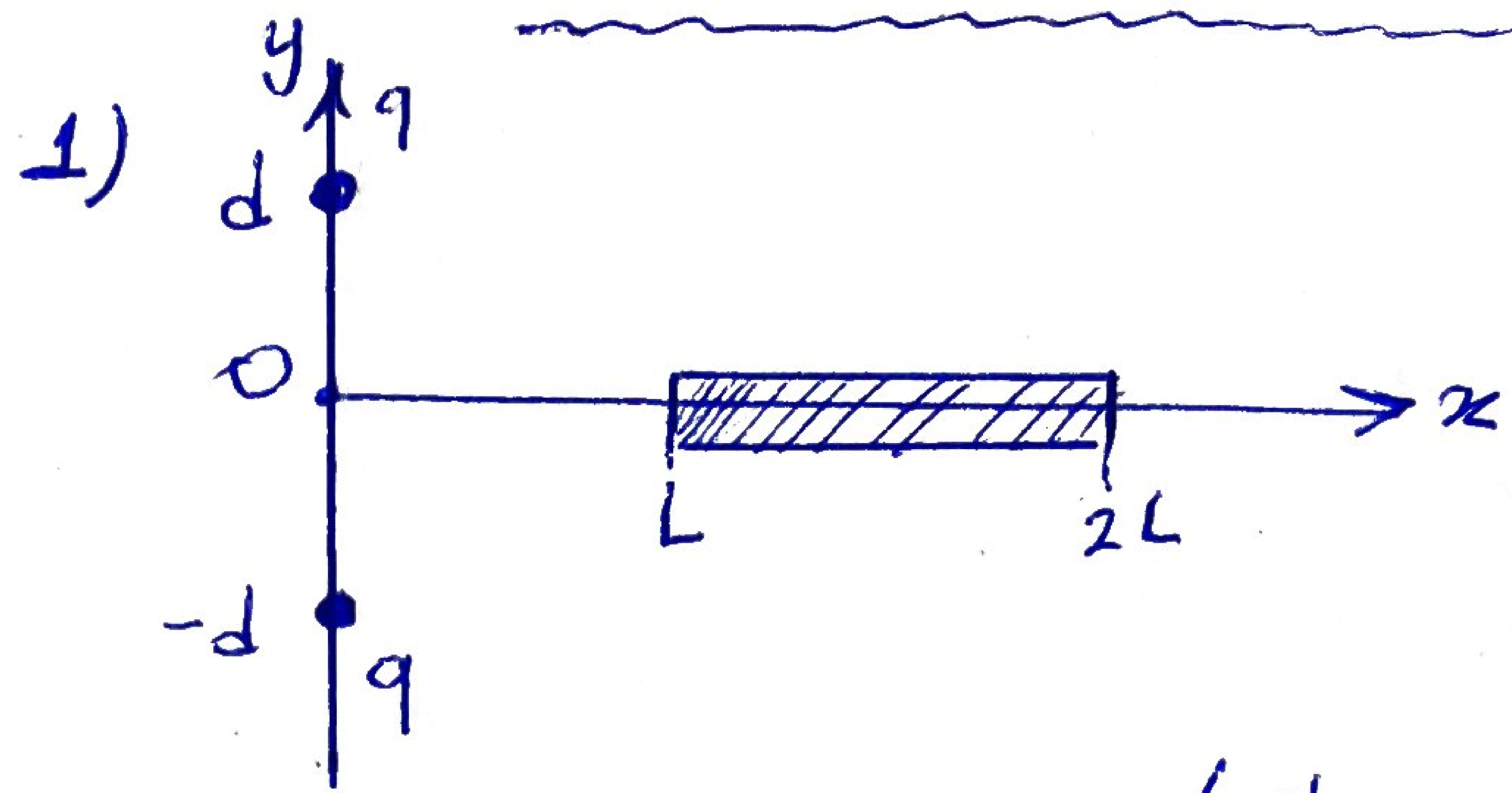
Elektrik Alan – Potansiyel problem takımı

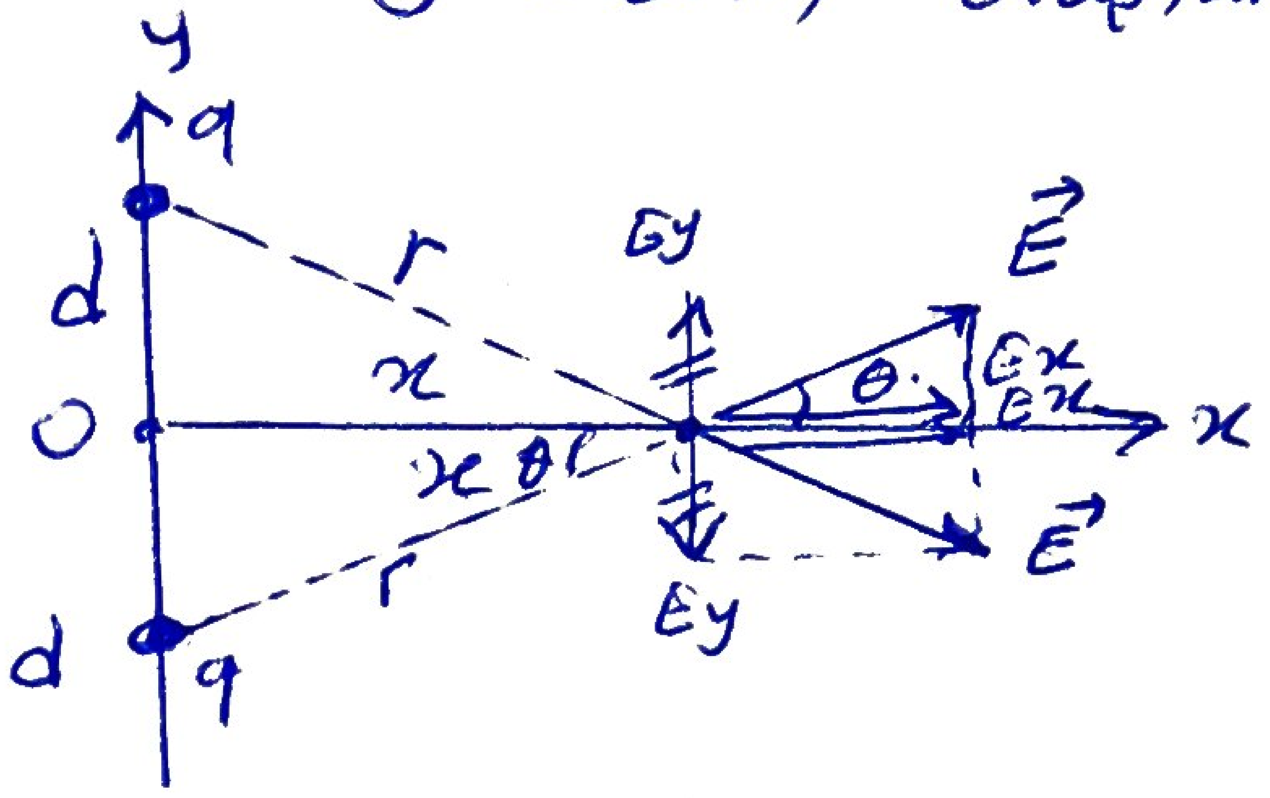
Örnek Problem: 1

1)



Özdeş iki q yükü y ekseni üzerinde +d ve −d noktalarına yerleştirilmiştir. +λ çizgisel yük yoğunluğuna sahip bir çubuk x ekseni üzerinde x=L ile x=2L noktaları arasına şekildeki gibi konulmuştur.

a) x ekseni üzerinde (x>0) bir noktada noktasal yüklerin oluşturduğu elektrik alanı bulunuz.



E_y bileşenleri sadeleşir.

