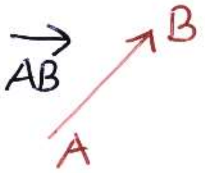
Vektörler:

Vektörel büyüklükler vektör adı verilen yönlü doğru parçaları ile gösterilirler. Vektör, belirli bir uzunluğa, belirli bir doğrultuya ve belirli bir yöne sahip bulunan bir doğru parçasıdır.



$|\overrightarrow{AB}|$ vektörün modülü veya uzunluğu

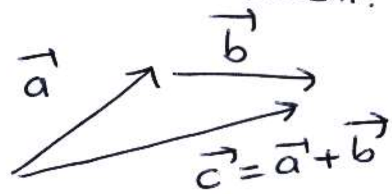
Vektörlerin eşitliği:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektör alalım. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin başlangıç noktaları farklı fakat doğrultu, yön ve büyüklükleri (modülleri) aynı ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörü eşittir denir $\vec{a}=\vec{b}$ ile gösterilir.

İki vektörün Toplamı ve Farkı

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olsun.

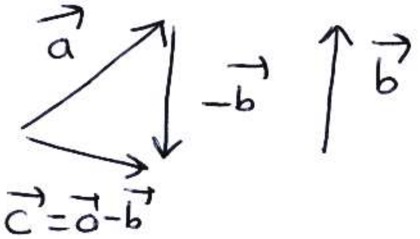
$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ dır.

$\vec{a}-\vec{b}$ farkı $\vec{a}$ ve $(-\vec{b})$ vektörlerinin toplamı olup

$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ şeklinde ifade edilir.



Bir vektörün bir Skalerle Çarpımı

$\vec{a}$ vektörünün m gibi bir pozitif sayı ile çarpımı olan $m\vec{a}$ vektörü $\vec{a}$ vektörü ile aynı doğrultu ve yöndedir.

$|m\vec{a}| = m|\vec{a}|$ dır.

$m<0$ ise $\vec{a}$ ve $m\vec{a}$ nın doğrultuları aynı yönleri birbirinin tersidir.

Birim vektör; $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}.\vec{a}$, $\vec{a}$ vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olan modulü 1 olan bir vektördür.

Vektörlerin Oxyz eksen takımı üzerinde tanımlanması

Uzaydaki bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ şeklinde gösterilir.

vektörün bileşenleri

Düzlemde ise $\vec{a} = (a_1, a_2)$ dır.

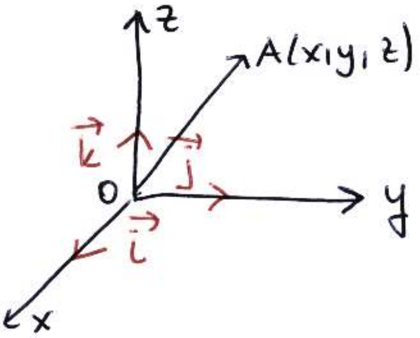
Bileşenlerinin hepsi sıfır olan vektöre sıfır vektör denir. $\vec{0} = (0,0,0)$ dır.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörleri

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorleri O_x, O_y, O_z eksenleri doğrultusundaki birim vektörlerdir. Buna göre

$\vec{i} = (1,0,0)$ $\vec{j} = (0,1,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$ dır.

Uzayda bir $A(x, y, z)$ noktası alalım.



$\vec{OA}$ vektörü A noktasının yer vektörüdür.

$\vec{OA} = \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

şeklindedir.

Bu bir vektörün bu şekilde ifadesine kartezyen birim (baz) vektörleri cinsinden ifadesi denir.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dır.

Tanım: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

ise $\vec{a}+\vec{b} = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j} + (z_1+z_2)\vec{k}$ dır.

k bir skaler ise

$k\vec{a} = kx_1\vec{i} + ky_1\vec{j} + kz_1\vec{k}$ dır.

Skaler Çarpım:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün skaler çarpımı, bu vektörlerin a ve b büyüklükleriyle vektörler arasındaki açının kosinüsü çarpımına eşittir.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

İki vektörün skaler çarpımı bir skaler sayıdır.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3) $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$

4) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

5) $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad (\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$

6) Eğer $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri sıfır vektör değilse $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ dik vektörlerdir.

ÖR/ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ve $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ vektörlerinin birbirine dik olduğunu gösteriniz.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ olmalı

$(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})\cdot(\vec{i} + 2\vec{k}) = 2 - 2 = 0$

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ dik vektörlerdir.

İki vektör arasındaki açı;

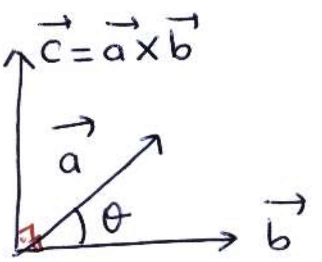
$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad , \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

ise

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} \text{ dir.}$$

Vektörel Çarpım:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör açı θ olsun.



$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta.\vec{u}$$

Vektörel çarpım bu iki vektörün belirttiği düzleme dik doğrultuda bir vektördür. $\vec{c}\perp\vec{a}$ ve $\vec{c}\perp\vec{b}$ dir.

$\vec{u}$ vektörü $\vec{c}$ ile aynı doğrultu ve yönde birim vektördür.

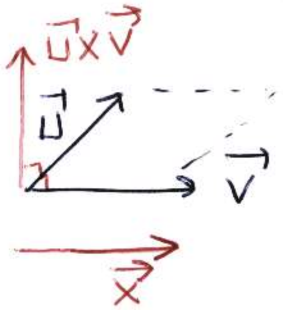
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ karışık çarpımı $\vec{a}, \vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmine eşittir.

İki kat vektörel çarpım:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üç vektör olmak üzere $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ifadesine üç vektörün iki kat vektörel çarpımı denir.

ÖR/ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ vektörlerinin belirttiği düzleme paralel olan $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j}$ vektörüne dik olan bir birim vektör bulunuz.

Bir $\vec{x}$ vektörü alalım. $\vec{x}$ vektörü $\vec{u}$ ve $\vec{v}$'nin belirttiği düzleme paralel olduğundan $\vec{u}\times\vec{v}$ vektörel çarpımına diktir.



$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{x} = 0 \\ 2)\ \vec{x}\cdot\vec{w} = 0 \end{array}\right\}$$

$\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ olsun.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{x} = 0$

$-6a + 8b + 2c = 0$

$\vec{x}\cdot\vec{w} = 0$

$a - 2b = 0$

$-6a + 8b + 2c = 0$

$a - 2b = 0$

$a = 2b$

$c = 2b$ olur.

$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \mp \frac{b(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{b^2(4+1+4)}} = \mp\left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right)$$

olur

Vektörel çarpım bir vektördür.

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3) $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$ m skaler

4) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

5) $\vec{a} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$\vec{b} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

6) Eğer $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ sıfır vektör değil ve $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ paralel vektörlerdir.

7) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| . \sin\theta$ dır.

$|\vec{a} \times \vec{b}|$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşittir.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin Karışık Çarpımı

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin karışık çarpımıdır. Sonuç skalerdir.

$\vec{a} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$

$\vec{b} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

$\vec{c} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ tur.

ÖR/ $A(1,2,3)$ $B(-1,2,-3)$, $C(-1,4,2)$ noktaları veriliyor.

1) $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ vektörlerine dik olan birim vektör bulunuz.

2) Bu noktalardan geçen düzlemin denklemini bulunuz.

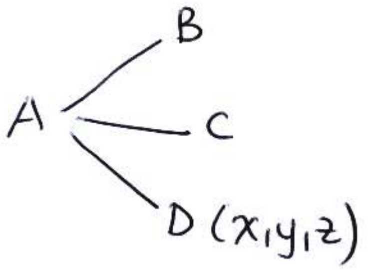
1) $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = -2\vec{i} - 6\vec{k}$

$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \mp \frac{12\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{144 + 100 + 16}} = \mp \frac{12\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}}{2\sqrt{65}}$$

2)



$\vec{AB} = -2\vec{i} - 6\vec{k}$

$\vec{AC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{AD} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$

$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmi 0 ise (yani $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = 0$) bu üç vektör bir uzay şekli meydana getirmez aynı düzlemdedir denir.

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -1 \\ x-1 & y-2 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$12(x-1) + 10(y-2) - 4(z-3) = 0$$

$12x + 10y - 4z = 20$ bulunur.

ÖR / $A(2,0,1)$ $B(3,-1,2)$ $C(0,1,-1)$ $D(m,1,1)$ noktalarının aynı düzlemde olması için m ne olmalıdır?

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,1) \qquad \overrightarrow{AC} = (-2,1,-2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (m-2,1,0)$$

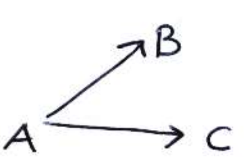
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektörleri aynı düzlemde olduklarından $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0$ olmalıdır.

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times AD) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ m-2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ m-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m-2 = 0$$

$m = 2$ bulunur.

ÖR / Köşeleri $A(1,0,-1)$, $B(2,-1,1)$ ve $C(3,1,0)$ olan $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanını bulunuz.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+3^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27} \text{ br}^2$$

VEKTÖR UZAYLARI

Tanım: Bir V kümesi üzerinde tanımlı $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa V'ye bir reel vektör uzayı denir.

1) Her $u, v \in V$ için $u \oplus v \in V$
2) Her $u, v \in V$ için $u \oplus v = v \oplus u$
3) Her $u, v, w \in V$ için $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
4) Her $u \in V$ için $u \oplus 0 = 0 \oplus u = u$ olacak şekilde V de bir 0 elemanı vardır.
5) Her $u \in V$ için $u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = 0$ olacak şekilde V de bir $-u$ elemanı vardır.
6) Her $u \in V$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot u \in V$ dir.
7) Her $u, v \in V$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot (u \oplus v) = (c \odot u) \oplus (c \odot v)$ dır.
8) Her $u \in V$ ve her $c, d \in \mathbb{R}$ için $(c \oplus d) \odot u = (c \odot u) \oplus (d \odot u)$ dur.
9) Her $u \in V$ ve her $c, d \in \mathbb{R}$ için $c \odot (d \odot u) = (c \cdot d) \odot u$ dur.
10) Her $u \in V$ için $1 \odot u = u$ dur.

Vektör uzayı V nin elemanlarına vektör, R nin (reel sayıların) elemanlarına skaler denir. $\oplus$ işlemine vektörel toplam, $\odot$ işlemine de skaler çarpım adı verilir.

ÖR/ $V = \mathbb{R}$ olsun. Toplama ve skalerle çarpma işlemi

$$x \oplus y = 3x + 3y \quad \text{ve} \quad k \odot x = kx \quad \text{ile tanımlansın.}$$

Vektör uzayı koşullarından değişme özelliğinin sağlandığını ama birleşme özelliğinin sağlanmadığını gösterelim.

1) $x \oplus y \stackrel{?}{=} y \oplus x$

$x \oplus y = 3x + 3y$

$y \oplus x = 3y + 3x$

$x \oplus y = y \oplus x$ Böylece $\oplus$ işlemine göre V değişmelidir.

2) $(x \oplus y) \oplus z \stackrel{?}{=} x \oplus (y \oplus z)$

$$(x \oplus y) \oplus z = (3x + 3y) \oplus z = 3(3x+3y) + 3z$$
$$= 9x + 9y + 3z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (3y + 3z)$$
$$= 3x + 3(3y+3z) = 3x + 9y + 9z$$

$\neq$

Birleşme özelliği yoktur. V nin vektör uzayı olmadığı görülür.

ÖR/ $V = \mathbb{R}$ olsun. Toplama ve skalerle çarpma işlemi

$x \oplus y = x^y$ ve $k \odot x = kx$ şeklinde

tanımlansın. V nin vektör uzayı olmadığını gösterelim.

$x \oplus y = x^y$

$y \oplus x = y^x$

olup $x^y \neq y^x$ olduğundan V vektör uzayı değildir.

ÖR/ $V = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$ $s=(s_1,s_2)$ ve $t=(t_1,t_2)$ olsun.

$$(s_1,s_2) \oplus (t_1,t_2) = (s_1+t_1+2\ ,\ s_2+t_2+2)$$

ve

$$c \odot (s_1,s_2) = (cs_1+c-1\ ,\ cs_2+c-2)$$

işlemleri ile tanımlansın. V nin bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

V, toplama ve skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. Toplama işlemine göre değişme ve birleşme özellikleride sağlanır.

Her $s=(s_1,s_2) \in V$ için $e=(t_1,t_2) \in V$ için toplamaya göre etkisiz eleman bulunmaktadır. Şöyle ki

$$s \oplus e = s \quad \text{veya} \quad (s_1+t_1+2,\ s_2+t_2+2) = (s_1,s_2) \text{ dir.}$$

$$s_1+t_1+2 = s_1 \quad \text{ve} \quad s_2+t_2+2 = s_2$$

$$t_1 = -2 \quad \text{ve} \quad t_2 = -2 \text{ olur.}$$

Bu da toplamsal etkisiz elemanın $e = 0 = (-2,-2)$ olduğunu gösterir.

V deki her bir (s_1,s_2) elemanının toplamsal tersinin olduğunu göstermek için

$s \oplus t = 0 = (-2,-2)$ olacak şekilde bir (t_1,t_2) vektörü olduğunu bulmalıyız.

$s \oplus t = (s_1 + t_1 + 2,\ s_2 + t_2 + 2)$ olduğundan

$s_1 + t_1 + 2 = -2$ ve $s_2 + t_2 + 2 = -2$ olur.

