesine genişletilmiş gerçek sayılar kümesi denir. Gerçek sayılar kümesinde sınırsız olarak küçülen değerler $-\infty$ ile, sınırsız olarak büyüyen değer ∞ ile gösterilir.

Tanım;

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists M > 0,$$

öyle ki her $x > M$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ dur.

ÖR/

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x} = 1$$ olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon > 0$ olsun. $x \neq 0$ için

$$\left| \frac{x+4}{x} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{4}{|x|} < \varepsilon$$

$$|x| > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$x > \frac{4}{\varepsilon} \text{ veya } x < -\frac{4}{\varepsilon}$$

olur. $M = \frac{4}{\varepsilon}$ alınırsa $x > \frac{4}{\varepsilon}$ için

$\left| \frac{x+4}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ kalır. Şu halde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x} = 1 \text{ dir.}$$

Tanım; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0$ için

$\exists N$, öyle ki $\forall x < N$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ dur.

ÖR/ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \text{ veya } x < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Buna göre $N = -\frac{1}{\varepsilon}$ dir. Yani $x < -\frac{1}{\varepsilon}$ için $|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ kalır.

O halde $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ dır.

Genişletilmiş gerçek sayılar kümesindeki bazı işlemler

1) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $\qquad$ $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

2) $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ $\qquad$ $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

3) $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$ $\qquad$ $(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

4) $n\in N^{+}$ $\qquad (+\infty)^{n}=\infty$

5) $n\in N^{+}$ $\qquad (-\infty)^{n}=\begin{cases}-\infty, & n \text{ tek}\\ +\infty, & n \text{ çift}\end{cases}$

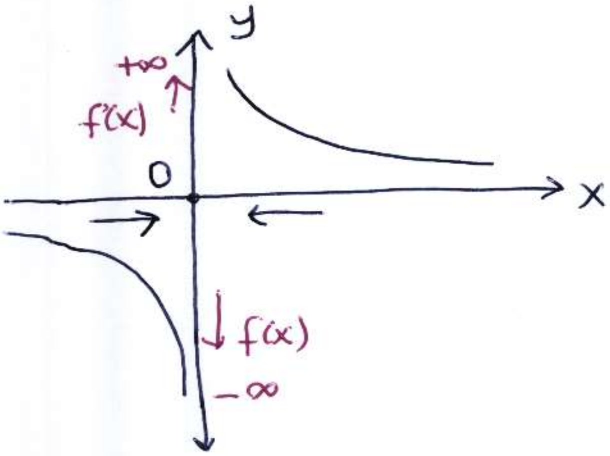
6) $a\in R^{+}$ olmak üzere $\dfrac{0}{a}=0$, $\dfrac{a}{\infty}=0$

7) $\dfrac{1}{+\infty}=0$

8) $\dfrac{1}{-\infty}=0$

9) $\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ $\qquad$ $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=?$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=?$



$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{0-h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{h}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{0+h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=+\infty$$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{2x-7} = ?$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{2(-\infty)-7} = \frac{5}{-\infty} = 0$$

ÖR/ $a \in \mathbb{R}$, $x \neq a$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x-a} = ?$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(a+h)-a} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{a-h-a} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-h} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.

ÖR/ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ limitlerini hesaplayın.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}}{\underbrace{|x|}_{\cancel{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{\underbrace{\cancel{|x|}}_{-x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - x = ?$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = 1/2$$

Rasyonel fonksiyonlar ve polinomlar için sonsuzda limitler:

a) Bir polinomdaki en büyük dereceli terim, polinomun $+\infty$ ve $-\infty$ daki limitini belirler. Yani en büyük dereceli terimin $+\infty$ ve $-\infty$ daki limiti tüm polinomun limitini verir.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$= x^n \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right]$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} P(x) = \lim_{x \to \mp\infty} a_n x^n$$

b) $$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & n<m \text{ ise} \\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m \text{ ise} \\ -\infty \text{ veya } +\infty, & n>m \text{ ise} \end{cases}$$

ÖR/ $$\lim_{x \to \infty} 3x^3 - x^2 + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - x^2 + 2 = -\infty$$

ÖR/ $$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 5x} = \frac{5}{3}$$

ÖR/ $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}$$
$$= -\infty$$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + \sqrt{x^2+10}}{3x+4}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + \sqrt{x^2(1+10/x^2)}}{3x+4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + |x|\sqrt{1+10/x^2}}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x}\left[5 + \sqrt{1+\underbrace{10/x^2}_{\to 0}}\right]}{\cancel{x}\left(3+\underbrace{4/x}_{\to 0}\right)} = \dfrac{6}{3} = 2$

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ yı içeren limitler ;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x \cos x} = \underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = ?\ \%$ $\qquad \underbrace{\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1}{x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} -2 \cdot \dfrac{\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot 2}$ paydayı 2 ile çarp 2 ye böl

$= -\dfrac{2 \cdot 1 \cdot 0}{2} = 0$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 3\pi} \dfrac{\sin(3\pi-x)}{6\pi-2x} = ?$

$$\lim_{x\to 3\pi} \frac{\sin(3\pi-x)}{2(3\pi-x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{\frac{t}{1}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$x-3\pi = t$

$x\to 3\pi \quad t\to 0$ olur

ÖR/ $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{\sin(x-y)}{x^2-y^2} = ?$ $\quad \lim\limits_{x\to y} \dfrac{\sin(x-y)}{(x-y)(x+y)}$

$x-y=t \quad x\to y \quad t\to 0$ olur

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}}_{1} \cdot \lim_{x\to y} \frac{1}{x+y} = 1 \cdot \frac{1}{y+y} = \frac{1}{2y}$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 + x\sin 3x}{x\sin x} = ?$

Pay ve payda x^2 ye bölündü

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x^2 + x\sin 3x}{x^2}}{\frac{x\sin x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} + \frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{1+3}{1} = 4$$

ÖR/ $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-2a, & x<3 \\ 2x+3, & x\geq 3 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ limitinin değeri bir reel sayı olduğuna göre a değerini bulunuz.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 3^-} x-2a = \lim_{x\to 3^+} 2x+3 \Rightarrow 3-2a = 2.3+3$$

$$3-2a = 9$$

$$-2a = 6$$

$$a = -3$$

Uygulama:

ÖR/ $f(x)=\sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz?

$\ln \frac{5x-x^2}{4} \geq 0$ olmalı $\frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \Rightarrow 5x-x^2 \geq 4$

$$5x-x^2-4 \geq 0$$

$$x^2-5x+4 \leq 0$$

$$(x-1)(x-4) \leq 0$$

x		1		4	
x^2-5x+4	$+$	0	$-$	0	$+$

$$T.K=[1,4]$$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{2x-\pi} = ?$

$x-\pi/2 = t$ $\quad 2(x-\frac{\pi}{2})$

$x \to \pi/2$

$t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+t)-1}{2.t} = \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{\sin\pi/2}^{1} \cos t + \overbrace{\cos\pi/2}^{0} \sin t - 1}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = 0$$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$ olduğu gösterildi.

ÖR/ $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = ?$

$\frac{1}{x} = t$ $\quad x \to \infty$ $\quad t \to 0$ olur.