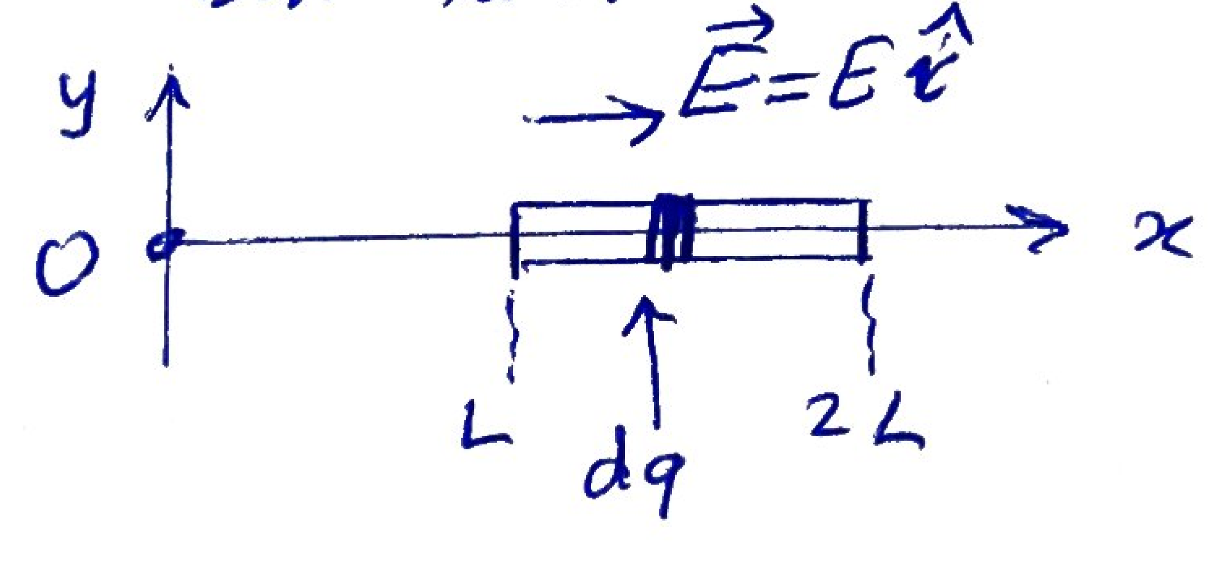
$$E(x) = 2\frac{kq}{r^2}\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \; r = \sqrt{x^2+d^2}$$

$$= \frac{2kq}{(x^2+d^2)} \cdot \frac{x}{(x^2+d^2)^{1/2}} = \frac{2kqx}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$ ✓

yönü +x yönündedir.

—o—

b) Noktasal yüklerden dolayı çubuğa etkiyen kuvveti bulunuz.



$$dq = \lambda\, dx.$$

$$\vec{F} = \int E\, dq \;\; \hat{i}$$

$$F = \int \frac{2kqx}{(x^2+d^2)^{3/2}} \lambda\, dx = 2kq\lambda \int \frac{x\,dx}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

$u = x^2 + a^2$

$du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\vec{F} = \cancel{2}kq\lambda \int \frac{du}{\cancel{2}u^{3/2}} = kq\lambda \int u^{-3/2} du$$

$$= kq\lambda \frac{u^{-1/2}}{-1/2} = \frac{kq\lambda}{\sqrt{x^2+a^2}}\Bigg|_L^{2L}$$

$$F = 2kq\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{4L^2+d^2}}\right)$$ ✓

c) O noktasındaki potansiyeli bulunuz.

$$V_0 = V_{yükler} + V_{çubuk} = \frac{2kq}{d} + \int \frac{k\,dq}{r}$$

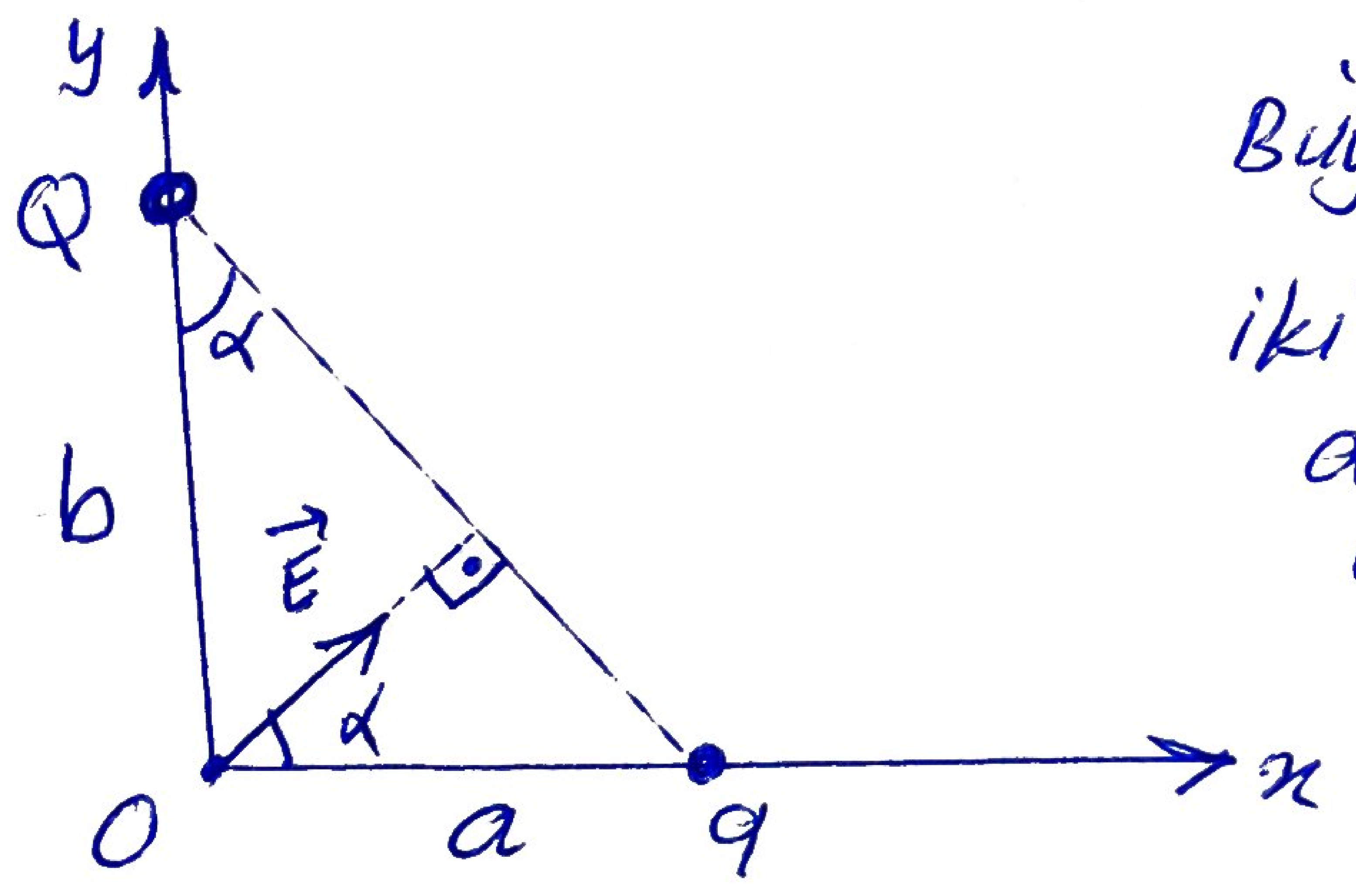
$$= \frac{2kq}{d} + k\lambda \ln(2)$$ ✓

$$\int \frac{k\,dq}{r} = \int \frac{k\lambda\,dx}{x}$$

$$= k\lambda \ln x \Big|_L^{2L}$$

$$= k\lambda \ln\left(\frac{2\cancel{L}}{\cancel{L}}\right)$$

Örnek problem 2



Büyüklükleri Q ve q olan iki noktasal yük, dik kenarları a ve b olan şekildeki dik üçgenin köşelerine konulmuştur. Yüklerin O noktasındaki elektrik alanı, şekildeki gibidir.

Q yükünü, q, a ve b cinsinden bulunuz.