$t_1 = -4 - s_1$ ve $t_2 = -4 - s_2$ elde edilir.

V deki herhangi bir (s_1, s_2) elemanının inversi

$-s = (-s_1 - 4,\ -s_2 - 4)$ olacaktır.

ÖR/ $n \times 1$ mertebeli reel elemanlı $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ şeklindeki matrislerin kümesi R^n üzerinde $\oplus$ işlemini matris toplamı ve $\odot$ işlemini de bir matrisin bir reel sayı ile çarpımı olarak alırsak vektör uzayı aksiyomlarını sağladığını görürüz. R^2 de bir $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ vektörü şeklinde ifade edilebilir.

ÖR/ $\oplus$ işlemini matris toplamı ve $\odot$ işlemini de bir matrisin bir reel sayı ile çarpımı olarak alırsak $m \times n$ mertebesindeki tüm reel matrislerin kümesi bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı $M_{m \times n}$ ile gösterilir.

ÖR/ n bir pozitif sabit tamsayı olsun. Derecesi n yada daha küçük bütün polinomlar ve sıfır polinomunun oluşturduğu küme P_n ile gösterilsin.

P_n'nin bir vektör uzayı olduğunu gösterebiliriz.

$p(x) \oplus q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$ Toplama İşlemi

$c \odot p(x) = ca_0 + ca_1 x + \dots + ca_n x^n$ skalerle çarpma

Teorem; V bir reel vektör uzayı olsun.

1) Her $u \in V$ için $0 \odot u = 0$

2) Her $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot 0 = 0$

3) Eğer $c \odot u = 0$ ise $c = 0$ veya $u = 0$ dır.

4) Her $u \in V$ için $(-1) \odot u = -u$ dur.

Tanım; ALT UZAY

V bir reel vektör uzayı ve W, V nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer W, V deki işlemlere göre bir vektör uzayı ise W ye V nın bir alt vektör uzayı deşir.

Teorem; V bir reel vektor uzayı W, V nın boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda W nin V nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.

1) Her $u, v \in W$ için $u \oplus v \in W$ dir.

2) Her $u \in W$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot u \in W$ dir.

ÖR/ $\mathbb{R}^2$ nin, $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix} \; x \in \mathbb{R} \right\}$ şeklinde tanımlanan alt kümesinin bir alt uzay olup olmadığını gösteriniz.

W nın iki vektörü $w_1 = \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix}$ $w_2 = \begin{bmatrix} y \\ y+1 \end{bmatrix} \in W$ olsun.

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y+2 \end{bmatrix} \notin W$$ yani

$w_1 + w_2 \notin W$ olduğundan
W, $\mathbb{R}^2$ nın bir alt uzayı değildir.

ÖR/ 2×2 mertebesinden vektör uzayı $M_{2\times 2}$ olsun. İzi 0 olan tüm 2×2 mertebeli matrislerin kümesi W olsun. Yani

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad x+t=0 \right\} \text{ olsun.}$$

W nın $M_{2\times 2}$ nın alt uzayı olup olmadığını gösteriniz.

$$w_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix} \in W \qquad w_2 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{bmatrix} \in W$$

$$x_1 + t_1 = 0 \qquad\qquad x_2 + t_2 = 0$$

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{bmatrix}$$

$w_1 + w_2$ nın izi ;

$$x_1 + x_2 + t_1 + t_2 = \underbrace{(x_1 + t_1)}_{0} + \underbrace{(x_2 + t_2)}_{0} = 0 \text{ dır}$$

c herhangi bir skaler olmak üzere

$$c \cdot w_1 = c \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 & cy_1 \\ cz_1 & ct_1 \end{bmatrix}$$

$$cx_1 + ct_1 = c(x_1 + t_1) = 0$$

Sonuç olarak W, $M_{2\times 2}$ nın bir alt uzayıdır.

ÖR/ V, derecesi 3 olan bütün polinomların kümesi olsun. V, P_n bir alt kümesidir. Ancak

$$3x^3 + 4x^2 - 5x - 1 \quad \text{ve} \quad -3x^3 - 4x^2 + 3x - 3$$

polinomlarının toplamı $-2x-4$ dür ve birinci dereceden bir polinom olduğundan V de olmadığı için V, P_n nın bir alt uzayı değildir.

Tanım; V vektör uzayında $v_1, v_2, \dots v_m$ m tane vektör ve $c_1, c_2 \dots c_m$ m tane skaler olmak üzere bir v vektörü

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m$$ şeklinde ifade edilirse v vektörü $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılır denir.

ÖR/ R^3 de $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektörünün $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edildiğini gösterelim.

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = v$ olacak şekilde c_1, c_2, c_3 bulunabilirse v vektörü v_1, v_2, v_3 ün lineer kombinasyonu olarak ifade edilir.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 &= 6 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 9 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1$ $c_2 = 1$ $c_3 = 2$ bulunur.

$\underline{v = v_1 + v_2 + 2v_3}$ olur.

Denklem sistemini çözelim

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-1)$, $H_3\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad H_{23}(1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to c_1 \\ \to c_2 \\ \to c_3 \end{array}$$

$H_2\left(\frac{-1}{2}\right)$ $\qquad H_{13}(-1)$ $\qquad H_{12}(-2)$

$r_A = r_{A;B} = 3 = n$

Tek çözüm

Tanım: V vektör uzayında $S=\{v_1, v_2 \ldots v_m\}$ V deki vektörlerin kümesi olsun. Sdeki vektörlerin tüm lineer kombinasyonlarından oluşan

$$\langle S\rangle = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m \mid c_1, c_2 \ldots c_m \in \mathbb{R}\}$$

V nın bir vektör uzayıdır. $\langle S\rangle$ alt uzayına S kümesinin gerdiği veya ürettiği alt uzay denir.

ÖR/ $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ şeklinde verilen S kümesi gözönüne alınsın. Bu durumda $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\langle S\rangle$ ikinci mertebeden tüm simetrik matrislerin kümesidir.

$$c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1&c_2\\c_2&c_3\end{bmatrix}$$

Burada $V=M_{2\times2}$ matrisler $\underbrace{S=\{v_1, v_2, v_3\}}_{\text{simetrik matrisler}}$

Yani $\langle S\rangle$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{bmatrix}c_1&c_2\\c_2&c_3\end{bmatrix}$ formundaki tüm simetrik matrislerin oluşturduğu $M_{2\times2}$ kümesidir.

ÖR/ $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının alt kümesi

$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ olsun. $v=\begin{bmatrix}6\\8\\-2\end{bmatrix}$ vektörünün $\langle S\rangle$ ye ait olduğunu gösteriniz.

v, $\langle S\rangle$ de ise

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\8\\-2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1+c_2+c_3=6 \\ c_1+c_2-c_3=8 \\ c_1-c_2+c_3=-2 \end{array}\right\}$$

denk. çözülürse $c_1=3$ $c_2=4$ $c_3=-1$ bulunur.

v vektörü $\langle S\rangle$ dedir.

