ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

İki yada daha fazla bağımsız değişkene sahip fonksiyonlara çok değişkenli fonksiyon denir. Çoğu fonksiyon birden fazla bağımsız değişkene bağlıdır. $V = \pi r^2 h$ fonksiyonu, yarıçapı ve yüksekliğinden dik bir silindirin hacmini hesaplar. $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$ fonksiyonu $z = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$ paraboloidinin P(x,y) noktasının üzerindeki yüksekliğini P'nin iki koordinatından hesaplar. Dünya yüzeyindeki bir noktanın sıcaklığı T, enlemi x ve boylamı y'ye bağlıdır ve T(x , y) yazarak ifade edilir. Çok değişkenli reel değerli fonksiyonlar tek değişkenli durumdakine benzer şekilde tanımlanırlar. Tanım kümeleri reel sayı ikililerinden (üçlülerinden, dörtlülerinden, n-lilerinden) oluşan kümelerdir , değer kümeleri ise reel sayı kümeleridir.

TANIM

n Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar : D'nin reel sayılardan oluşan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n–lilerinin bir kümesi olsun. D üzerinde reel değerli bir f fonksiyon, D'deki her elemana bir $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ reel sayısı atayan bir kuraldır. D kümesine fonksiyonun tanım kümesi,. f'nin aldığı w değerlerinin kümesine fonksiyonun değer kümesi denir. w sembolü f'nin bağımlı değişkenidir ve f' e x_1'den x_n'e kadar olan n bağımsız değişkenin bir fonksiyonu denir. x'lere fonksiyonun girdi değişkenleri, w'ye de fonksiyonun çıktı değişkeni denir.

f iki bağımsız değişkenli bir fonksiyon ise, genellikle bağımsız değişkenleri x ve y olarak adlandırır ve f'nin tanım kümesini xy-düzleminde bir bölge oluşturur. Üç bağımsız değişkenli bir fonksiyon için de değişkenlere x, y ve z dersek ve tanım kümesi uzayda bir bölge oluşturur.

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer Kümesi
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	Tüm düzlem	$[-1, 1]$

(b) Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer Kümesi
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Tüm düzlem	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	$z > 0$ yarım uzayı	$(-\infty, \infty)$

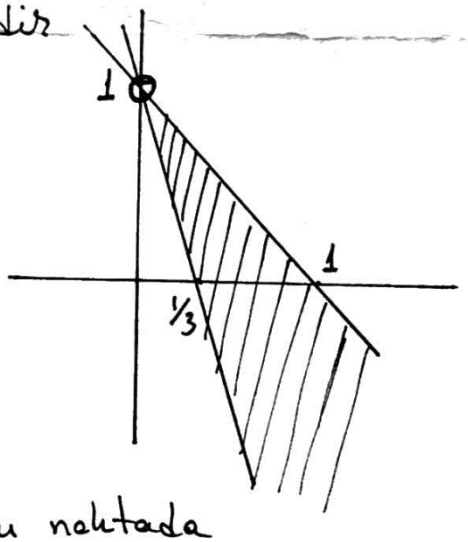
Ö-4 b) $Z = \text{Arc Cos}\left[2 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right]$ $x > 0$ için tanım bölgesi?

C-4b) $-1 \leq \frac{2x+y-1}{x} \leq 1$ dir

$$-x \leq 2x + y - 1 \leq x$$

$$-3x \leq y - 1 \leq -x$$

$$1 - 3x \leq y \leq 1 - x$$



Not: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{2x+y-1}{x} = \infty$

$\lim\limits_{\substack{y \to 1 \\ x \to 0}} \frac{2x+y-1}{x} = 2$ olup bu noktada limit yoktur.