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$, $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$, $E_x = \frac{kq}{a^2}$

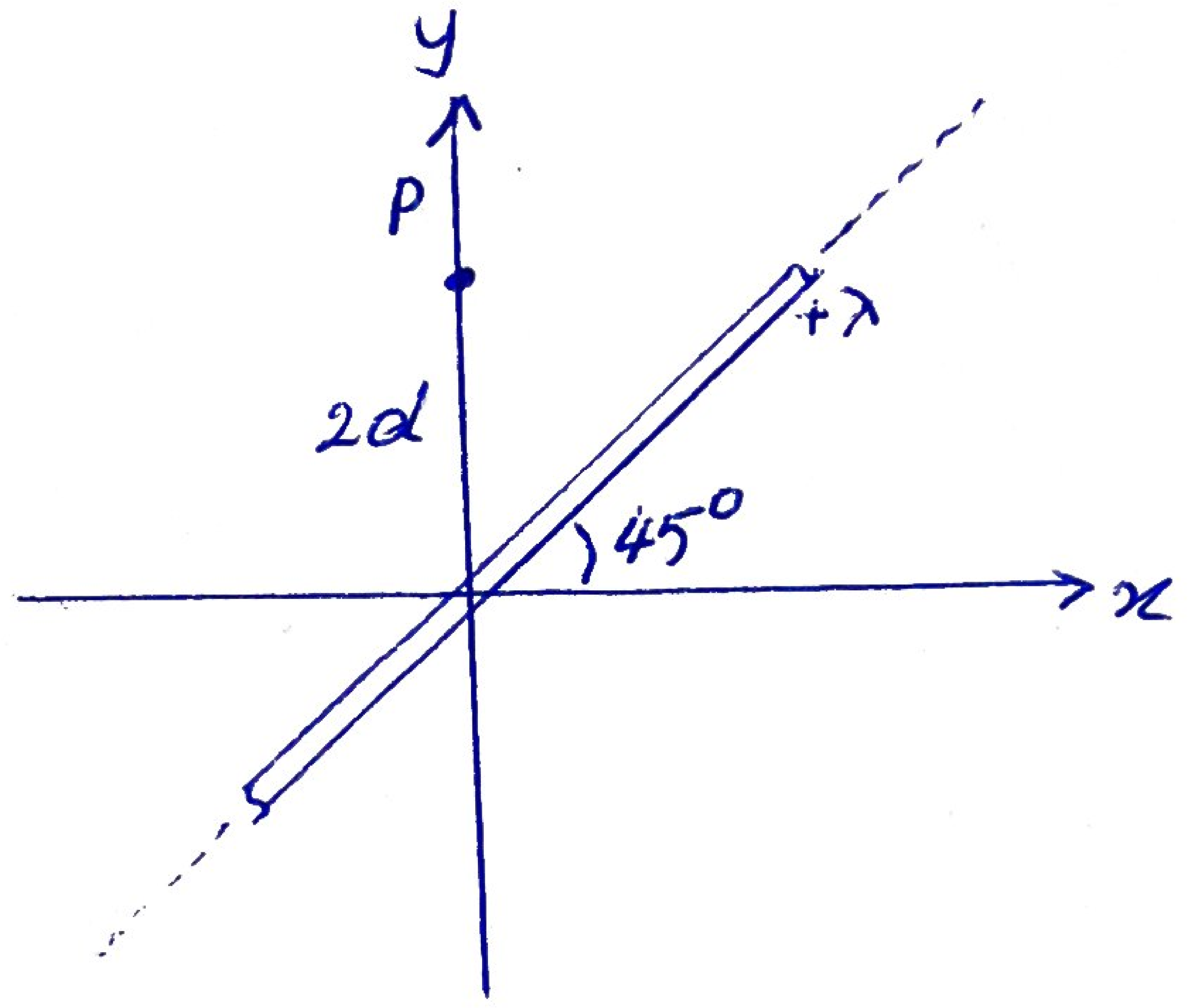
$E_y = \frac{kQ}{b^2}$

$\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x}$

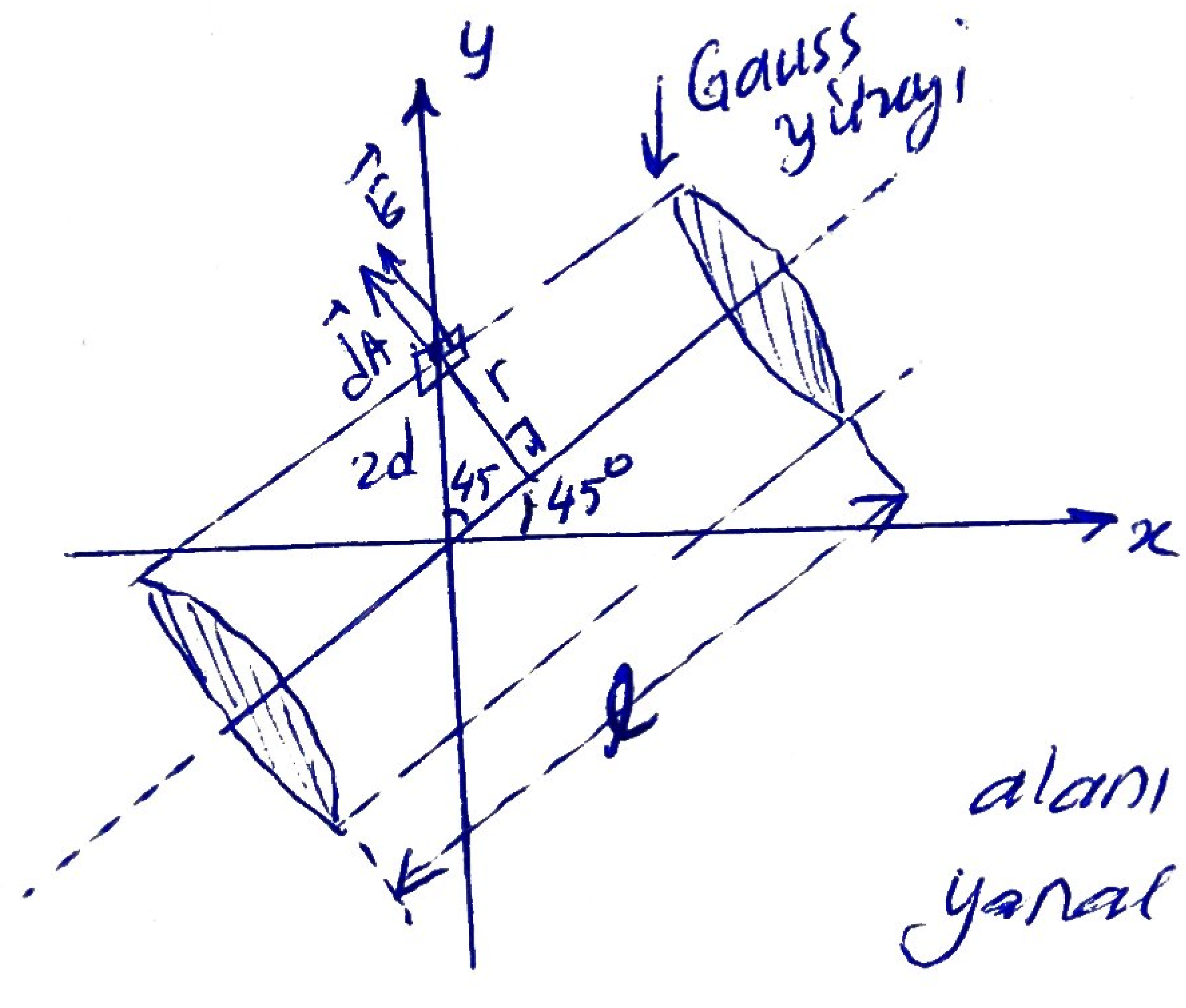
$$\frac{a}{\cancel{b}} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\cancel{k}Q/a^2}{\cancel{k}q/b^2} = \frac{Q}{q}\frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{Q}{q}\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{Q = \left(\frac{b}{a}\right)q}$$

Örnek Problem 3



Çizgisel yük yoğunluğu $+\lambda$ olan yeterince uzun türdeş bir çubuğun y ekseni üzerinde orijinden 2d kadar uzaktaki P noktasındaki elektrik alanı Gauss yasası yardımıyla bulunuz.
Çubuk xy düzlemindedir ve yatayla 45^0 lik açı yapmaktadır.



r yarıçaplı ℓ uzunluklu silindir biçimli bir Gauss yüzeyinden geçen akı,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

ile verilir. Elektrik alanı tele dik olacağından sadece yanal yüzeyden elektrik akısı geçer.