ÖR/ İkinci mertebeden tüm ters simetrik matrislerin kümesi W olsun. W nın tüm 2x2 matrislerin vektör uzayı olan M_{2x2} nin altuzayı olup olmadığını araştırınız.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix} \mid x \in R \right\} \text{ dir.}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$ W de iki matris

ve k da bir skaler olsun.

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(a+b) \\ a+b & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

$$cw_1 = \begin{bmatrix} 0 & -ca \\ ca & 0 \end{bmatrix} \in W$$

$w_1 + w_2 \in W$, $cw_1 \in W$ olduğundan W, M_{2x2} nin alt uzayıdır.

ÖR/ $\langle S \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = R^3$ old gösteriniz.

R^3 ün keyfi bir elemanı $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ olsun.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ oluyorsa

v vektörü $\langle S \rangle$ dedir.

$c_1 + 2c_3 = x$

$c_1 - c_2 + 5c_3 = y$

$2c_1 - c_2 + c_3 = z$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 1 & -1 & 5 & y \\ 2 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & 3 & y-x \\ 0 & -1 & -3 & z-2x \end{array}\right]$$

$H_{21}(-1)$, $H_{31}(-2)$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & x-y \\ 0 & -1 & -3 & z-2x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & x-y \\ 0 & 0 & -6 & -y+z-x \end{array}\right]$$

$H_2(-1)$ $\qquad$ $H_{32}(1)$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y+x-z}{6} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2x-y+z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-z-y+3x}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-z+y+x}{6} \end{array}\right]$$

$H_3\left(\frac{-1}{6}\right)$ $\qquad$ $H_{23}(3)$, $H_{13}(-2)$

$$c_1 = \frac{2x-y+z}{3} \qquad c_2 = \frac{-z-y+3x}{2} \qquad c_3 = \frac{-z+y+x}{6}$$

Bu sistemin çözümü vardır. R^3 deki her vektör verilen üç vektörün bir lineer kombinasyonu olarak yazılır o halde $\langle S\rangle = R^3$ olur.

ÖR/ R^3 vektör uzayının alt kümesi

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$$ olsun. $V = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörünün

$\langle S \rangle$ ye ait olup olmadığını araştırınız.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3$$
$$2c_1 + 5c_2 - 2c_3 = 2$$
$$c_1 + 7c_2 - 7c_3 = 4$$

denklem sisteminin çözümünün olmadığı görülür.

V, $\langle S \rangle$ altuzayı ait değildir.

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -7 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ $r_A = 2 \neq r_{A:B} = 3$ çözüm yok.

Tanım; V vektör uzayında $V_1, V_2 \ldots V_m$ m tane vektör ve $c_1, c_2 \ldots c_m$ m tane skaler için

$c_1V_1 + c_2V_2 + \ldots + c_mV_m = 0$ ifadesi sadece $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$ için sağlanıyorsa $V_1, V_2 \ldots V_m$ lineer bağımsız, c_i lerden en az biri sıfırdan farklı iken sağlanıyorsa $V_1, V_2 \ldots V_m$ vektörlerine lineer bağımlı denir.

ÖR/ $\mathbb{R}^3$ de $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,2,1)$, $v_3=(1,0,-2)$

vektörleri lineer bağımsızdır.

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$$

$$c_1(1,1,1)+c_2(1,2,1)+c_3(1,0,-2)=(0,0,0)$$

$$c_1+c_2+c_3=0$$

$$c_1+2c_2=0$$

$$c_1+c_2-2c_3=0$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&0&0\\1&1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Type your text

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$c_1=c_2=c_3=0$

v_1,v_2,v_3 lineer bağımsız.

Şöyle de bakabilirsiniz.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&1&-2\end{bmatrix}\qquad |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&1&-2\end{vmatrix}\neq 0$$

ise lineer homojen denk sisteminin sadece sıfır çözümü vardır. yani $r=n$ dir

ÖR/ P_2 uzayında $S=\{\underbrace{x^2+2x+2}_{v_1},\underbrace{-x^2+3x-1}_{v_2},\underbrace{x^2+2x-1}_{v_3}\}$

kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

$$c_1(x^2+2x+2)+c_2(-x^2+3x-1)+c_3(x^2+2x-1)=0$$

$$(c_1-c_2+c_3)x^2+(2c_1+3c_2+2c_3)x+(2c_1-c_2-c_3)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}c_1-c_2+c_3=0\\2c_1+3c_2+2c_3=0\\2c_1-c_2-c_3=0\end{array}\right\}$$

lineer denklem sistemi çözülürse $c_1=c_2=c_3=0$ elde edilir.

v_1,v_2,v_3 lineer bağımsızdır.

1

Teorem: n boyutlu V vektör uzayında m tane vektör

$V_1 = (a_{11}, a_{12} -- a_{1n})$

$V_2 = (a_{21}, a_{22}, -- a_{2n})$

$\vdots$

$V_m = (a_{m1}, a_{m2}, -- a_{mn})$ olsun. Eğer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & -- & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & -- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin rangı r ise

1) Verilen m vektörden r tanesi lineer bağımsızdır.

2) $r < m$ ise geriye kalan $m-r$ vektörün herbiri bu r vektörün lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. ve m vektör lineer bağımlı olur.

3) $n = m$ ise m vektörün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $|A| \neq 0$ dır.

ör/ R^3 vektör uzayında $V_1 = (1,0,-3)$, $V_2 = (1,0,0)$, $V_3 = (0,0,1)$, $V_4 = (1,-1,0)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

$r = 3$ olduğundan 3 vektör lineer bağımsız.

$m = 4$ $(r < m)$ 1 vektör lineer bağımlı

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + c_4 V_4 = 0$$

$$c_1 (1,0,-3) + c_2 (1,0,0) + c_3 (0,0,1) + c_4 (1,-1,0) = (0,0,0)$$

$$c_1 + c_2 + c_4 = 0 \qquad c_4 = 0$$
$$-c_4 = 0$$
$$-3c_1 + c_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} r_A = r_{A:B} = 3 \\ n = 4 \end{array}$$

$$c_1 - \frac{1}{3} c_3 = 0 \qquad c_3 = k = 3 \text{ olsun. (keyfi)}$$
$$c_4 = 0$$
$$c_2 + \frac{1}{3} c_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{3} k \\ c_2 = -\frac{1}{3} k \\ c_4 = 0 \\ c_3 = k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_4 = 0 \\ c_3 = 3 \end{array}$$

Type your text

$$V_1 - V_2 + 3V_3 = 0$$

$$V_3 = \frac{V_2 - V_1}{3} \text{ elde edilir.}$$

II yol: $v_1 = (1,0,-3)$ $v_2 = (1,0,0)$ $v_3 = (0,0,1)$ $v_4 (1,-1,0)$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0$$

$$c_1 (1,0,-3) + c_2 (1,0,0) + c_3 (0,0,1) + c_4 (1,-1,0)$$

$$c_1 + c_2 + c_4 = 0$$
$$-c_4 = 0$$
$$-3c_1 + c_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r_A = r_{A:B} = 3$ $\quad n = 4$ $\quad n - r = 4 - 3 = 1$ keyfi sbt seç.