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} . \sin t = \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\infty} . \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = \infty$$

ÖR/ $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} \cdot \sin \frac{1}{x} = ?$

$\frac{1}{x} = t \quad x \to \infty \quad t \to 0$

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sin t = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin t \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

$= \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \sin t}_{1} \cdot \sqrt{t} = 1 \cdot 0 = 0$

ÖR/ $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = ?$

$\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) \cdot (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} + \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]}$ $\frac{1}{x} \to 0$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1+1} = 1$

ÖR/ $\lim_{x \to \pi/4} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} \right) = ?$ $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ unutma

$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{\cancel{\cos x - \sin x}}{(\cancel{\cos x - \sin x})(\cos x + \sin x)}$

$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos \pi/4 + \sin \pi/4}$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}}}_{1}$$

$= 1$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3^x}(1 - 3^{-2x})}{\cancel{3^x}(1 + 3^{-2x})} = 1 \quad \left\{ \lim_{x\to\infty} 3^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \right.$$

ÖR/ $f(x) = \log\left(\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$\dfrac{x-5}{x^2-10x+24} > 0$ olmalı

$x^2-10x+24$ → 6, 4

x		4		5		6	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x^2-10x+24$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$	$-$		$+$		$-$		$+$

T.K $= (4,5) \cup (6,\infty)$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} = ?$

$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^{\to 0}}{\cancel{x}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

ÖR/ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x}} \right) = ?$

$\infty - \infty$ belirsizliği

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{x^2+x} - x^2}{\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{x^2+x} - x^2}{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{x\sqrt{x^2+x} + x^2}{x\sqrt{x^2+x} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(x^2+x) - x^4}{\sqrt{x^2+x}\,(x\sqrt{x^2+x} + x^2)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^4} + x^3 - \cancel{x^4}}{\sqrt{x^2+x}\,(x\sqrt{x^2+x} + x^2)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left[x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x^2\right]}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{\underbrace{|x|}_{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} \cdot \left[x \cdot \underbrace{|x|}_{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + x^2\right]}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}\left[\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} + 1\right]\right)} = \frac{1}{2}$$

ÖR/ $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)^B$ $(a>0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1 \text{ dır.}$$

ÖR/ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+\ln(1+x)}{\sin x} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x+\ln(1+x)}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

ÖR/ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ dır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\,(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\,(1+\cos x)}$$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ idi

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x \cdot x} \cdot \frac{x}{1+\cos x}$$

x i çarp x'e böl

$$= 0$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{2-\cos x}}{\sin x} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)^B$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{2-\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{(1+\sqrt{2-\cos x})}{1+\sqrt{2-\cos x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(2-\cos x)}{\sin x \cdot (1+\sqrt{2-\cos x})}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2-\cos x}} \cdot \frac{x}{x}$$

x ile çarp x'e böl

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\sqrt{2-\cos x}}_{1/2}} = 0 \cdot 1 \cdot 1/2 = 0$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{3x+5} = ?$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^B$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+x}{x\left(3+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}{\cancel{x}\left(3+\frac{5}{x}\right)}$$

$|x| = x$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$|x| = x$

$$= \frac{2}{3}$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{4x+3} = ?$

$|x| = -x$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\overset{-x}{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)} = -\frac{1}{4}$$

Süreklilik

Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği;

$f: A \to R$, $A \subset R$ ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonunun $x=a$ da sürekli olması için

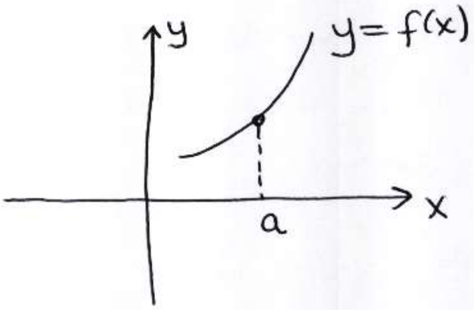
1) $x=a$ noktasında tanımlı olmalıdır.

2) $x=a$ noktasında limiti olmalıdır. Yani

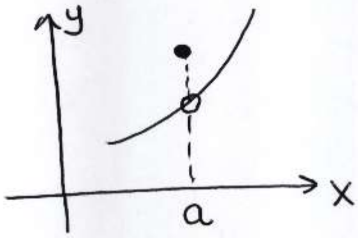
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{olmalıdır.}$$

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

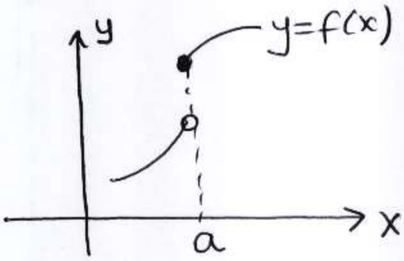
Yukarıdaki üç koşuldan en az birisi gerçekleşmez ise fonksiyon $x=a$ noktasında süreksizdir denir.



f(x), a da sürekli



f(x), a da süreksiz
çünkü $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$



f(x), a da süreksiz
$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$

ÖR/
$$f(x) = \begin{cases} 2ax+b & , x<2 \\ a & , x=2 \\ (a+b)^x - 3a+1 & , x>2 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=2$ de sürekli olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \\ 4a+b = (a+b)^2 - 3a+1 = a \end{array}\right\}$$

$4a+b=a$

$\underline{b=-3a}$

$a^2+b^2+2ab-3a+1=a$

$a^2+(-3a)^2+2a(-3a)-3a+1=a$

$4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0 \quad a=1/2$

$a=1/2 \quad b=-\frac{3}{2}$

$a+b=-1$ dir.

Sağ - Sol süreklilik;

Bir $f(x)$ fonksiyonu ve $x = a$ noktası için

* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ise $f(x)$, a da sağdan sürеklidir denir.

* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ise $f(x)$, a da sağdan süreklidir denir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul a'da hem sağdan hem de soldan sürekli olmasıdır.

Ör/ $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ ise fonksiyonunun $x=0$ daki sağdan/soldan sürekliliğini araştırınız. Fonk $x=0$ da sürekli midir?

$\lim_{x \to 0^+} H(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 = f(0) \Rightarrow$ fonk $x=0$ da sağdan sürekli

$\lim_{x \to 0^-} H(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \neq f(0) \Rightarrow$ fonk $x=0$ da soldan sürekli

Dolayısıyla $x=0$ da $H(x)$ fonk sürekli değildir.