Yanal yüzeyde $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ olur

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\substack{yanal \\ yüzey}} E\, dA = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \qquad q_{iç} = \lambda \ell$$

$$E \int_{\substack{yanal \\ yüzey}} dA = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} \quad , \quad \int_{\substack{yanal \\ yüzey}} dA = 2\pi r \ell .$$

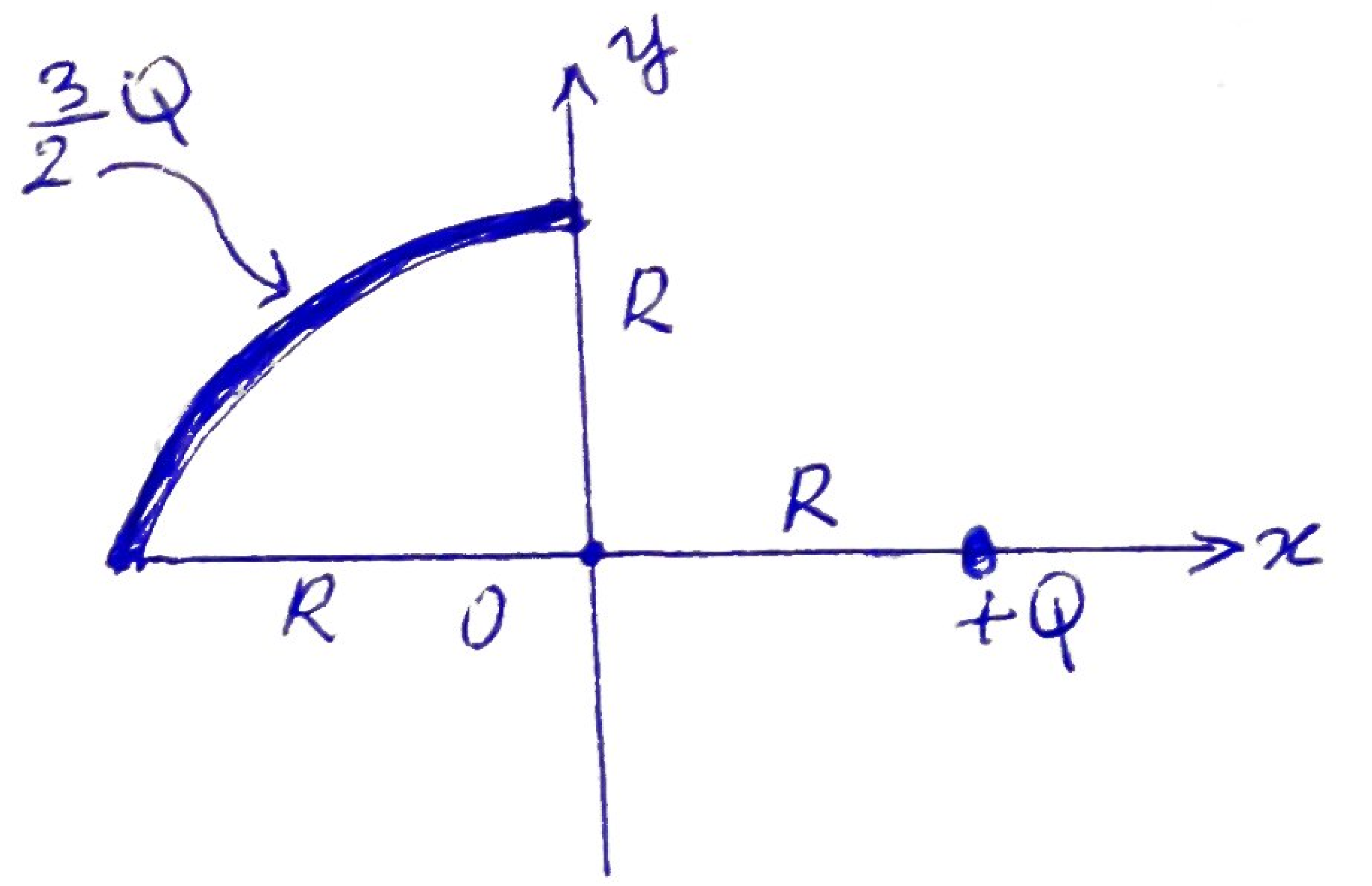
$$r = d \cos 45 = d\sqrt{2}$$

$$E\, 2\pi r \cancel{\ell} = \frac{\lambda \cancel{\ell}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} \, , \quad \hat{r} = \cos 45 \hat{i} + \sin 45 \hat{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

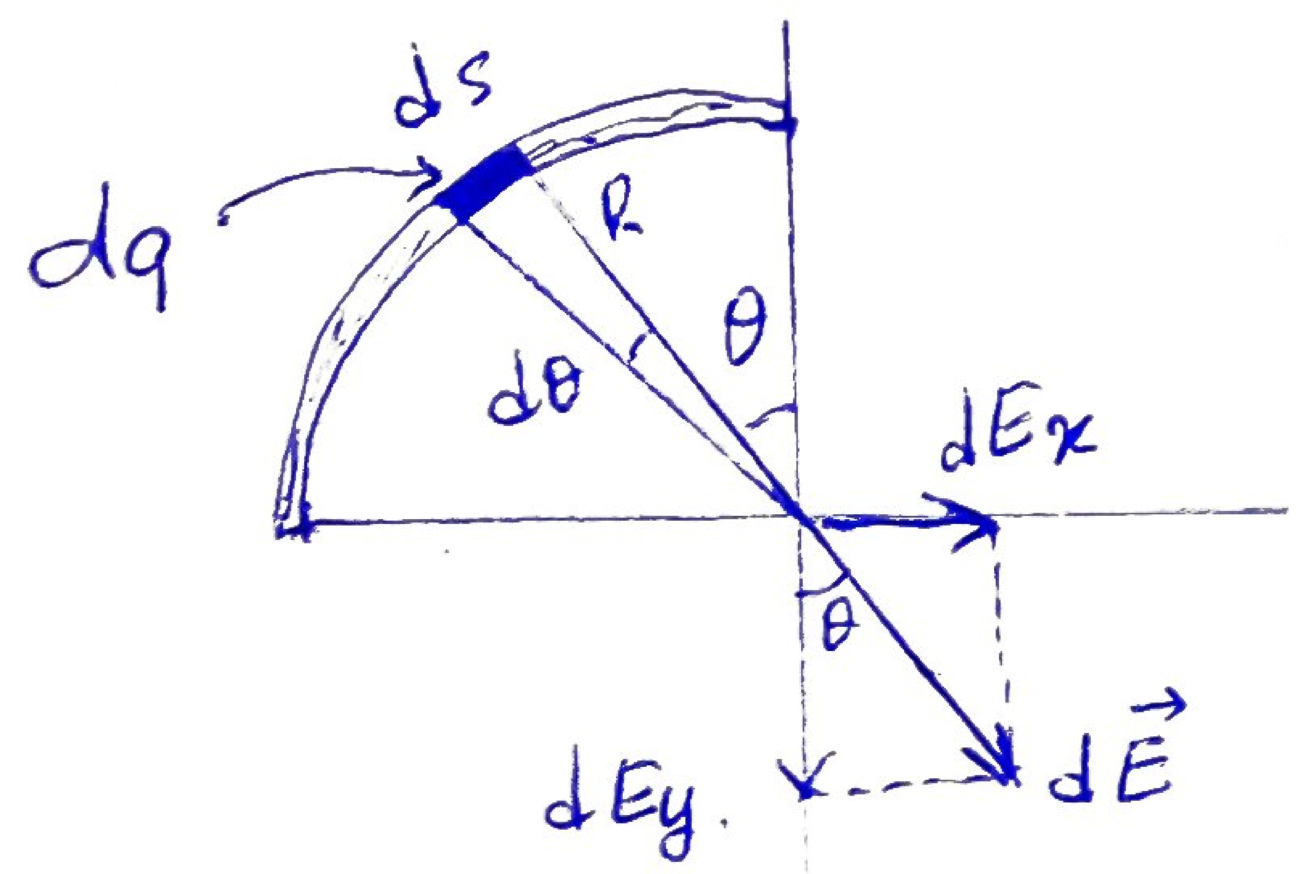
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{d\cancel{\sqrt{2}}} (\hat{i} - \hat{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} (\hat{i} - \hat{j})}$$

Örnek Problem 4



Düzgün yüklü R yarıçaplı toplam yükü $+\frac{3}{2}Q$ olan dairesel yay parçası şekildeki gibi konulmuştur. Diğer bir $+Q$ yükü ise x ekseni üzerinde ve orijinden R kadar uzağa konulmuştur. ($\pi \simeq 3$ alınız)

a) Telin O noktasındaki elektrik alanını bulunuz.



dq yükünü O noktasındaki elektrik alanı

$$d\vec{E} = dE(\sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$$

$$dE = \frac{k\,dq}{R^2}, \quad dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$$

$$= \frac{k\lambda \cancel{R} d\theta}{R^{\cancel{2}}} = \frac{k\lambda\, d\theta}{R}$$

$$\int d\vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})d\theta$$

$$= \frac{k\lambda}{R}(-\cos\theta\, i - \sin\theta\, j)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{k\lambda}{R}\Big[\cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}\, i - \underbrace{\cos 0}_{1}\,\hat{i} + \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}\, j - \cancel{\sin 0}\, j\Big]$$

$$= -\frac{k\lambda}{R}[-\hat{i} + \hat{j}] \Rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda}{R}(i - j),$$

$$\lambda = \frac{\text{Yük}}{\text{Uzunluk}} = \frac{\frac{3}{2}Q}{\frac{2\pi R}{4}} = \frac{3Q}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\pi R} = \frac{3}{\pi}\frac{Q}{R} = Q/R \quad (\pi \approx 3)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{R^2}(\hat{i} - \hat{j})}$$