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - \frac{1}{3} c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_2 + \frac{1}{3} c_3 = 0 \end{array}\right\} \quad c_3 = 3 \text{ aldik}$$

$c_1 = 1$
$c_2 = -1$
$c_4 = 0$
$c_3 = 3$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0$$

$v_1 - v_2 + 3v_3 = 0$ aralarındaki bağıntı.

ÖR/ R^4 vektör uzayında $v_1=(2,3,1,-1)$, $v_2=(2,3,1,-2)$, $v_3=(4,6,2,-3)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$$

$$c_1(2,3,1,-1)+c_2(2,3,1,-2)+c_3(4,6,2,-3)=(0,0,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned}2c_1+2c_2+4c_3&=0\\3c_1+3c_2+6c_3&=0\\c_1+c_2+2c_3&=0\\-c_1-2c_2-3c_3&=0\end{aligned}\right\}$$ lineer denk sistemi elde edilir.

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&4&0\\3&3&6&0\\1&1&2&0\\-1&-2&-3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\3&3&6&0\\2&2&4&0\\-1&-2&-3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&-1&0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$c_1+c_3=0$

$c_2+c_3=0$

$r_A=r_{A:B}=2$ $m-r=1$ keyfi sbt seç

$m=3$

$c_3=1$ alalım.

$c_1=-1$, $c_2=-1$ olur.

$c_1=-1$

$c_2=-1$

$c_3=1$

$$-v_1-v_2+v_3=0$$

$v_3=v_1+v_2$ elde edilir.

ÖR/ R^4 vektör uzayında $V_1=(2,1,3,0)$, $V_2=(0,1,2,4)$ $V_3=(-1,-2,0,3)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3=0$$

$$c_1(2,1,3,0)+c_2(0,1,2,4)+c_3(-1,-2,0,3)=0$$

$$\left.\begin{aligned} 2c_1-c_3&=0\\ c_1+c_2-2c_3&=0\\ 3c_1+2c_2&=0\\ 4c_2+3c_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 27 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -9 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 27 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left.\begin{aligned} m&=3\\ r_A=r_{A:B}&=3 \end{aligned}\right\}$$

$r=m$ tüm vektörler lineer bağımsız

Tanım; V bir vektör uzayı S de V nin bir alt kümesi olsun. Eğer

1) S, V nin bir lineer bağımsız alt kümesi

2) $\langle S \rangle = V$

şartları sağlanıyorsa S ye V nın bir tabanı veya bazı denir.

ÖR/ $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi R^n in bir tabanıdır. Bu tabana R^n nin standart tabanı (bazı) denir.

ÖR/ $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi R^3 ün bir tabanıdır.

Gösterelim.

1) T nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0$$

T lineer bağımsız.

2) T nin R^3 ü gerdiğini gösterelim.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= a \\ -c_2 + c_3 &= b \\ -c_1 &= c \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= -c \\ c_2 &= a + c \\ c_3 &= a + b + c \end{aligned}$$

Lineer denk. gözülürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \sim \cdots \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & a+c \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \end{array}\right]$$

ÖR/ $T=\{x^2+1,\ x+2,\ -x^2+x\}$ nin $V=P_2$ için bir taban olduğunu gösteriniz.

1) Lineer bağımsızlığı gösterelim.

$$c_1(x^2+1)+c_2(x+2)+c_3(-x^2+x)=0x^2+0x+0$$

$$(c_1-c_3)x^2+(c_2+c_3)x+(c_1+2c_2)=0x^2+0x+0$$

$$c_1-c_3=0 \qquad c_2+c_3=0 \qquad c_1+2c_2=0$$

$c_1=0=c_2=c_3=0$ T kümesi lineer bağımsızdır.

$$c_1(x^2+1)+c_2(x+2)+c_3(-x^2+x)=ax^2+bx+c$$

$$(c_1-c_3)x^2+(c_2+c_3)x+(c_1+2c_2)=ax^2+bx+c$$

$$c_1-c_3=a$$
$$c_2+c_3=b$$
$$c_1+2c_2=c$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & c-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-a-2b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a+2b-c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a+2b-c \\ 0 & 1 & 0 & -a-b+c \\ 0 & 0 & 1 & a+2b-c \end{bmatrix}$$

$c_1=2a+2b-c$, $c_2=c-a-b$, $c_3=a+2b-c$

Tek çözümü elde edilir. $\langle T\rangle=P_2$ dir.

T, P_2 için bir tabandır.

Tanım; V vektör uzayı olsun. V nin herhangi bir tabanındaki vektör sayısına V nin boyutu denir ve boy(V) ile gösterilir.

Teorem; V, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) Eğer $T=\{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ lineer bağımsız ise $\langle T\rangle = V$ dir. ve T, V nin bir tabanıdır.

2) $T=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ve $\langle T\rangle = V$ ise T lineer bağımsızdır ve V nin bir tabanıdır.

ÖR/ R^3 de $a=(-1,1,1)$ $b=(0,2,3)$ $c=(1,-1,0)$ olmak üzere $T=\{a,b,c\}$ kümesi veriliyor. T nin R^3 ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

boy$(R^3)=3$ ve T de üç vektör vardır. T nin taban olduğunu göstermek için lineer bağımsız olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$c_1 a + c_2 b + c_3 c = 0$$

$$c_1(-1,1,1) + c_2(0,2,3) + c_3(1,-1,0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -c_1 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

T lineer bağımsızdır.

T, R^3 ün bir tabanıdır.

ÖR/

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-2\\0&3\end{bmatrix}\right\}$$

kümesinin M_{22} için bir taban olup olmadığını araştırınız.

M_{22} uzayının boyutu 4 olduğundan S kümesi lineer bağımsız ise M_{22} için bir tabandır.

S kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştıralım.

$$c_1\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0&0\\-1&2\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}0&-2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}&c_1=0\\&c_1+2c_2-2c_4=0\\&c_2-c_3=0\\&c_1+3c_2+2c_3+3c_4=0\end{aligned}\right\}\text{ denklem sistemi elde edilir.}$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&-2\\0&1&-1&0\\1&3&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&-2\\1&-1&0\\3&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\3&2&6\end{vmatrix}=-16\neq 0$$

olduğundan S kümesi lineer bağımsızdır.

Bu durumda S, M_{22} uzayının bir tabanıdır.