ÖR/
$$f(x)=\begin{cases} 2\sin x & x\le -\pi/2 \\ a\sin x+b & -\pi/2<x<\pi/2 \\ \cos x & x\ge \pi/2 \end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olması için $a=?$ $b=?$

Çözüm;
fonksiyon $x=-\pi/2$, $x=\pi/2$ de süreklidir

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -\pi/2^-} 2\sin x=-2 \\ &\lim_{x\to -\pi/2^+} a\sin x+b=-a+b \end{aligned}\right\} b-a=2$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to \pi/2^+} \cos x=0 \\ &\lim_{x\to \pi/2^-} a\sin x+b=a+b \end{aligned}\right\} a+b=0$$

$a+b=0$
$-a+b=2$
$2b=2$
$b=1$
$a=-1$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ B

ÖR/
$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{1+x\sqrt{2+x}}=?$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x\ (1-x\sqrt{2+x})}{(1+x\sqrt{2+x})(1-x\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to -1}\frac{(1+x)(1-x\sqrt{2+x})}{1-x^2(2+x)}$$

$1-2x^2-x^3$
$1-x^2-x^2-x^3$
$\underbrace{1-x^2}-x^2-x^3$
$(1-x)(1+x)-(x^2+x^3)$
$(1-x)(1+x)-x^2(1+x)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(1+x)}(1-x\sqrt{2+x})}{\cancel{(1+x)}(1-x-x^2)}=2$$

ÖR/ $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0\\ 1+a, & x=0\\ \dfrac{x-b}{2x+1}, & x<0\end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{x}=3 \qquad f(0)=1+a=3$$
$$a=2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-b}{2x+1}=\frac{-b}{1}=-b \qquad -b=3$$
$$b=-3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

ÖR/ $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=? \qquad \left(\frac{0}{0}\right)^B$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}\cdot\frac{1+\cos x^2}{1+\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x^2}{x^2\sin x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\,\cancel{\sin x^2}}{\underbrace{x^2}_{1}\,\cancel{\sin x^2}}\cdot\frac{1}{1+\cos x^2}=\frac{1}{2}$$

$$1-\cos^2 x^2=\sin^2 x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ÖR/ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{1-\sqrt{1+x^2}} & , x\neq 0 \\ -2 & , x=0 \end{cases}$

fonknunun her x için sürekli olduğunu göster?

fonksiyon 0 ın haricinde her yerde süreklidir

1) x=0 fonk tanımlı mı

$f(0)=-2$ tanımlı

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{1-\sqrt{1+x^2}} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{1-\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 \cdot (1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 \, (1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{-\frac{\sin x^2}{x^2} \cdot (1+\sqrt{1+x^2})}_{-1\,.\,2\,=\,-2}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2 = f(0)$

Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ da süreklidir. $x\neq 0$ için zaten fonk heryerde tanımlı ve süreklidir.

ÖR/ $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{\tan x}$ fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olması için $f(0)$ nasıl tanımlanmalıdır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{\tan x}$$

$$=2$$

$f(0)=2$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{\tan x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\ln e=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

ÖR/ $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)$$

$$=\ln e=1$$

$\ln a^{b}=b\ln a$

ÖR/ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^{3})}{x^{3}}=1$ dir.

ÖR/

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ da süreklimidir?

$f(0)=2$ tanımlı

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x/2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cdot\frac{4}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin x/2}{\frac{x}{2}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin x/2}{\frac{x}{2}}}_{1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}\neq 2=f(0)$$

$x=0$ da fonksiyon sürekli değildir.

ÖR/

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x<-1\\ ax^2+bx, & -1\leq x<1\\ x+2, & x\geq 1\end{cases}$$

fonksiyonu her x reel sayısı için sürekli ise $a^2-b^2=?$

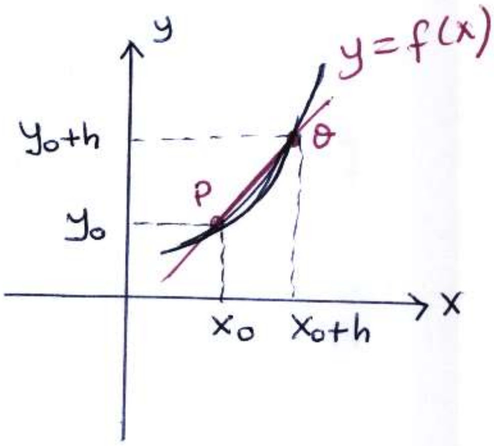
$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)\Rightarrow a-b=-3$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow a+b=3$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$=9$$

Türev

Değişim Oranı;



$f(x)$ fonksiyonunun

$[x_0, x_0+h]$ aralığındaki

değişim oranı

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ dır.}$$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ değeri f fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki anlık değişim oranıdır.

f in $[x_0, x_0+h]$ daki değişim oranı geometrik olarak P ve Q dan geçen doğrunun eğimidir.

$$m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ Eğrinin $x=x_0$ noktasındaki eğimi

Tanım; $f(x)$ fonksiyonunun x_0 daki türevi $f'(x_0)$ ile gösterilir. ve limitinin var olması koşulu ile

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$ olarak tanımlanır.

Bu durumda f fonksiyonunun x_0 da türevlenebilir olduğu söylenir.

Türev $f'(x) = y'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$

şeklinde gösterilir.

Türev tanımı şu şekilde de verilebilir.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ dır.}$$

ÖR/ $f(x) = x^2$ ise $f'(x)$'i tanımı kullanarak bulunuz.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$f'(x) = 2x$$

ÖR/ $f: R \to R$ $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$ fonksiyonunun $x = 2$ için türevini bulunuz.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{2x^3 + 3x + 4 - 22}{x - 2}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2x^2 + 4x + 11)}{\cancel{x-2}}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} 2x^2 + 4x + 11$$

$$= 27$$

* $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ limiti

1) $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki grafiğinin eğimi

2) $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki teğetinin eğimi

3) x_0 daki $f'(x_0)$ türevi anlamına gelir.

ÖR/ $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ ise $f'(x)$'i tanımı kullanarak bulunuz.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1+(x+h)^2-(1+x^2)}{h\cdot\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}(\qquad)}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Sağdan ve soldan türevler;

Bir f fonksiyonunun $x=a$ daki sağdan türevi, eğer limit mevcutsa;

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ olarak tanımlanır.

Bir f fonksiyonunun $x=a$ daki soldan türevi, eğer limit mevcutsa;

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ olarak tanımlanır.

f fonksiyonunun $x=a$ da türeve sahip olması için

$f'_+(a) = f'_-(a)$ olmalıdır.

ÖR/ $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & , x \le 1 \\ 2x-3 & , x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ deki türevini hesaplayınız.

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{[(1+h)^2-2]-(1^2-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-2+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)-3-(1^2-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2+2h-3+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$f'_-(1) = f'_+(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$ dir.

ÖR/

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 5 & , x < 1 \\ x^2 + bx - 3 & , x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada türevli olması için b değerini bulunuz.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$a - 2 + 5 = 1 + b - 3$$

$$a + 3 = b - 2$$

$$a - b = -5$$

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$2ax - 2 = 2x + b$$

$$2a - 2 = 2 + b$$

$$2a - b = 4$$

$$\begin{array}{r} a - b = -5 \\ -\,2a + b = -4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} -a = -9 \\ a = 9 \end{array}$$

$$a - b = -5$$

$$9 - b = -5 \Rightarrow -b = -14$$

$$b = 14$$

ÖR/

$f: R \to R$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x<2 \\ 5x-1, & x \geq 2 \end{cases}$

fonksiyonuna göre $f'(2^-) + f'(2^-)$

toplamını bulunuz.

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5$$

bulunur. Buna göre

$$f'(2^-) + f'(2^+)$$

$$4 + 5 = 9$$

ÖR/

$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ x^2-1, & x > 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevini bulunuz.

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+)$ olduğundan $f'(2)$ yoktur.