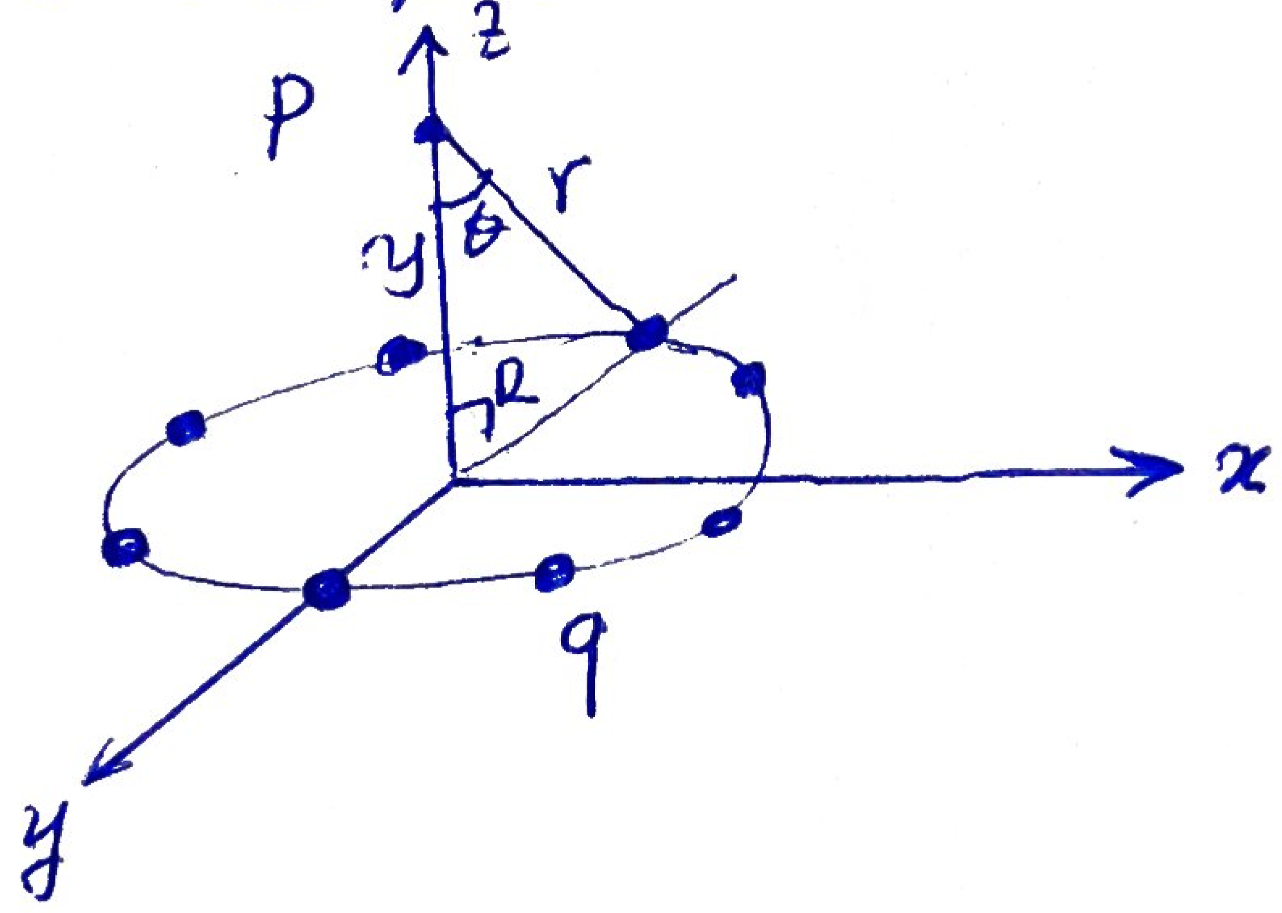
b) Telin ve Q yükünün O noktasındaki potansiyelini bulunuz.

$$V_Q = \frac{kQ}{R}, \quad V_{tel} = \int \frac{k\,dq}{r} = \int \frac{k\,dq}{R} = \frac{k}{R}\int dq = \frac{k}{R}\left(\frac{3Q}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\frac{kQ}{R}$$

$$V_0 = V_{tel} + V_Q = \frac{3}{2}\frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{R} = \boxed{\frac{5}{2}\frac{kQ}{R}}$$

Örnek problem 5 a) 8 tane q yükü xy düzlemindeki bir çemberin üzerine eşit aralıkla yerleştirilmiş. P noktasındaki potansiyeli bulunuz.



$$V = \frac{8kq}{r}, \quad r = \sqrt{R^2+y^2}$$

$$V = \frac{8kq}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

b) P noktasındaki elektrik alanı bulunuz.

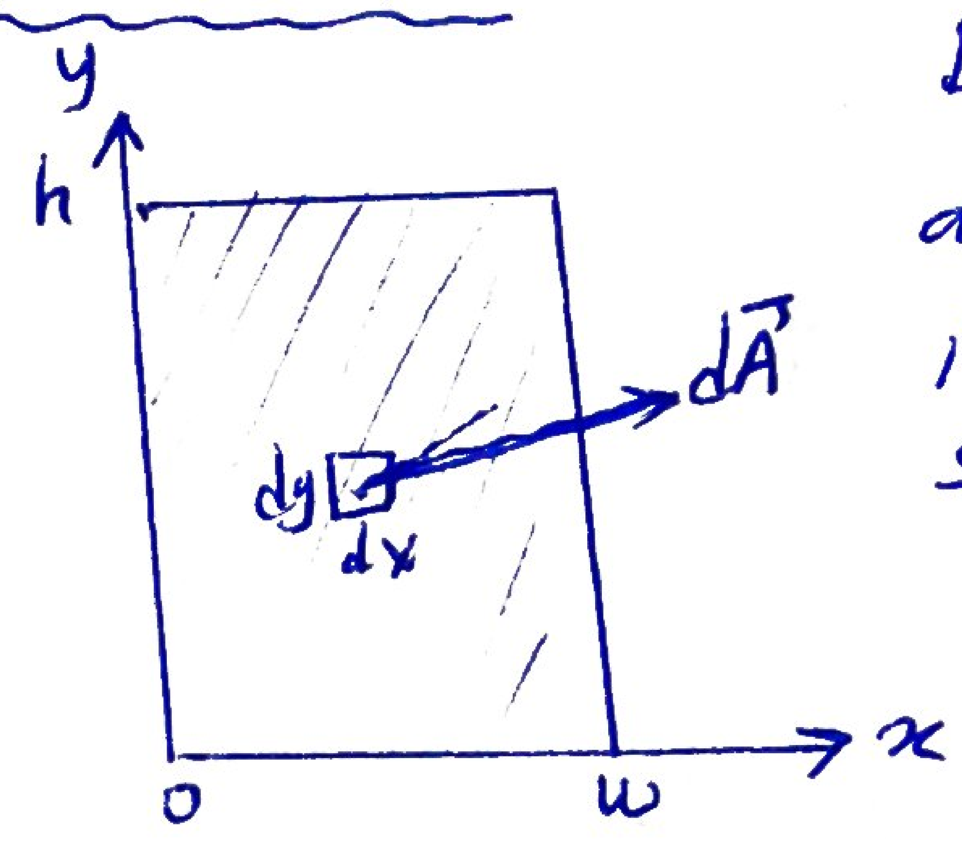
$$E_y = -\frac{dV}{dy}, \quad E_y = -8kq \frac{d}{dy}(R^2+y^2)^{-1/2}$$

$$= -8kq\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(R^2+y^2)^{-3/2} \cdot \cancel{2}y$$

$$E_y = \frac{+8kq}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = E_y \hat{j} \Rightarrow \vec{E} = \frac{8kq}{(R^2+y^2)^{3/2}} \hat{j}$$

Örnek problem 6



Düzgün olmayan bir elektrik alanı $\vec{E} = ay\hat{i} + bz\hat{j} + cx\hat{k}$ ile verilmektedir. Burada a, b, c sabitlerdir. xy düzleminde x=0 dan x=w'ya, y=0'dan y=h'ya kadar uzanan dikdörgen bir bölgede geçen elektrik akısını bulunuz.