ÖRNEK

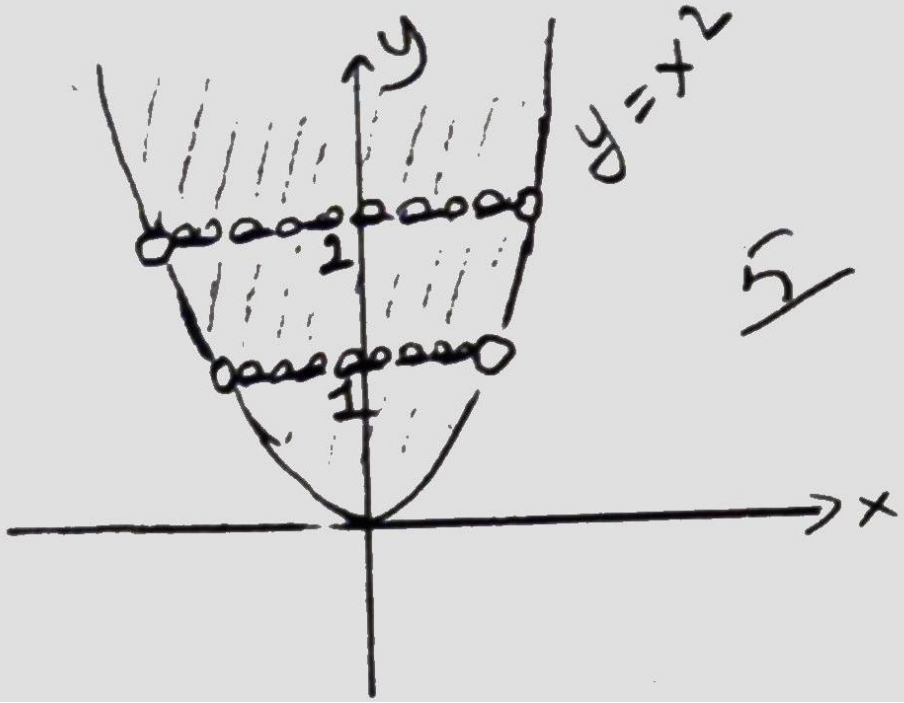
$f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{\ln(y-1)}$ fonksiyonun tanım bölgesini belirleyiniz ve şeklini çiziniz.

$\sqrt{y-x^2}$: $y-x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2$ 2

$\ln(y-1)$: $y-1>0 \Rightarrow y>1$ 2

$\dfrac{1}{\ln(y-1)}$: $\ln(y-1) \neq 0$ 2

$\Rightarrow y-1 \neq 1 \Rightarrow y \neq 2$ 2



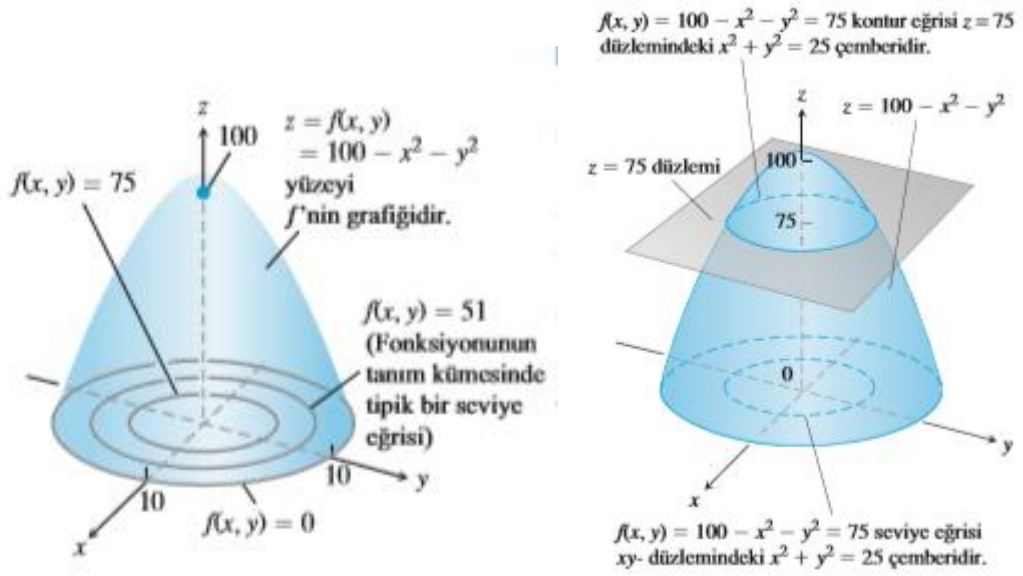
5

TANIMLAR **Seviye Eğrisi, Grafik, Yüzey**: Düzlemde, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $f(x, y) = c$ gibi sabit bir değer aldığı noktalar kümesine f'nin bir seviye eğrisi denir. (x, y) noktası f'nin tanım aralığında olmak üzere, bütün $(x, y, f(x, y))$ noktalarının kümesine f'nin grafiği denir. f'nin grafiğine $z = f(x, y)$ yüzeyi denir.