Türev ve Süreklilik

Bir fonksiyon

1) Bir noktada sürekli değilse o noktada türevli değildir.
2) Bir noktada türevli ise o noktada süreklidir.
3) Bir noktada sürekli ise o noktada her zaman türevli olmayabilir.

ÖR/ $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2-x-6}$ fonksiyonunun hangi noktalarda türevsiz olduklarını bulunuz.

$f(x)$ kesirli bir fonksiyon olduğundan paydayı sıfır yapan değerler için süreksizdir.

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3$ ve $x=-2$ için $f(x)$ fonksiyonunun türevi yoktur.

ÖR/ $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx & , x \leq 1 \\ 5x+3 & , x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu $x=1$ de türevli olduğuna göre $3a+2b$ toplamını bulunuz.

Kritik noktada fonksiyonun türevinin olabilmesi için

1) sürekli olması 2) sağ ve sol türevleri eşit olmalı

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \Rightarrow 8 = a+b$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2ax+b=5$

$2a+b=5$

$a+b=8$

$3a+2b=13$

Türev Alma Kuralları

1) $f(x)=c$ (c sabit) ise $f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n$ $\quad f'(x)=nx^{n-1}$

3) $f(x)\mp g(x) \Rightarrow f'(x)\mp g'(x)$

4) $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

5) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$ $\quad g(x)\neq 0$

6) $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=1+\tan^2 x=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x)=\cot x \Rightarrow f'(x)=-(1+\cot^2 x)=-\operatorname{cosec}^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)=\sec x \Rightarrow f'(x)=\sec x \tan x$

$f(x)=\operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{cosec} x\cdot\cot x$

7) Bileşke Fonk Türevi

$(f\circ g)'(x)=(f(g(x))'=f'[(g(x))]\cdot g'(x)$

ÖR/ $f(x)=2x^2-3x$ ve $g(x)=x^2+x$ ise

$(f\circ g)'(x)=?$ $\quad f'(x)=4x-3$

$(f\circ g)'(x)=f'[(g(x)]\cdot g'(x)$

$=[4g(x)-3]\cdot(2x+1)$

$=[4(x^2+x)-3](2x+1=8x^3+12x^2-2x-3$

ÖR/ $y = \operatorname{Tan}(5-\sin 2t) \qquad y' = ?$

$$y' = \sec^2(5-\sin 2t)\,(-2\cos 2t)$$

ÖR/ $r = \sin(f(t)) \qquad f(0) = \pi/3\ ,\ f'(0) = 4 \qquad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = ?$

$$\frac{dr}{dt} = \cos(f(t))\,f'(t)$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = \cos(\underbrace{f(0)}_{\pi/3}) \cdot \underbrace{f'(0)}_{4} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

ÖR/ $f'(3) = -1\ ,\ g'(2) = 5\ ,\ g(2) = 3 = y = f(g(x))$
ise $y'(2) = ?$

$$y' = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$y'(2) = f'(\underbrace{g(2)}_{3})\,\underbrace{g'(2)}_{5} = -1.5 = -5$$

ÖR/ $y = \sin(2x) + 3\cos^2 x$

$$y' = 2 \cdot \cos 2x + 3 \cdot 2\cos x(-\sin x).$$

$$y' = 2\cos 2x + 6\cos x\,(-\sin x)$$

ÖR/ $y = \cos(x^3+5x-1) \qquad y' = (3x^2+5)\,(-\sin(x^3+5x-1))$

$$y' = -\sin(x^3+5x-1)\,(3x^2+5)$$

ÖR/ $y = x^3 \tan x$ old göre $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\pi/4} = ?$

$$y' = 3x^2 \tan x + x^3 \cdot (1+\tan^2 x)$$

$$y'\Big|_{\pi/4} = 3 \cdot (\pi/4)^2 \tan \pi/4 + (\pi/4)^3 \left(1+\tan^2 \pi/4\right)$$

$$= 3\pi^2/16 \cdot 1 + \frac{\pi^3}{64}(1+1) = \frac{3\pi^2}{16} + \frac{\pi^3}{32}$$

ÖR/ $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{-\cos^4 x + \sin^4 x}$ $f'(x) = ?$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{\sin 2x}{\underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x}\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}}$$

$$f(x) = -\tan 2x$$

$f'(x) = -2\,(1 + \tan^2 2x)$ olur.

ÖR/ $f(x) = x^3 + \dfrac{a}{x} - 3$ fonksiyonu için $f'(1) = 5$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

$$f'(x) = 3x^2 + a\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$f'(1) = 3 - a = 5 \Rightarrow -a = 5 - 3$$

$$-a = 2 \qquad a = -2$$

ÖR/ $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3}$ $f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{6x\,(x^3) - 3x^2\,(3x^2 - 1)}{(x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^4 - 9x^4 + 3x^2}{x^6}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(-3x^2+3)}{x^6}$$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-1)}{x^4}$$

$[f(x)]^n$ türevi

$n \in R$ ve f türevlenebilen bir fonksiyon ise

$$[f(x)^n]' = n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

Ör/ $f: R \to R$ $\quad f(x) = (x^2 - x)^3$ ise $f'(x) = ?$

$$f'(x) = 3(x^2-x)^2 \cdot (2x-1)$$

$f(x) = \sqrt{g(x)}$ fonksiyonunun turevi

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \text{ dir.}$$

Ör/ $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

Zincir Kuralı

Eğer y, x in ve x de t nin birer türevlenebilir fonksiyonu ise

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

ÖR/ $y = 3x^2 + 2$, $x = t^3$ $\Big\}$ $\frac{dy}{dt} = ?$

Özel olarak t de s nin türevlenebilir bir fonksiyonu ise

$y = y(x)$, $x = x(t)$, $t = t(s)$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

Teorem (Zincir Kuralı)

Eğer g, x değişkenine göre ve f de, $u = g(x)$ değişkenine göre türevlenebilir iki fonksiyon ise, $f\circ g$ bileşke fonksiyonu, x değişkenine göre türevlenebilir ve

$$(f\circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$ dir.

ÖR/ $y = \ln(\sin x)$ $\quad x = \sqrt{\arcsin 2^{-3t}}$ ise $\frac{dy}{dt} = ?$

$y = y(x)$ $\quad x = x(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \underline{\cot x \cdot -3 \cdot 2^{-3t} \ln 2 / \sqrt{1-2^{-6t}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(\arcsin 2^{-3t})'}{2\sqrt{\arcsin 2^{-3t}}} = \frac{-3 \cdot 2^{-3t} \cdot \ln 2 / \sqrt{1-2^{-6t}}}{2\sqrt{\arcsin 2^{-3t}}}$$

ÖR/ $y = \sqrt[3]{\arctan x}$ $\quad x = \sqrt[5]{\cos(\ln^3 t)}$ $\quad \dfrac{dy}{dt} = ?$

$y = y(x)$ $\quad x = x(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} (\arctan x)^{-2/3} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = (\arctan x)^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3} (\arctan x)^{-2/3} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \left[-\frac{1}{5} [\cos(\ln^3 t)]^{-4/5} \cdot 3\ln^2 t \cdot \frac{1}{t} \sin(\ln^3 t) \right]$$

$$x = \sqrt[5]{\cos(\ln^3 t)}$$

$$x = [\cos(\ln^3 t)]^{1/5}$$

$$x' = \frac{1}{5} [\cos(\ln^3 t)]^{-4/5} \cdot 3 \ln^2 t \cdot \frac{1}{t} [-\sin(\ln^3 t)]$$