Çözüm

$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$. Geçen akı için $d\vec{A} = dxdy(-\hat{k})$

$$\Phi_E = \int (ay\hat{i} + bz\hat{j} + cx\hat{k}) \cdot (-dxdy\hat{k})$$

$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$
$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$
$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$.

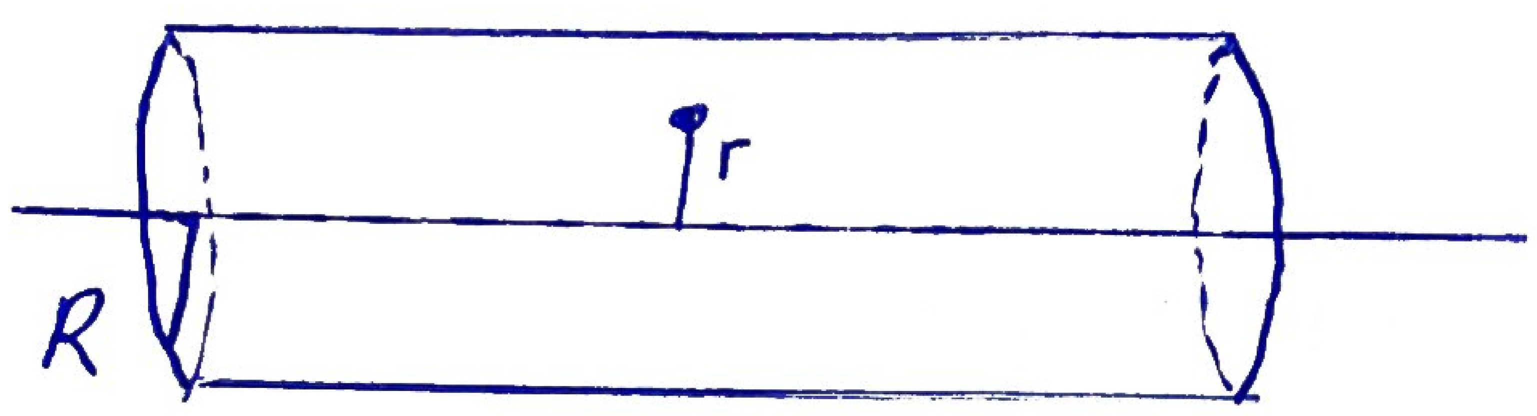
$$= -\iint cx\,dxdy$$

$$= -c \int_0^w x\,dx \int_0^h dy$$

$$= -c \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^w\right)\left(y\Big|_0^h\right)$$

$$= -\frac{1}{2} c w^2 h$$ (− işareti geçen akıyı temsil ediyor).

Örnek problem 7



sonsuz uzunlukta yalıtkan R yarıçaplı bir silindirin hacimsel yük yoğunluğu

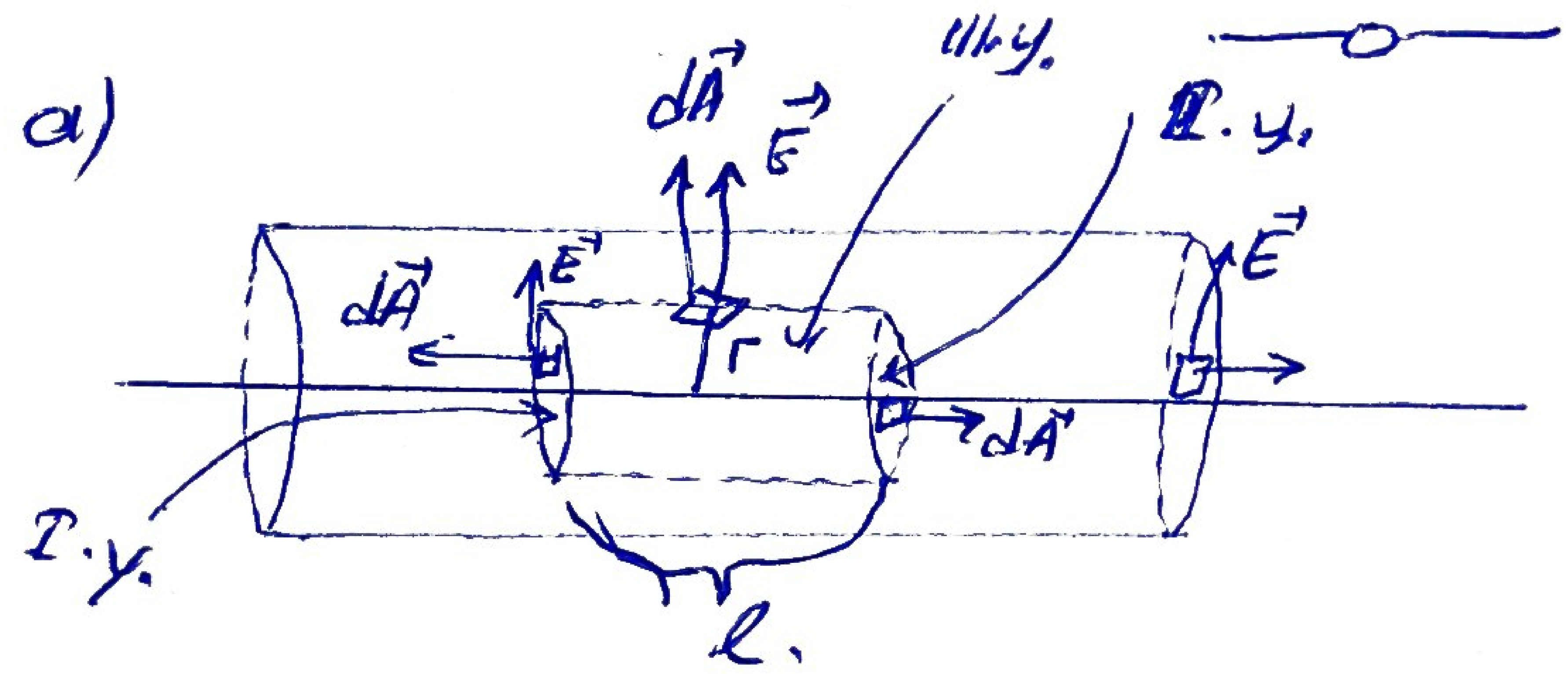
$$\rho = \rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right)$$

şeklindedir. Burada ρ_0, a, b pozitif sabitlerdir. r silindir eksenine olan dik uzaklıktır.

a) $r < R$ için $E = ?$

b) $r > R$ için $E = ?$

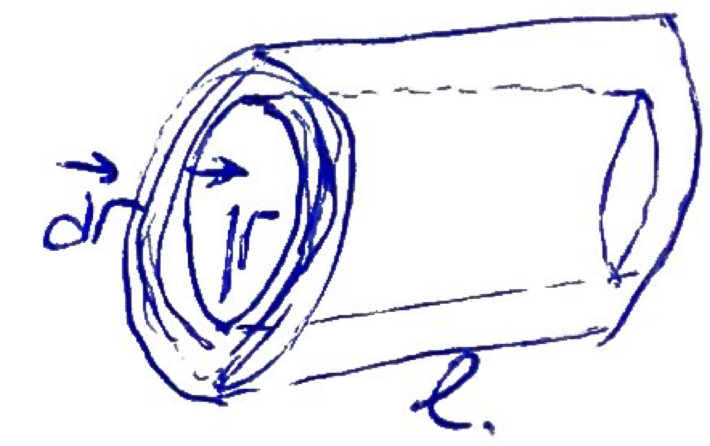
a)



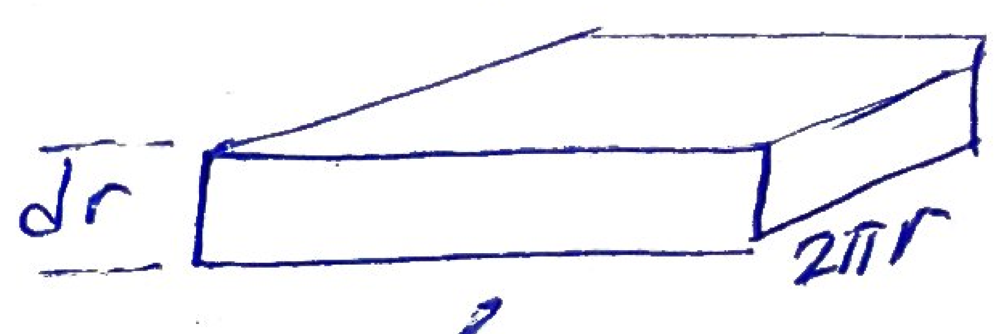
Telin elektrik alanı telden dışarı doğrudur.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underbrace{\cancel{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}}_{\mathrm{I}\ \vec{E}\perp d\vec{A}} + \underbrace{\cancel{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}}_{\mathrm{II}\ \vec{E}\perp d\vec{A}} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\mathrm{III}}$$

$$= \int E\,dA = E\int dA = E\,2\pi r \ell$$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}\ , \quad q_{iç} = \int \rho\, dV =$$



$$q_{iç} = \int \rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right) 2\pi r \ell\, dr \qquad dV = 2\pi r \ell\, dr$$