ÖR/ R^3 ün $\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi ile verilen V alt uzayının bir tabanını bulup boyutunu belirleyiniz.

c_1, c_2, c_3, c_4 skalerler olmak üzere

$$c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ olsun.

Bu denkleme karşı gelen arttırılmış katsayılar matrisinin satırca indirgenmiş eşolan formu

$$7c_1 + 11c_2 + c_3 + 3c_4 = 0$$
$$6c_1 + 10c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 0$$
$$4c_1 + 7c_2 + 2c_3 + c_4 = 0$$

$$-1 \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 10 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisidir. İlk 1 ler 1-inci, 2-inci sütunda bulunduğundan V nin bir tabanı olarak

$\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi alınabilir. boy $V = 2$ bulunur.

ÖR/ P_3 uzayında

$$S = \{ t^2+1 , t^3-2t, 2t^3+3t^2-4t+3, t^3+t^2-2t+1 \}$$

kümesinin gerdiği alt uzayın bir tabanı bulup boyutunu belirleyiniz.

$$c_1(t^2+1)+c_2(t^3-2t)+c_3(2t^3+3t^2-4t+3)+c_4(t^3+t^2-2t+1)=0$$

Bu denkleme karşı gelen arttırılmış katsayılar matrisinin satırca indirgenmiş eşolan formu

$$c_1+c_1t^2+c_2t^3-2c_2t+2c_3t^3+3c_3t^2-4c_3t+3c_3+c_4t^3+$$
$$c_4t^2-2c_4t+c_4=0$$

$$t^3(c_2+2c_3+c_4)+t^2(c_1+3c_3+c_4)+t(-2c_2-4c_3-2c_4)$$
$$+(c_1+3c_3+c_4)=0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Burada ilk 1 ler 1-inci ve 2-nci sutunda bulunduğundan $\{t^2+1, t^3-2t\}$ kümesi S nin gerdiği alt uzayın bir tabanı olup boyutu 2 dir.

$v_1 = t^2+1$ $\quad v_2 = t^3-2t$, $v_3 = 2t^3+3t^2-4t+3$

$v_4 = t^3+t^2-2t+1$

$v_1+v_2=v_4$ $\quad 3v_1+2v_2=v_3$

ÖR/ W, tüm 3. mertebeden ters simetrik matrislerin kümesi olsun. W nin M_{33} uzayının bir alt uzayı olduğunu gösterip W nin bir tabanını bulunuz.

$W = \{ A \in M_{33} ; A^t = -A \}$ dir.

$A, B \in W$ ve α bir skaler olsun.

Bu durumda
$A^t = -A$ ve $B^t = -B$ dir.

Alt uzay olduğunu gösteriyoruz.
(W, nun M_{33} ın alt uzayı olduğunu gösterelim.)

a) $A + B \overset{?}{\in} W$

$A + B = -A^t - B^t = -(A^t + B^t) = -(A+B)^t$

olduğundan $A + B \in W$ olur

b) $\alpha A \overset{?}{\in} W$

$(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -(\alpha A)$

$(\alpha A)^t = -(\alpha A)$ olduğundan

$\alpha A \in W$ dir.

W, altı uzay olma koşulunu sağladığından M_{33} ün bir alt uzayıdır.

W de herhangi bir eleman

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$ şeklinde olduğundan

$$W, \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

kümesi ile gerilir. (üretilir) Bu küme lineer bağımsız olduğundan W nin bir tabanıdır.

ÖR/ $S = \left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$ kümesinin R^3 uzayını gerip - germediğini belirleyiniz.

Her $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in R^3$ için

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ olacak şekilde c_1, c_2, c_3 skalerleri bulunabilirse S, R^3 ü gerer.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = a$$

$$c_1 + 2c_2 = b$$

$$c_1 = c$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & -3 & b-a \\ 0 & -2 & -3 & c-a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-b}{3} \\ 0 & -2 & -3 & c-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a-c}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 3/2 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-b}{3} \end{array}\right]$$

$c_3 = \frac{a-b}{3}$ ✓

$c_2 + \frac{3}{2} c_3 = \frac{a-c}{2} \Rightarrow c_2 + \frac{\cancel{3}}{2}\left(\frac{a-b}{\cancel{3}}\right) = \frac{a-c}{2}$

$c_2 = \frac{a-c}{2} + \frac{b-a}{2}$

$c_2 = \frac{b-c}{2}$ ✓

$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = a$

$c_1 + 2 \cdot \left(\frac{b-c}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{a-b}{3}\right) = a$

$c_1 + (b-c) + (a-b) = a$

$c_1 = \cancel{a} - \cancel{a} + b - b + c$

$c_1 = c$ ✓

Bu durumda S, R^3 ü gerer.

Koordinatlar ve Geçiş Matrisi

V, n boyutlu bir vektör uzayının her tabanında n tane vektör olduğunu biliyoruz. Buraya kadar tabandaki vektörlerin sırasına çok önem vermedik. Bu kısımda V nin sıralı tabanından söz edeceğiz.

$T_1 = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ V nin sıralı bir tabanı ise
$T_2 = \{v_2, v_1 \dots v_n\}$ V nin farklı sıralı bir tabanıdır.

Teorem: V, n boyutlu bir vektör uzayı ve $T = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$, V nin sıralı bir tabanı olsun. V nin her v vektörü

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

biçiminde tek türlü yazılabilir.

Tanım: V, n boyutlu bir vektör uzayı ve $T = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$, V nin sıralı bir tabanı olsun. $c_1, c_2 \dots c_n$ skalerler olmak üzere V nin her v vektörü tek türlü olarak

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

şeklinde ifade edilebilir. v vektörünün T sıralı tabanına göre koordinat vektörü $[v]_T$ şeklinde gösterilir ve

$$[v]_T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

$c_1, c_2 \dots c_n$ ye yani $[v]_T$ nin bileşenlerine v vektörünün T tabanına göre koordinatları denir.

ÖR/ $R^3 = V$ vektör uzayının sıralı bir tabanı

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$T = \{u_1, u_2, u_3\}$ olsun. Eğer $u = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise $[v]_T$

koordinat vektörünü bulunuz.

V nin u vektörü

$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = u$ şeklinde ifade edilir.

T sıralı tabanına göre koordinat vektörü $[v]_T$ yi bulmak için c_1, c_2, c_3 sabitlerini bulmamız gerekir.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$ den

$$\left.\begin{aligned} c_1 - 5c_3 &= -4 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 &= 4 \\ 4c_1 + 2c_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$ lineer denk sistemi çözülürse

$c_1 = 1$ $c_2 = -1$ $c_3 = 1$ bulunur.