ÖR/ $y = 2x^2 - 5x + 1$

$x = 2t^2 + 1$ $\quad$ olarak veriliyor. $\dfrac{dy}{ds} = ?$

$t = 3s - 1$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = (4x - 5)(4t) \cdot 3 = (4x-5)(12t)$$

$$= 4(2t^2 + 1 - 5)(12 \cdot (3s-1))$$

$$= 4(2t^2 - 4)(36s - 12)$$

$$\frac{dy}{ds} = 4(2 \cdot (3s-1)^2 - 4)(36s - 12)$$

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geqslant 2$ olmak üzere

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \text{ ise } f'(x) = \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{g^{n-1}(x)}} \text{ dir.}$$

ÖR/ $f(x) = \sqrt[3]{x^2+3x+2}$ $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{(x^2+3x+2)'}{3\sqrt[3]{(x^2+3x+2)^2}} = \frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x+2)^2}}$$

ÖR/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+4}}{x}$ olduğuna göre $f'(4) = ?$

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}\cdot x - \sqrt{3x+4}}{x^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{4} - 4}{16}$$

$$f'(4) = \frac{-5/2}{16} = -5/32$$

ÖR/ $f(x) = (x^2+2x+3)^3$ olduğuna göre $f'(-1) = ?$

$$f'(x) = 3(x^2+2x+3)^2 \cdot (2x+2)$$

$$f'(-1) = 3(1-2+3)^2(-2+2) = 0$$

ÖR/ $f(3x-4) = g(5x^2-6)$ ve $g'(14) = 3$ olduğuna göre $f'(2) = ?$

$$f'(3x-4)\cdot 3 = g'(5x^2-6)\cdot(10x)$$

$3x-4 = 2 \qquad 3x = 6$
$\qquad\qquad\qquad\quad x = 2$

$$f'(2)\cdot 3 = g'(14)\cdot 20 \Rightarrow f'(2)\cdot\cancel{3} = \cancel{3}\cdot 20$$

$$f'(2) = 20$$

$f(x) = \ln(g(x))$ fonksiyonunun türevi

$f: R^+ \to R$ $f(x) = \ln x$ ve türevlenebilen g fonksiyonu için $g(x) > 0$

$$[\ln(g(x))]' = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ dir.}$$

$f(x) = \log_a g(x)$ ise

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \text{ dır.}$$

ÖR/ $f(x) = \ln(x^3 + 4x)$ $\quad f'(x) = \dfrac{3x^2+4}{x^3+4x}$

ÖR/ $f(x) = (\ln x)^5$ $\quad f'(x) = 5.(\ln x)^4 . \dfrac{1}{x}$

ÖR/ $f: R^+ \to R$ $\quad f(x) = \ln^3(x^2+2x)$ $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = 3.\ln^2(x^2+2x).\frac{2x+2}{x^2+2x}$$

$$f'(x) = \frac{(6x+6)\ln(x^2+2x)}{x^2+2x}$$

ÖR/ $f(x) = \ln(\sin x)$ $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

ÖR/ $x^2 \leq 3$ olmak üzere $f(x) = \ln\sqrt{3-x^2}$ fonk için $f'(1) = ?$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{3-x^2})'}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{3-x^2}}}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{-x}{3-x^2} \xleftarrow{f'(1)} = \frac{-1}{2}$$

Üstel fonksiyonların türevi:

$a>0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f(x)=a^{u(x)}$

biçimindeki ifadelere üstel fonksiyon denir.

$$f(x)=a^{u(x)}$$

$$\ln f(x) = \ln a^{u(x)} = u(x)\ln a$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = u'(x)\ln a + \underbrace{u(x).0}_{0}$$

$$f'(x)=f(x)\,u'(x)\ln a$$

$$f'(x)=a^{u(x)}.u'(x)\ln a$$

$a=e$ alınırsa

$$f(x)=e^{u(x)} \qquad f'(x)=e^{u(x)}.u'(x)$$

ÖR/ $f(x)=e^{3x^2-1}$ $\quad f'(x)=?$

$$f'(x)=e^{3x^2-1}.(3x^2-1)'=e^{3x^2-1}.6x$$

ÖR/ $f(x)=2^{x^2+3}$ $\quad f'(x)=?$

$y=2^{x^2+3}$ ise $\quad \ln y = \ln 2^{x^2+3}$

$$\ln y = (x^2+3)\ln 2$$

$$\frac{y'}{y} = \underbrace{(x^2+3)'}_{2x}\ln 2 + (x^2+3)\underbrace{(\ln 2)'}_{0}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln 2 \Rightarrow y' = 2^{x^2+3}\left[2x\ln 2\right]$$

ÖR/ $f(x) = \ln(\underbrace{\ln x})$ $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

ÖR/ $f(x) = e^{\tan x}$ ise $f'(\pi/4) = ?$

$f'(x) = (\tan x)' e^{\tan x}$

$f'(x) = (1 + \tan^2 x) e^{\tan x}$

ÖR/ $y = t^2 + t + 1$, $t = \sqrt{z} - 3$ $\quad z = 2x - 1$ olduğuna göre

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = (2t+1) \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{z}} \cdot \cancel{2} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$x = 5 \quad z = 9 \quad t = 0$

ÖR/ $f^2(x) = x^3 - x + 3$ veriliyor. $f(-2) = 5$ olduğuna göre $f'(-2)$ değerini bulunuz

$[f^2(x)] = (x^3 - x + 3)'$

$2 . f(x) . f'(x) = 3x^2 - 1$

$2 \underbrace{f(-2)}_{5} f'(-2) = 3 . (-2)^2 - 1$

$10 . f'(-2) = 11 \quad f'(-2) = \frac{11}{10}$

Trigonometrik fonk türevi:

$f(x) = \sin u \qquad u = u(x)$

$f'(x) = u' \cos u$

$f(x) = \cos u \qquad u = u(x)$

$f'(x) = -u' \sin u$

$f(x) = \tan u$

$f'(x) = u'(1+\tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u' \sec^2 u$

$f(x) = \cot u$

$f'(x) = -u'(1+\cot^2 u) = \dfrac{-u'}{\sin^2 u} = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

ÖR/ $f(x) = \cos(x^3+5x-1) + \sin(x^3-2x) + \tan(x^2+3x)$

$f'(x) = -(3x^2+5)\sin x + (3x^2-2)\cos x + (2x+3)(1+\tan^2(x^2+3x))$

ÖR/ $f(x) = \sin^5(x^2) \qquad f'(x) = ?$

$f(x) = (\sin x^2)^5$

$f'(x) = 5.(\sin x^2)^4.\,2x.\cos x^2$

$f'(x) = 10x(\sin x^2)^4.\cos x^2$

ÖR/ $f(x) = \sqrt{\sin x} \qquad f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