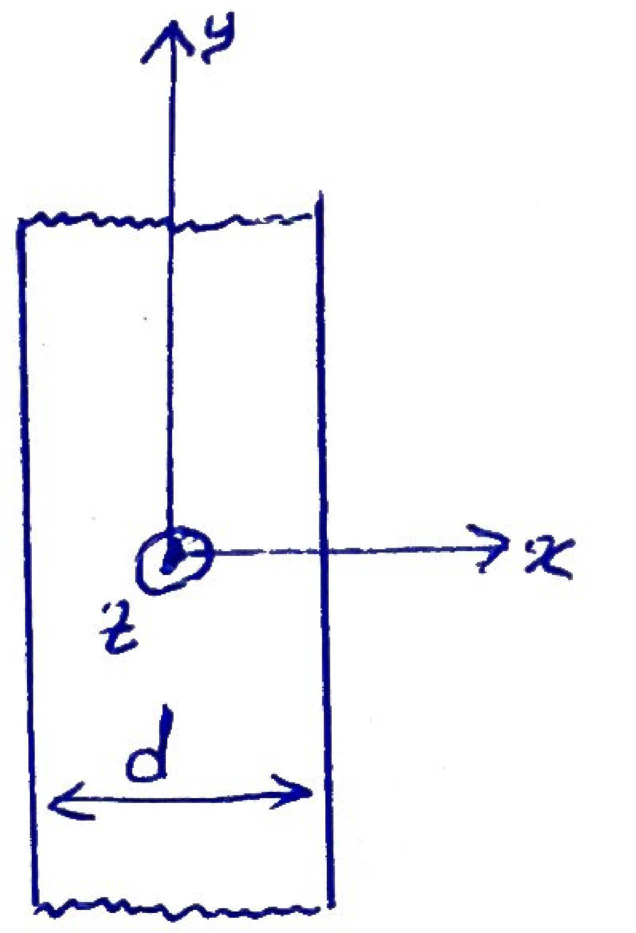
$$= 2\pi \ell \rho_0 \left[a\int r\,dr - \frac{1}{b}\int r^2 dr\right]$$

$$= 2\pi \ell \rho_0 \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{1}{b}\frac{r^3}{3}\right]$$

$$E\, \cancel{2\pi} r \cancel{\ell} = \cancel{2\pi} \cancel{\ell} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{ar^2}{2} - \frac{r^3}{3b}\right]$$

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{ar}{2} - \frac{r^2}{3b}\right],\ r < R \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho_0\left[\frac{aR^2}{2} - \frac{R^3}{3b}\right]}{\varepsilon_0\, r},\ r > R$$

Örnek problem 8

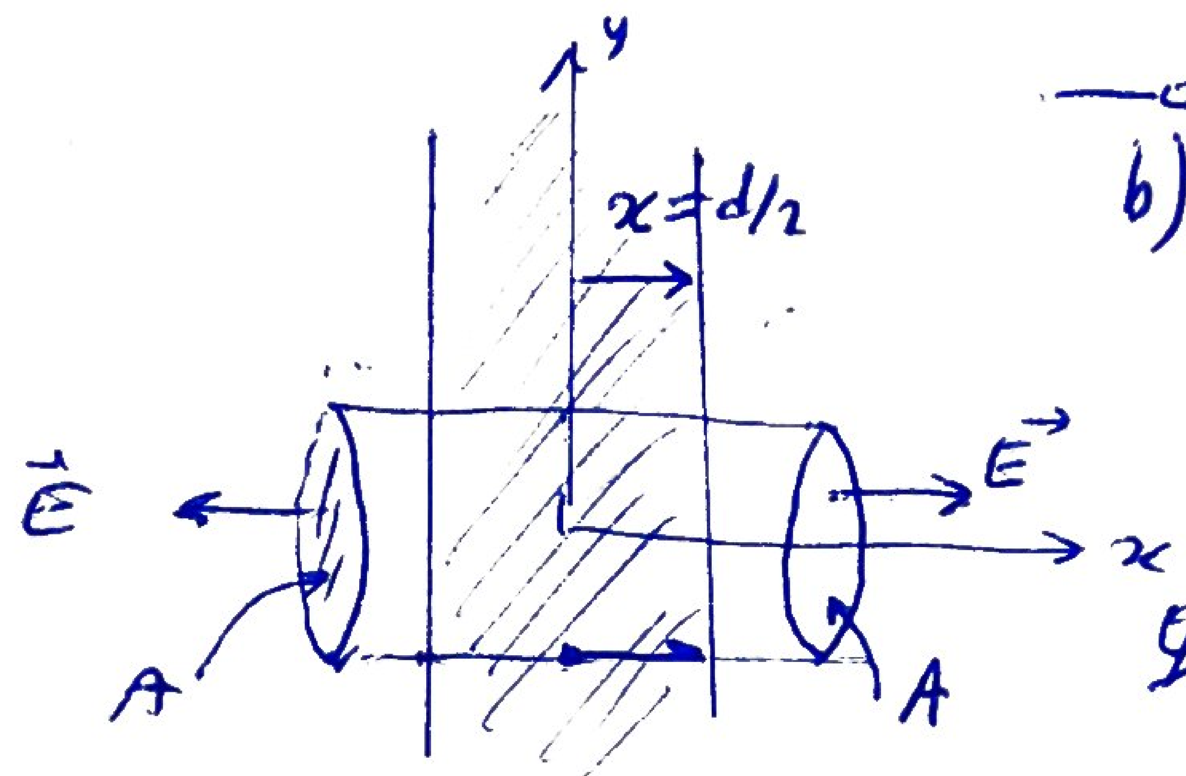


Yalıtkan bir madde diliminin, düzgün olmayan artı $\rho = Cx^2$ yük yoğunluğu vardır. Burada x şekildeki dilim için merkezden ölçülen uzaklıktır. C bir sabittir. Dilim y ve z doğrultularında sonsuzdur.

a) Dilimin içindeki bir noktada elektrik alanı bulunuz.

b) Dilimin dışındaki bir noktada elektrik alanı bulunuz.

—o—



b) $|x| > d/2$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = \int E\,dA + \int E\,dA = 2EA.$$

$$q_{iç} = \int \rho\, dV = \int Cx^2\, dV, \qquad \underset{\text{silindirin alanı}}{dV = A}\,dx \leftarrow \text{silindirin yüksekliği}$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} Cx^2 A\,dx = CA\int_{-d/2}^{+d/2} x^2\,dx$$

$$= CA\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-d/2}^{d/2} = \frac{CA}{3}\left(\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \left(-\frac{d}{2}\right)^3\right) = \frac{CA}{3}\,\frac{2d^3}{8} = \frac{1}{12}CAd^3$$

$$\Rightarrow\ 2E\cancel{A} = \frac{C\cancel{A}d^3}{12\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{24\varepsilon_0}Cd^3} \qquad |x| > d/2$$