$[v]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Tanım; V, n boyutlu vektör uzayı $S = \{u_1, u_2 \dots u_n\}$ ve $T = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ V nın sıralı iki tabanı olsunlar

$\forall\ i = 1, 2 \dots n$ için

$[v_i]_S = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

matrisine T tabanından S tabanına geçiş matrisi denir. $[M]_T^S$ ile gösterilir.

ÖR/ R^3 vektör uzayında $T=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ sıralı tabanı ve $S=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ farklı sıralı tabanı verilsin.

a) T sıralı tabanından S farklı sıralı tabanına geçiş matrisini bulunuz. $[M]_T^S=?$

b) $v=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ vektörünün S sıralı tabanına göre koordinat vektörünü bulunuz. $[v]_S=?$

I yöntem/ $[M]_T^S$ geçiş matrisini bulmak için T deki vektörler t_1, t_2, t_3 ve S deki vektörler s_1, s_2, s_3 ve geçiş matrisinin sütun vektörleri $[t_1]_S$, $[t_2]_S$, $[t_3]_S$ ile gösterilsin.

$$\left.\begin{aligned} a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 &= t_1 \\ b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 &= t_2 \\ c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 &= t_3 \end{aligned}\right\}$$ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ katsayıları bulunacak

$$a_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad a_1=0 \quad a_2=1 \quad a_3=0$$

$$[t_1]_S=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$b_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad b_1=1 \quad b_2=0 \quad b_3=0$$

$$[t_2]_S=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad c_1=0 \quad c_2=0 \quad c_3=1$$

$$[t_3]_S=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \checkmark$$

$$[M]_T^S=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

II yöntem/

$$\left.\begin{aligned} a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3&=t_1\\ b_1s_1+b_2s_2+b_3s_3&=t_2\\ c_1s_1+c_2s_2+c_3s_3&=t_3\end{aligned}\right\}$$

üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan lineer denk sistemidir.

$[s_1\ s_2\ s_3 \,\vdots\, t_1\ t_2\ t_3]$ matrisine elemanter satır dönüşümleri uygulayarak satırca indirgenmiş eşolon formu elde edilir.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$[M]_T^S$ dir.

b) $[v]_S=?$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$c_2=1$

$c_1=2$

$c_3=3$

$$[v]_S=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Teorem: V, n boyutlu vektör uzayı S ve T de V nin sıralı iki tabanı olsunlar. Bir $v \in V$ vektörü için $[v]_S = [M]_T^S \cdot [v]_T$ dir.

Teorem: V, n boyutlu bir vektör uzayı S ve T de V nin sıralı iki tabanı olsunlar. T den S ye geçiş matrisi $[M]_T^S$ nın tersi mevcuttur.

$$\left([M]_T^S\right)^{-1} = [M]_S^T \text{ dir.}$$

ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖRLER

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$AX = \lambda X$ denklemini sağlayan λ ya A matrisinin özdeğeri denir.

$$AX = \lambda X$$

$$(AX - \lambda X) = 0 \qquad (A - \lambda I)X = 0$$ denklemi elde edilir. Bu denklem bize bir lineer homojen denklem sistemini verir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır.

Yani $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ olmalıdır.

$|A-\lambda I|$ ifadesi λ ya göre n. dereceden bir polinom olup bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir.

$|A-\lambda I|=0$ denklemine de A matrisinin karakteristik denklemi denir.

$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$ şeklinde bir polinomdur. n tane gerçel yada karmaşık kökü vardır. $P(x)$ polinomunda $a_1=-\text{iz}\,A$ ve $a_n=(-1)^n|A|$ dır.

ÖR/ $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ -2 & -4 & -3\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}$ matrisine karşılık gelen özdeğerleri bulunuz.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 5\\ -2 & -4-\lambda & -3\\ 3 & 6 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda\\ -2 & -4-\lambda & -3\\ 3 & 6 & -\lambda\end{vmatrix}$$

2, 3. sütun 1'e eklendi

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -4-\lambda & -3\\ 3 & 6 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2-\lambda & -1\\ 0 & 3 & -\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(-\lambda-3)+3\right]$$

$$P(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+9)=0$$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-5\mp i\sqrt{11}}{2}$, $\lambda_3=2$ bulunur. özdeğerler

$$P(\lambda)=-\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+18=0$$

karakteristik denklem

Tanım; A bir kare matris ve λ, A nın bir özdeğeri olmak üzere

$$AX = \lambda X$$

denklemini sağlayan X vektörüne λ özdeğerine karşılık gelen özvektör denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3-\lambda)(-2-\lambda) - 6 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 4$ özdeğerler

$\lambda_1 = -3$ için

$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ dir $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ için

$$(A - \lambda_1 I) X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left. \begin{aligned} r &= 1 \\ n &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$n - r = 1$ keyfi sbt

$$x_1 + \frac{1}{3} x_2 = 0$$

$x_2 = 3$ alırsak

$x_1 = -1$ olur.

$\lambda_1 = -3$'e karşılık gelen özvektör $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ öz vektör

$\lambda_2 = 4$ için

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ için}$$

$$(A - \lambda_2 I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad x_1 = 2x_2$$

$x_2 = 1$ seçersek $x_1 = 2$

$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 4$'e karşılık gelen özvektör

Teorem: (Cayley Hamilton Teoremi)

Her matris kendisinin karakteristik denklemini sağlar. Şu halde A bir kare matris ve A nın karakteristik denklemi

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \text{ ise}$$

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_n = 0 \text{ dır.}$$

Cayley Hamilton dan yararlanarak bir kare matrisin tersini ve kuvvetlerini hesaplayabiliriz.

Bir A kare matrisinin tersi varsa $|A| \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_n = 0$$

denkleminden

$$a_n I_n = -A(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I_n)$$

Buradan iki taraf $\frac{1}{a_n} A^{-1}$ ile çarpılırsa

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}\left(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I_n\right)$$

elde edilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik denklemi $-x^3 - 3x^2 + x + 18 = 0$ idi

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 18 = 0$$

Cayley Hamilton Teo göre A matrisi bu denklemi sağlayacağından

$-A^3 - 3A^2 + A + 18I = 0$ yazılır. Her iki taraf

$$A^{-1}\left(-A^3 - 3A^2 + A + 18I\right) = 0$$

$$-A^2 - 3A + I + 18A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\left(A^2 + 3A - I\right)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 30 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \\ -9 & -24 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\left(\begin{bmatrix} 16 & 30 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \\ -9 & -24 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ -6 & -12 & -9 \\ 9 & 18 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 10/9 \\ -1/2 & -5/6 & -7/18 \\ 0 & -1/3 & -2/9 \end{bmatrix}$$

A^5'i hesaplayalım.