ÖR/ $y = \sin\sqrt{x}$ $\quad y' = ?$

$$y' = (\sqrt{x})' \cos\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$$

ÖR/ $y = \cos(\sin^2 x)$ $\quad y' = ?$

$$y' = (\sin^2 x)' (-\sin(\sin^2 x))$$

$$y' = \underbrace{2\sin x . \cos x}_{\sin 2x} (-\sin(\sin^2 x))$$

ÖR/ $f(x) = \sin(\sin x).\cos x)$ $\quad f'(0) = ?$

$$f'(x) = \cos.\ (\sin x) \cdot (\sin x)' . \cos x + (-\sin x) \sin(\sin x)$$

$$f'(x) = \cos\ (\sin x) \cos^2 x - \sin x \sin(\sin x)$$

$$f'(0) = \underbrace{\cos\ (-\sin 0)}_{\cos 0} \cos^2(0) - \underbrace{\sin 0 . \sin(\sin 0)}_{0} = 1$$

ÖR/ $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ olduğuna göre $f'(\pi^2/4) = ?$

$$f'(x) = \frac{(\sin\sqrt{x})'}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{(\sqrt{x})' \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{1/2\sqrt{x}\ \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$f'(\pi^2/4) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\pi^2/4}} \cdot \cos\sqrt{\pi^2/4}}{2\sqrt{\sin\sqrt{\pi^2/4}}} = \frac{\frac{1}{\pi} . 0}{2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}} = \frac{0}{2} = 0$$

ÖR/ $f(x) = e^{\cos^3 x}$ $\quad f'(x)$

$$y = e^{\cos^3 x}$$

$$\ln y = \ln e^{\cos^3 x} \Rightarrow \ln y = \cos^3 x \underbrace{\ln e}_{1}$$

$$y'/y = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)'$$

$$y'/y = 3\cos^2 x\,(-\sin x)$$

$$y' = e^{\cos^3 x}\,(3\cos^2 x)(-\sin x)$$

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri;

$y = \text{Arc}\sin f(x)$ $\quad y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$

$y = \text{Arc}\cos f(x)$ $\quad y' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$

$y = \text{Arc}\tan f(x)$ $\quad y' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

$y = \text{Arc}\cot f(x)$ $\quad y' = -\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

Bir fonksiyonun Yüksek Mertebeden Türevleri

$y = f(x)$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$\vdots$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$ n. mertebeden türev

ÖR/ $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 7x - 1$

$f''(x) = ?$

$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 4x + 7$

$f''(x) = 20x^3 - 24x + 4$

Ters Fonksiyon Türevi

Eğer f in tanım kümesi I ise ve I üzerinde $f'(x)$ varsa, f^{-1} tanım kümesinin her noktasında türevlenebilirdir. ve

Türevi $$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$ dir.

ÖR/ $f(x)=x^2 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = ?$

I yol: $x^2=y \quad x=\sqrt{y} \quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II yol: $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=2x$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

Logaritmik türev;

$f(x)=(g(x))^{h(x)}$ ise

$$\ln f(x) = \ln\left[(g(x))^{h(x)}\right] = h(x)\ \ln g(x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ \ln g(x) + h(x)\cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = f(x)\left[h'(x)\ \ln g(x) + h(x)\ \frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$ dur.

ÖR/ $f(x)=x^x \qquad f'(x)=?$

$$f(x)=x^x \Rightarrow \ln f(x) = \ln x^x = x\ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = x^x\left[\ln x + 1\right]$$

ÖR/ $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$ $\quad y' = ?$

$$\ln y = \ln \left[\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right] = \ln (\ln x)^x - \ln x^{\ln x}$$

$$\ln y = x \ln (\ln x) - \underbrace{\ln x \, . \, (\ln x)}_{(\ln x)^2}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln (\ln x) + x . \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} - 2 \ln x . \frac{1}{x}$$

$$y' = \left[\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right] \left(\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$$

Belirsiz Şekiller:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ şeklindeki ifadeler belirsizdirler (Aritmetik olarak bir anlamları yoktur.)

Belirsizlik tipi	Örnek
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln (1/x^2)}{\cos x^2}$
$0 . \infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} x . \ln \left(\frac{1}{x} \right)$
$\infty - \infty$	$\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \left(\tan x - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
0^0	$\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$
∞^0	$\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (\tan x)^{\cos x}$
1^∞	$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

L'hopital kuralı;

① $x \to a$ için $f(x) \to 0$ $g(x) \to 0$

② $x \to a$ için $f(x) \to \mp\infty$ $g(x) \to \mp\infty$ } ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$x \to a$ notasyonunda a sonlu veya sonsuz olabilir.

$x \to a$ ifadesi $x \to a^+$, $x \to a^-$ ifadeleri ile değiştirilebilir.

ÖR/ $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln \infty}{2\sqrt{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$$ $\ln \infty = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖR/ $$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} \ 0/0$$

$$\overset{0/0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x} = \frac{6}{2} = 3$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ $\infty - \infty$ $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

$(\sin x + x\cos x)'$

$\cos x + \cos x - x\sin x$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x}{2\cos x - x\sin x}$$

$$= 0$$

ÖR/ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ $\infty \cdot 0$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$ $\frac{0}{0}$ dönüştürüp yazdık

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = 1/2$$

Logaritmik Limit

$1^\infty, 0^0, \infty^0$ için kullanılır.

ÖR/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = ?$ ∞^0 belirsizliği

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \sin x \ (-\ln x)$$

$$= -\sin x (\ln x)$$

$$\ln y = -\sin x \ln x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} (-\sin x \ln x)$$

$$\infty/\infty$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0^+} - \frac{1/x}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = e^0 = 1$$

(1) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$ (2) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\ln 1 = 0$

$\log_a 1 = 0$

(3) $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ (4) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

(5) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

Kapalı Fonksiyonun Türevi:

$F(x,y)=0$ şeklindeki bir fonksiyon y'yi x in bir kapalı fonksiyonu olarak tanımlar.

Örneğin $y = x^2$ fonksiyonun açık hali
$F(x,y) = y - x^2 = 0$ // kapalı halidir.

Bu fonksiyonun türevini alırken;
y fonksiyonunun x'e göre türevi alınabilir.
bir fonk olduğu kabul edilerek denklemin x'e göre türevi alınır. Elde edilen türev denkleminden y' çekilir.

ÖR/ $y^6 - y - x^3 = 0 \Rightarrow y' = ?$

x'e göre türev al.

$6 \cdot y^5 \cdot y' - y' - 3x^2 = 0$ $y'(6y^5 - 1) = 3x^2$

$$y' = \frac{3x^2}{6y^5 - 1}$$

ÖR/ $x^3+y^3-9xy=0 \quad y'=?$

$$3x^2+3y^2\cdot y'-9y-9xy'=0$$

$$y'(3y^2-9x)=9y-3x^2$$

$$y'=\frac{9y-3x^2}{3y^2-9x}$$

Bir eğrinin teğet ve Normal doğrusu

$y=f(x)$ bir eğri ve $P(x_0,y_0)$ eğri üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda $x=x_0$ dan geçen teğet doğrunun eğimi $m_T=f'(x_0)$ ve teğet doğrunun denklemi

$$y-y_0=m_T(x-x_0)$$

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

Normal doğrunun denklemi

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \text{ dir.}$$

ÖR/ $y=\tan\frac{\pi}{4}x$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\left.\left(1+\tan^2\frac{\pi x}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}\right|_{(1,1)}=(1+1)\pi/4=\pi/2$$

$$m_T=\pi/2 \qquad m_N=\frac{-2}{\pi}$$

Teğet denk $\quad y-1=\pi/2\,(x-1) \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}x+1-\pi/2$

Normal " $\quad y-1=-\frac{2}{\pi}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}+1$

Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkların türev yardımıyla bulma;

$f: [a,b] \to R$ $f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevli olsun. $\forall x \in (a,b)$ için

1) $f'(x) > 0$ ise $f(x)$, $[a,b]$ de artan

2) $f'(x) < 0$ // $f(x)$, $[a,b]$ de azalandır.