ÖRNEK İki Değişkenli Bir Fonksiyonu Çizmek

$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$'nin grafiğini çizin ve f'nin düzlemdeki tanım kümesinde $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 50$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrilerini işaretleyin.

f'nin tanım kümesi bütün xy-düzlemidir ve f'nin değer kümesi 100'e eşit veya 100'den küçük reel sayıların kümesidir. Grafiği, Şekil 1 bir kısmı gösterilen z = 100 – x2 – y2 paraboloidi dir. $f(x, y) = 0$ seviye eğrisi, xy-düzleminde $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0$ veya $x^2 + y^2 = 100$ koşulunu sağlayan noktalar kümesidir ki, o da merkezi orijinde olan 10 yarıçaplı çemberdir. Benzer şekilde, $f(x, y) = 50$ ve $f(x, y) = 75$ seviye eğrileri (Şekil 1) $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 50$ veya $100 - x^2 - y^2 = 50$, $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$ veya $x^2 + y^2 = 25$ çemberleridir. $f(x, y) = 100$ seviye eğrisi ise sadece orijinden oluşan bir seviye eğrisidir.



Şekil1: $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$'nin grafiğinin grafiği, istenen seviye eğrileri

Üç Değişkenli Fonksiyonlar

Düzlemde, iki bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir eğri oluşturur. Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu noktalar fonksiyonun tanım kümesinde bir yüzey oluşturur.

TANIM Seviye Yüzeyi

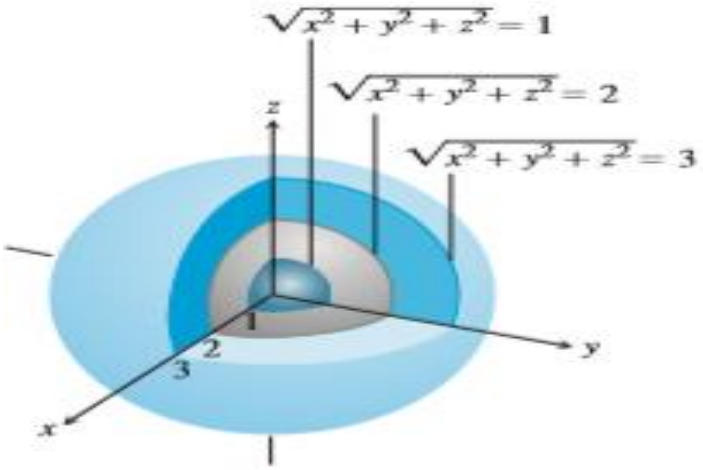
Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x, y, z) = c$ değerine sahip olduğu (x, y, z) noktaları f'nin bir seviye yüzeyini oluştururlar.

Üç değişkenli bir fonksiyonların grafikleri, dört boyutlu bir uzayda bulunan $(x, y, z, f(x, y, z))$ noktalarından oluştuğu için, bunları üç-boyutlu referans çerçevemizde etkili olarak çizemeyiz. Ancak, üç-boyutlu seviye yüzeylerine bakarak, fonksiyonun nasıl davrandığını görebiliriz.

ÖRNEK :Üç Değiskenli Bir Fonksiyonun Seviye Yüzeylerini Belirlemek

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ fonksiyonun seviye yüzeylerini tanımlayın.