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 18 = 0$$

$$-A^3 - 3A^2 + A + 18I = 0$$

$$A \quad \left(A^3 = -3A^2 + A + 18I \right) \quad \text{ile çarp}$$

$$A^4 = -3A^3 + A^2 + 18A$$

$$= -3(-3A^2 + A + 18I) + A^2 + 18A$$

$$= 9A^2 - 3A - 54I + A^2 + 18A$$

$$A^4 = 10A^2 + 15A - 54I$$

$$A^5 = 10A^3 + 15A^2 - 54A$$

$$A^5 = 10(-3A^2 + A + 18I) + 15A^2 - 54A$$

$$A^5 = -30A^2 + 10A + 180I + 15A^2 - 54A$$

$$A^5 = -15A^2 - 44A + 180I$$

$$A^5 = -15\begin{bmatrix} 16 & 30 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \\ -9 & -24 & -3 \end{bmatrix} - 44\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} + 180\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} -104 & -450 & -295 \\ 133 & 386 & 102 \\ 3 & 96 & 225 \end{bmatrix}$$

ÖR/ A, 2×2 mertebeden bir matris olsun.

Eğer $iz(A) = 8$ ve $|A| = 12$ ise A matrisinin

öz değerlerini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$iz A = a_{11} + a_{22} = 8 \qquad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 12$$

$|A - \lambda I| = 0$ dan özdeğerleri bulalım.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0$$

$$= \underbrace{a_{11}a_{22}} - \lambda\underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{8} + \lambda^2 - \underbrace{a_{21}a_{12}} = 0$$

12

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 6$ özdeğerleri bulunur.

ÖR/

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. Cayley Hamilton teo ile A^{-1} ve A^5 i hesaplayınız.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -(\lambda-1)^2+1 \\ 2 & 1-\lambda & 2(\lambda-1) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda+4=0 \text{ dan}$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda+4=0$$

$$-A^3+3A^2-6A+4I=0$$

$$-A^2+3A-6I+4A^{-1}=0$$

$$4A^{-1} = A^2-3A+6I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2-3A+6I)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 5/4 \end{bmatrix}$$

$$-A^3+3A^2-6A+4I=0$$

$$A^3 = 3A^2-6A+4I \Rightarrow A^4 = 3A^3-6A^2+4A$$

$$A^4 = 3[3A^2-6A+4I]-6A^2+4A = 3A^2-14A+12I$$

$$A^5 = 3A^3-14A^2+12A = 3(3A^2-6A+4I)-14A^2+12A$$

$$A^5 = -5A^2-6A+12I$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 16 & 32 & -16 \\ -32 & 21 & -10 \\ -16 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

ÖR/

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$$ matrisinin öz değerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda & \lambda-4 & 0\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ 1 & \lambda+1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ 1 & \lambda+1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -7 & -2-\lambda & -1\\ 1 & 2+\lambda & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)(2+\lambda)\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda+1)$$

$$=(4-\lambda)(2+\lambda)(2+\lambda)=0$$

$\lambda_1=4 \quad \lambda_2=-2 \quad \lambda_3=-2$ öz değerler

$\lambda_1=4$ için

$$(A-4I)=\begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ -7 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$(A-4I)X=0$ dan

$$\begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ -7 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$-7x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$-7x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$-6x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} r=2 \\ n=3 \end{matrix}\right\} \text{1 keyfi sbt}$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 - x_3 = 0$

$x_2 = 1$ için $x_3 = 1$

$\lambda_1 = 4$ 'e karşılık gelen özvektör $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ✓

$\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ için

$$(A + 2I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (A+2I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$-7x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

$-6x_1 + 6x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2 \qquad n = 3 \qquad n - r = 1$ keyfi sbt

$x_1 - x_2 = 0 \qquad x_1 = x_2 \qquad x_2 = 1$ için $x_1 = 1 \qquad x_3 = 0$

$x_3 = 0$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ÖR/ $\lambda=0$ sayısının A nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul A nın tersinin bulunmamasıdır. İspatlayınız.

$\Rightarrow$ $\lambda=0$ değeri A matrisinin bir özdeğeri olsun.

$|\lambda I_n - A| = |-A| = (-1)^n . |A| = 0$ eşitliğinden

$|A|=0$ bulunur. Bu ise A nın tersinin mevcut olmamasıdır.

$\Leftarrow$ A matrisinin tersi mevcut olmasın.

Bu durumda $|A|=0$ dır.

$$0 = (-1)^n . |A| = |-A| = |0 . I_n - A|$$

eşitliğinden $\lambda=0$ değeri A matrisinin bir özdeğeridir.

ÖR/ A, n. mertebeden bir matris ve λ, A nın bir özdeğeri olsun a) Bu durumda A nın tersi mevcut ise $\frac{1}{\lambda}$, A^{-1} in bir özdeğeridir.

A matrisinin tersi mevcut olduğundan $\lambda \neq 0$ dır.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \frac{1}{\lambda} AX = X \Rightarrow A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} AX\right) = A^{-1} X$$

$$A^{-1} X = \frac{1}{\lambda} X \Rightarrow \frac{1}{\lambda}, A^{-1} \text{ matrisinin bir özdeğeridir.}$$

b) λ^k , A^k nın bir özdeğeridir. $k=1,2,3...$

$k=2$ için gösterelim.

λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör

X olsun.

$$AX = \lambda X \Rightarrow A(AX) = A(\lambda X)$$

$$A^2 X = \lambda \underbrace{(AX)}_{\lambda X}$$

$$A^2 X = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

$$A^2 X = \lambda^2 X$$

λ^2 , A^2 matrisinin bir özdeğeridir.

$k=n$ için λ^n , A^n matrisinin bir özdeğeri

yani $A^n X = \lambda^n X$ olsun.

$k=n+1$ için λ^{n+1} in A^{n+1} matrisinin bir özdeğeri olduğunu gösterelim.

$$A(A^n X) = \lambda(\lambda^n X) \Rightarrow A^{n+1} X = \lambda^{n+1} X$$

eşitliğinden istenen elde edilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini Cayley Hamiltonu kullanarak bulunuz.

A matrisinin karakteristik polinomunu bulalım.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & \lambda-1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda-6)-8\right] - 1\left[8\right]$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2 - 6\lambda - \lambda + 6 - 8\right] - 8$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2 - 7\lambda - 2\right] - 8$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^2 + 7\lambda + 2 - 8$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

$$A^3 - 8A^2 + 5A - 6I = 0$$

$$A^{-1}\left[A^3 - 8A^2 + 5A - 6I\right] = 0$$

$$A^2 - 8A + 5I_3 - 6A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[A^2 - 8A + 5I_3\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 28 & 44 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

ÖR/ 2. mertebeden A matrisinin karakteristik denkleminin (polinomunun)

$$\lambda^2 - \text{iz}\, A\, \lambda + |A| = 0$$ olduğunu

gösteriniz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ olsun. $\text{iz}\, A = a_{11} + a_{22}$ dir

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0$$ eşitliğinden

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{|A|} = 0$$ elde edilir.

Bu ise $\lambda^2 - \lambda . \text{iz}\, A + |A| = 0$ dır.