ÖR/ $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 6$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

$$f'(x) = 0 = -3(x^2 - 2x - 3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

x		-1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$(-\infty, -1]$ ve $[3, \infty)$ artan
$[-1, 3]$ azalan

ÖR/ $f: R \to R$, $f(x) = 6x - x^3$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

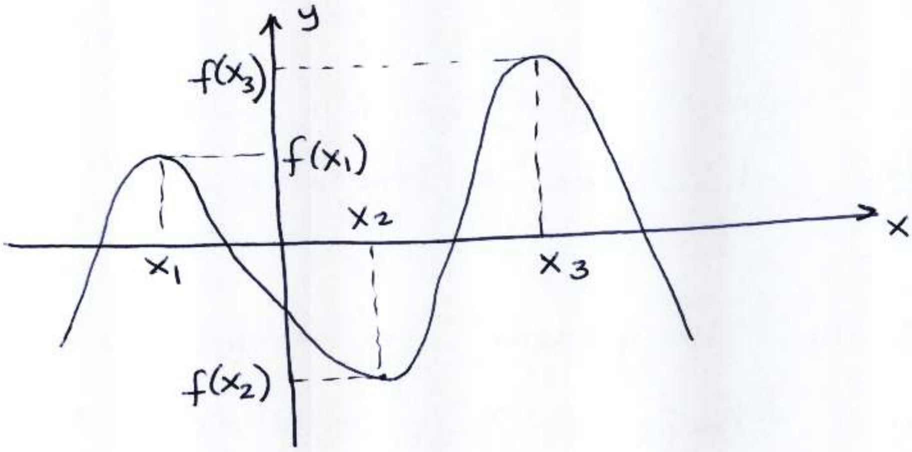
$$f'(x) = 6 - 3x^2 = 0 \qquad -3x^2 = -6$$

$$x^2 = 2 \qquad x_{1,2} = \mp\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		∞
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘		↗		↘	

f, $(-\infty, -\sqrt{2}]$ ve $[\sqrt{2}, \infty)$ aralığında azalan $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ aralığında artandır.

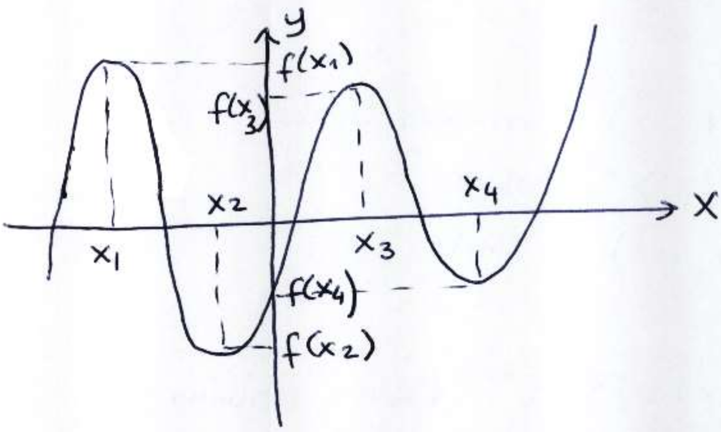
Bir fonksiyonun maksimum değerleri



Yerel maksimum değeri, fonksiyonun belli aralıkta aldığı en büyük değerdir.

$(x_1, f(x_1))$, $(x_3, f(x_3))$ noktalarına yerel maksimum nokta $(x_3, f(x_3))$ noktasına mutlak maksimum nokta denir.

$f(x_1)$ ve $f(x_3)$ değerlerine yerel maksimum değerler denir.



Yerel minimum değeri, fonksiyonun belli aralıkta aldığı en küçük değerdir.

$(x_2, f(x_2))$ ve $(x_4, f(x_4))$ noktalarına yerel minimum nokta $(x_2, f(x_2))$ noktasına mutlak minimum nokta denir.

$f(x_2)$ ve $f(x_4)$ değerlerine yerel minimum değerler denir.

Ekstremum noktaların maksimum ve minimum olduğunun belirlenmesi:

Fonksiyonun birinci türev fonksiyonunu sıfır yapan tek katlı köklerde ekstremum noktalar vardır.

Ekstremum noktaların hangisinin maksimum, hangisinin minimum olduğu birinci türevin işareti incelenerek bulunur.

ÖR/ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ fonksiyonunun maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 0$$

$$8x(x^2-1) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = \mp 1$$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
		min		max		min	

$f(-1) = 2 - 4 + 1 = -1$ $\quad (-1,-1)$ minimum nokta

$f(0) = 1$ $\quad (0,1)$ max "

$f(1) = -1$ $\quad (1,-1)$ min "

ÖR/ $f: [-2,5] \to \mathbb{R}$ $f(x) = 3 - x^2$ fonksiyonunun mutlak minimum noktasını bulunuz.

$f'(x) = -2x = 0 \qquad x = 0 \qquad f(0) = 3$

$x = -2 \qquad f(-2) = -1$

$x = 5 \qquad f(5) = -23$

$f(x)$ in mutlak minimum noktası $(5,-23)$ tür.

İkinci türevden faydalanarak Ekstremum noktalarının bulunması:

$f: [a,b] \to R$, $f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri var,

$x_0 \in [a,b]$ için $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0) \neq 0$ olmak üzere

1) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ da yerel maksimum

2) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ da yerel minimum vardır.

ÖR/ $f: R \to R$, $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 1$ yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 0$$
$$3(x^2 - 4x - 5) = 0$$
$$x_1 = 5 \quad x_2 = -1$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(5) = 6.5 - 12 = 18 > 0$$

$x=5$ te yerel minimum

$$f''(-1) = 6.(-1) - 12 = -18 < 0$$

$x=-1$ de yerel maksimum vardır.

Yerel ekstremum noktalar $(5,-101)$ ve $(-1,7)$ dir.

Bir Fonksiyonun ikinci türevinin geometrik Yorumu:

$f''(x) > 0$ olduğu aralıkta $f(x)$ fonksiyonu konveks (dış bükey) dir. $\smile$

$f''(x) < 0$ $f(x)$ fonk konkav (iç bükey) dır $\frown$

$f(x)=0$ yapan tek katlı köklerde $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktası vardır.