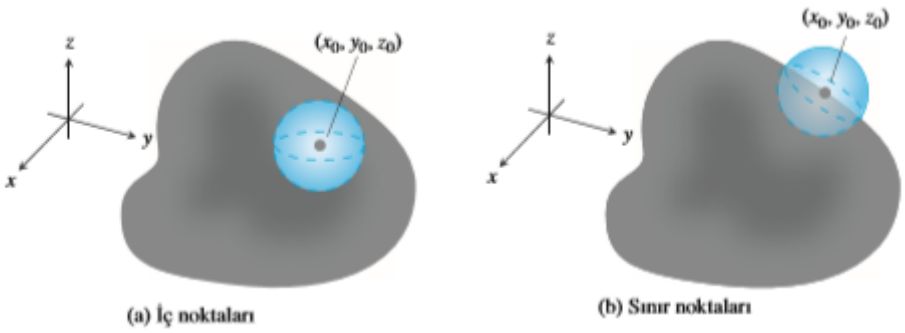
Çözüm f'nin değeri, orijinden (x, y, z) noktasına olan uzaklığı verir. Buna göre; her seviye yüzeyi, merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir küredir. Şekil 2 bu kürelerden üçünün görünüşünü verilmiştir.. Seviye yüzeyi sadece orijinden oluşmaktadır. Burada fonksiyonun grafiğini çizmiyoruz; fonksiyonun tanım kümesindeki seviye yüzeylerine bakıyoruz. Fonksiyonun seviye yüzeyleri tanım kümesinde ilerlerken, fonksiyonun değerlerinin nasıl değiştiğini gösterir. Merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir kürenin üzerinde kalırsak, fonksiyon sabit bir değer, yani c değerini alır. Bir küreden diğerine geçersek fonksiyonun değeri değişir. Orijinden uzaklaşırsak bu değer artar, orijine yaklaşırsak bu değer azalır. Fonksiyonun değerlerinin değişimi izlediğimiz yöne göre değişir. Değişikliğin yöne bağımlılığı önemlidir. Uzaydaki bölgeler için iç, sınır, açık, kapalı, sınırlı ve sınırlı olmama tanımları düzlemdeki tanımların benzeridir..



Şekil 2: Seviye Yüzeyleri eş merkezli kürelerdir.

TANIMLAR Uzay Bölgeleri için iç ve Sınır Noktaları

Uzaydaki bir R bölgesinde bir (x_0, y_0, z_0) noktası, bütünüyle R'nin içinde bulunan bir katı topun merkeziyse R'nin bir iç noktasıdır (Şekil 3). Merkezi (x_0, y_0, z_0)'da olan her küre R 'nin içinden noktaların yanı sıra R'nin dışından da noktalar içeriyorsa (x_0, y_0, z_0) noktası R'nin bir sınır noktasıdır. R'nin iç noktaları, bir küme olarak, R'nin içini oluştururlar. R'nin sınır noktalarının kümesi R'nin sınırıdır. Bir R bölgesi sadece iç noktalardan oluşuyorsa açıktır. Bir bölge bütün sınır noktalarını içeriyorsa kapalıdır.



Şekil 3:Bir Yüzeyin İc ve Sınır noktası

2. Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Limitleri ve Süreklilik

İki veya üç değişkenli bir fonksiyonun limitinin tanımı tek değişkenli bir fonksiyonun limitinin tanımına benzerdir.

Limit

Bir (x_0, y_0) noktasına yeterince yakın bütün (x, y) noktaları için f(x, y)'nin değerleri belirli bir L reel sayısına keyfi derecede yakın ise, (x, y) noktası (x_0, y_0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşır deriz. Bu, tek değişkenli bir fonksiyonun formel olmayan tanımına benzerdir. Ancak, (x_0, y_0) noktası f'nin tanım kümesinin içinde bulunuyorsa, (x, y)'nin (x_0, y_0)'a herhangi bir yönden yaklaşabilecektir.

TANIMLAR İki Değiskenli Bir Fonksiyonun Limiti

Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, f'nin tanım kümesine ait (x, y) noktaları için, $0 \le \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \le \delta$ iken $|f(x,y) - L| \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı karşılık getirilebiliyorsa, (x, y) noktası (x0, y0)'a yaklaşırken f fonksiyonu L limitine yaklaşır deriz.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Şeklinde gösterilir.

TEOREM 1 İki Değişkenli Fonksiyonların Limitlerinin Özellikleri

L, M ve k reel sayılar ve

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

1. *Toplam Kuralı:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$
2. *Fark Kuralı:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = L - M$
3. *Çarpım Kuralı:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M$
4. *Sabitle Çarpı Kuralı:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (kf(x,y)) = kL$ (Herhangi bir k)
5. *Bölüm Kuralı:* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M} \quad M \neq 0$
6. *Kuvvet Kuralı:* r ve s tamsayılar ve $s \neq 0$, $L^{r/s}$ bir reel sayı ise,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y))^{r/s} = L^{r/s}$$

(s çift ise $L > 0$'ın pozitif olduğunu varsayıyoruz)

Limitleri hesaplamak

Limiti hesaplarken belirsiz durum yoksa sıkıntı yoktur. Değerler yerine konur ve hesaplanır.

örnekler

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Eğer belirsizlik varsa ve bu belirsizlik çarpanlara ayrılarak sadeleştirme işleminden sonra giderilebiliyorsa bu durumda çarpanlara ayrılır sadeleştirme sonucunda değerler yerine yazılır ve hesaplanır .