ÖR/ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ fonksiyonunun grafiğinin iç bükey yada dış bükey olduğu aralıkları bulunuz.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f''(x) = 6x - 6 = 0$ $\quad x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩		∪
	iç bükey		dış bükey

$(1, +\infty)$ dış bükey

$(-\infty, 1)$ iç bükey

ÖR/ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 15$ fonksiyonunun dönüm noktasının koordinatlarını bulunuz.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 15$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 12$

$f''(x) = 6x - 18 = 0$ $\quad x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩		∪
	iç bükey		dış bükey

$(3, 21)$ $f(x)$ in dönüm noktasıdır.

Düşey Asimptot

$y=f(x)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$$

ise $x=a$ doğrusuna $f(x)$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir.

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ paydayı sıfır yapan nokta düşey asimptottur.

ÖR/ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ fonk düşey asimptotunu bulunuz.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1-h}{1-h-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1-h}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h}{1+h-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h}{h} = +\infty$$

$x=1$, $f(x)$ in düşey asimptotudur.

ÖR/ $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$ fonk düşey asimptotunu bulunuz.

$x^2+2x-8=0 \qquad (x+4)(x-2)=0$

$x=-4 \quad x=2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{6}$$

$x=2$ düşey asimptot değildir.

$x=-4$ düşey asimptottur.

Yatay Asimptot

$y=f(x)$ fonksiyon, $a \in R$ olmak üzere

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$ ise

$y=a$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotu denir.

ÖR/ $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x+2}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x+2} = 3 \\[2ex] \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+x+2} = 3 \end{array}\right\} y=3 \text{ yatay asimptottur.}$$

Fonksiyon Grafiklerinin Çizimi

Fonksiyonların grafiği çizilirken

1) Fonksiyonun en geniş tanım kümesi bulunur.
2) Grafiğin eksenleri kestiği noktalar bulunur.
3) Asimptotlar bulunur.
4) Varsa ekstremum noktaları bulunur.
5) Tablo yapılır
6) Grafik çizilir.

ÖR/ $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$T.K = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$x = 0 \quad y = 0$

$y = 0 \quad 0 = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$

$x = 0 \quad x^2 = 3$

$x = \mp\sqrt{3}$

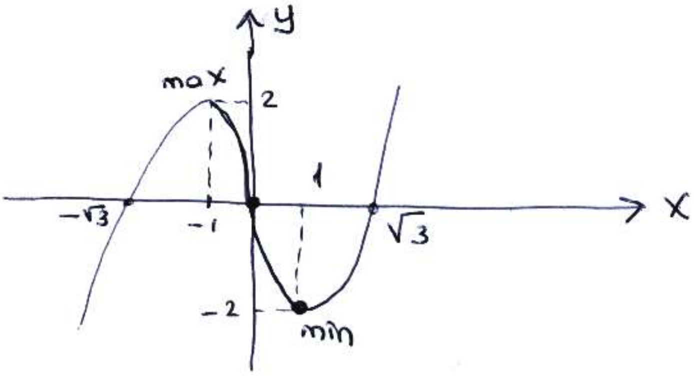
$(0,0) \ , \ (\sqrt{3}, 0) \ , \ (-\sqrt{3}, 0)$

$y' = 3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3 \quad x^2 = 1 \quad x = \mp 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2 max	$\searrow$	-2 min	$\nearrow$	$+\infty$

$y'' = 6x = 0 \quad x = 0 \quad D.N$



ÖR / $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$x-3 \neq 0 \qquad x \neq 3 \qquad T.K = \mathbb{R} - \{3\}$

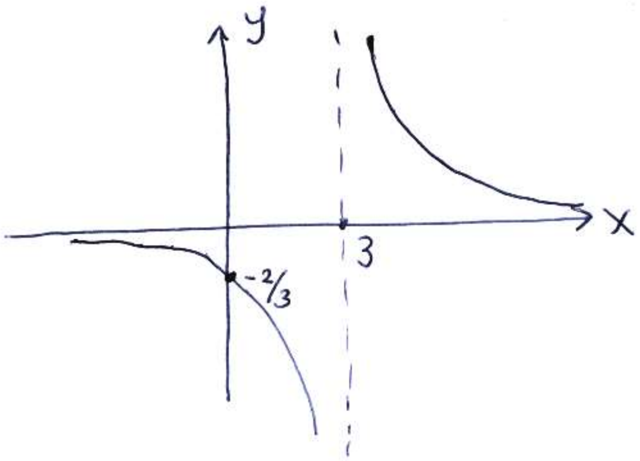
$x=0 \qquad y = -2/3$

$x=3$ düşey asimptot

$y=0$ yatay asimptot

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-3)^2} < 0$ daima azalandır.

x	$-\infty$		0	3		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2/3$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0



$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{3-h-3} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{3+h-3} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{h} = +\infty$$

ÖR/ $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$x = 1$ de düşey asimptot vardır.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$ $x = 1$ yatay asimptot.

$$y' = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

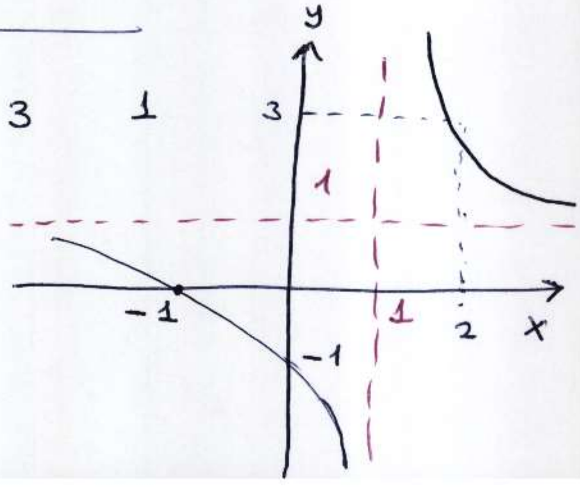
$y'' = \dfrac{4}{(x-1)^3}$ dür. $x < 1$ için $y'' < 0$

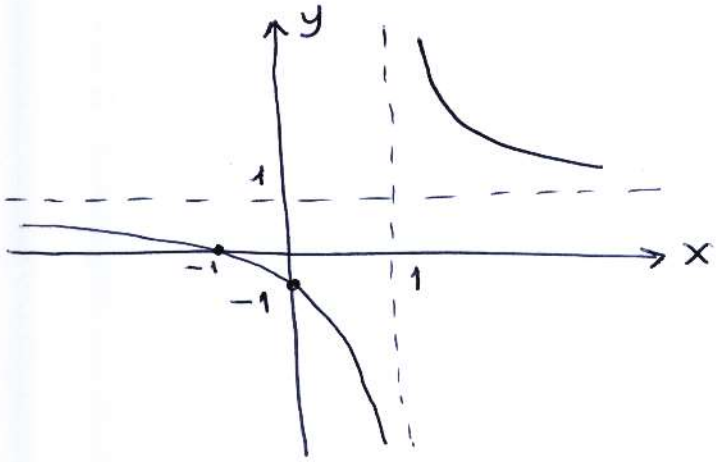
çukurluk aşağı doğru

$x > 1$ için $y'' > 0$

çukurluk yukarı doğru

x	$-\infty$	-1	0	1	2	∞
y'	$-$	$-$	$-$	$\Vert$	$-$	$-$
y	1	0	-1	$-\infty \Vert +\infty$	3	1




y
x
1
-1
-1
1