ÖRNEK

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Limitini hesaplayınız.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$= 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0$$

Şeklinde sadeleştirme yapılarak hesaplanır.

2-b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \dfrac{x+y-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-y}}$ limitini hesaplayınız. (13 puan)

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \frac{\cancel{(x+y-2)}(\sqrt{x}-\sqrt{2-y})}{\cancel{(x+y-2)}} = 0$$

b) $f(x,y)=\dfrac{x\cos\frac{\pi}{2}y}{x+y-2}$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasındaki limitinin varlığını inceleyiniz.

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\cos\frac{\pi}{2}y}{x+y-2} = \lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 1}\frac{x\cos\frac{\pi}{2}y}{x+y-2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x\cos\frac{\pi}{2}}{x-1}\right] = 0$$

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 1}\frac{x\cos\frac{\pi}{2}y}{x+y-2}\right] = \lim_{y\to 1}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{y-1}\right] \to \frac{0}{0} \neq$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y}{1} = -\frac{\pi}{2}$$

Ardışık Limitler farklı olduğundan fonksiyonun (1,1)'de limiti yoktur.

S-4 a) $$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left[\frac{\sin(x+3y-1)}{x+y-1}\right]$$ limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

C-4 a) $$\lim_{x\to 1}\left[\lim_{y\to 0}\frac{\sin(x+3y-1)}{x+y-1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x+3y-1)}{x+y-1}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{y} = 3$$

farklı olduklarından limit mevcut değildir.

S-4 a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \left[\dfrac{\sin(x+3y-1)}{x+y-1}\right]$ limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız.

C-4 a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(x+3y-1)}{x+y-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)} = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x+3y-1)}{x+y-1}\right] = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin 3y}{y} = 3$

farklı olduklarından limit mevcut değildir.

Süreklilik

TANIM İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar

Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bir $f(x, y)$ fonksiyonu (x_0, y_0) **noktasında sürekli**dir:

1. $f(x_0, y_0)$'da tanımlıdır,
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ vardır,
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.

ÖRNEK 4 Tek Süreksizlik Noktası Olan Bir Fonksiyon

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fonksiyonunun orijin hariç her yerde sürekli olduğunu gösterin (Şekil 14.11).

$(0, 0)$'da f'nin değeri tanımlıdır, ama $(x, y) \to (0, 0)$ iken f'nin limitinin olmadığını iddia ediyoruz. Bunun nedeni orijine farklı yollardan yaklaşmanın, şimdi göreceğimiz gibi farklı sonuçlar vermesidir.

Her m değeri için, f fonksiyonunun "delinmiş" $y = mx$, $x \neq 0$, doğrusu üzerinde sabit bir değeri vardır, çünkü

$$f(x, y)\Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

bulunur. Dolayısıyla, (x, y) doğru boyunca $(0, 0)$'a yaklaşırken f'nin değeri bu sayıdır:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx \text{ boyunca}}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Bu limit m ile değişir. Dolayısıyla, (x, y) orijine yaklaşırken f'nin limiti diyebileceğimiz tek bir sayı yoktur. Limit bulunmaz ve fonksiyon sürekli değildir. ■

u 3) Bir $f : R^2 \to R$ fonksiyonu, parçalı olarak

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ile veriliyor. f nin R^2 üzerinde **sürekli** olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Eğer $(x,y) \neq (0,0)$ ise $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

olup f, süreklidir. 0.5 $(x,y) = (0,0)$ da; eğer

$u^2 = x^2+y^2$ denirse $(x,y) \to (0,0)$ iken $u \to 0$

[ve $u \to 0$ iken $x^2+y^2 \to 0$ dan $(x,y) \to (0,0)$] olup 0.5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} \overset{L}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}.$$

$$= f(0,0)$$

olup f, $(0,0)$ da da süreklidir. Neticede f, R^2 de süreklidir

12 + 0.3

1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x+1}\sin(x^2+5y^2)}{x^2+5y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ e & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun $N(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını belirleyiniz.

Fonksiyon her yerde tanımlıdır.

1) $f(0,0)=e$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{3x+1}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+5y^2)}{x^2+5y^2}$

$=e\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=e\cdot 1=e$

$u=x^2+5y^2$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=e=f(0,0)$

O halde fonksiyon $N(0,0)$ da süreklidir