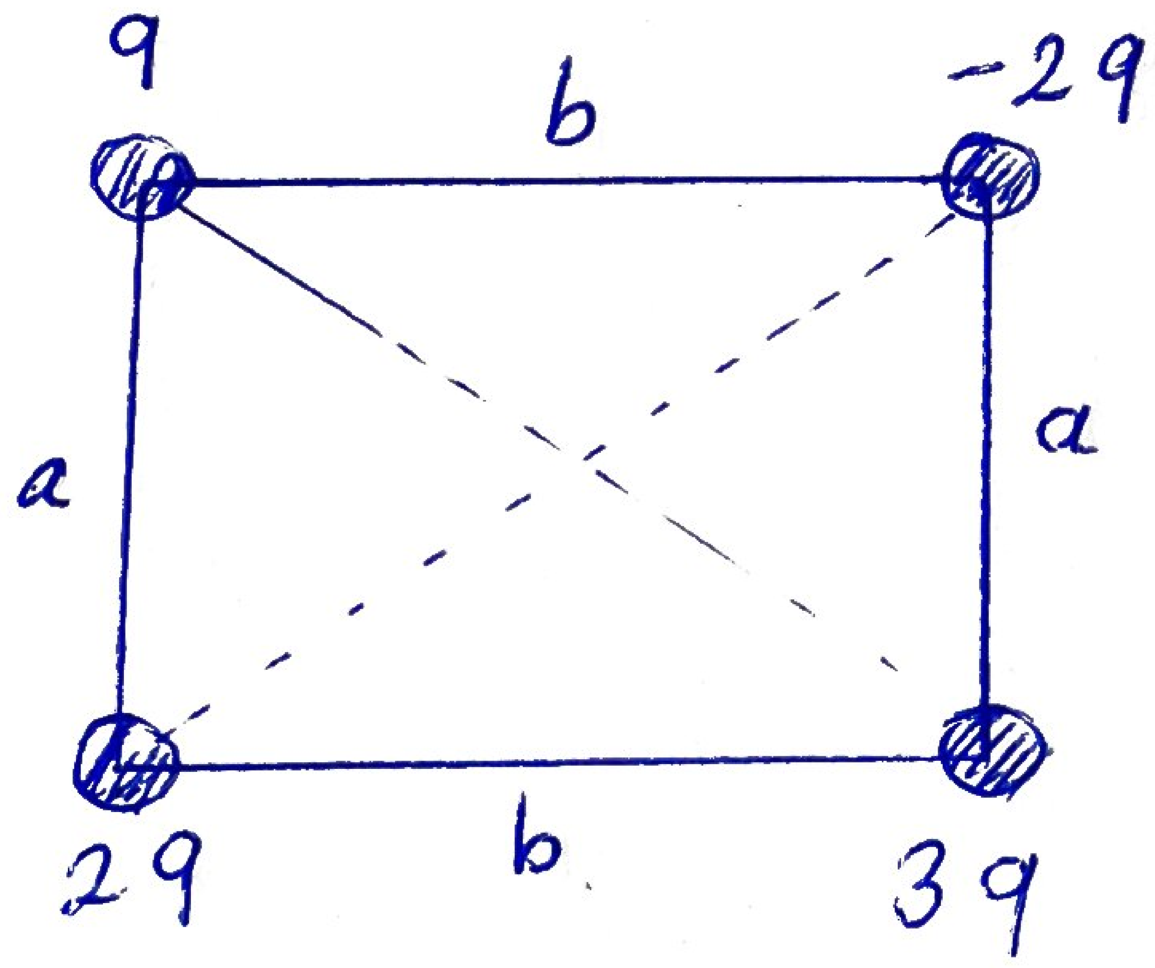
—o—

a) $-\frac{d}{2} < x < d/2$: $\quad q_{iç} = \int \rho\, dV = \int_{-x}^{x} Cx^2 A\,dx = \frac{1}{12}CAx^3$ ✓

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2E\cancel{A} = \frac{1}{12}C\cancel{A}x^3$$

$$\boxed{E = \frac{1}{24}Cx^3}$$

Örnek problem 9



$a = 0{,}30\ m, \quad b = 0{,}40\ m$

$q = 6\mu C$

Sistemin enerjisini bulunuz.

$k \cong 9 \times 10^{-9}\ \frac{Nm^2}{C^2}$

—o—

$$U = \underbrace{\frac{kq(2q)}{a}}_{1} + \frac{kq(3q)}{\sqrt{a^2+b^2}} + \underbrace{\frac{kq(-2q)}{b}}_{2}$$

$$+ \frac{k2q(-2q)}{\sqrt{a^2+b^2}} + \underbrace{\frac{k(2q)(3q)}{b}}_{2} + \underbrace{\frac{k(-2q)(3q)}{a}}_{1}$$

—o—

$$U = \frac{2kq^2}{a} - \frac{6kq^2}{a} + \frac{6kq^2}{b} - \frac{2kq^2}{b} + \frac{3kq^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{4kq^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$U = -\frac{4kq^2}{a} + \frac{4kq^2}{b} - \frac{kq^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

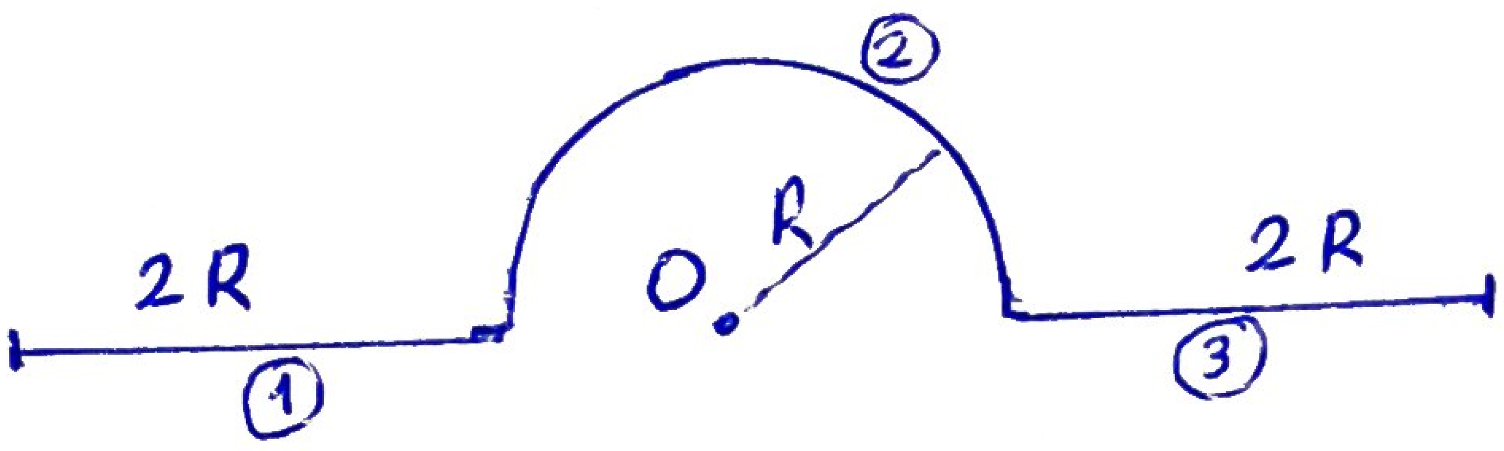
$$U = kq^2\left(\frac{4}{b} - \frac{4}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$U = 9 \times 10^{-9} (6 \times 10^{-6})^2 \underbrace{\left(\frac{4}{0{,}4} - \frac{4}{0{,}3} - \frac{1}{0{,}5}\right)}_{-5.33}$$

$$U = 1726.92 \times 10^{-21}\ J$$

$$U \cong 1{,}727 \times 10^{-18}\ J.$$

Örnek Problem 10

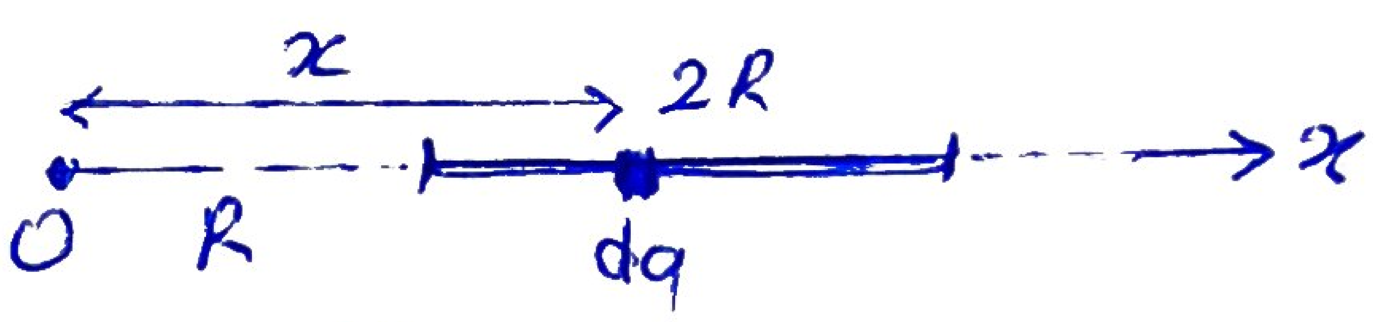


Düzgün yük yoğunluğu $+\lambda$ olan sonlu uzunluktaki bir tel şekildeki gibi kıvrılmıştır. O noktasındaki elektriksel potansiyeli bulunuz.

Çözüm:

Tel üç parçadan oluşuyor.

→ ③ nolu parçanın potansiyeli



$V_3 = \int \frac{k\,dq}{r}$, $r \leftrightarrow x$
$dq = \lambda dx$.

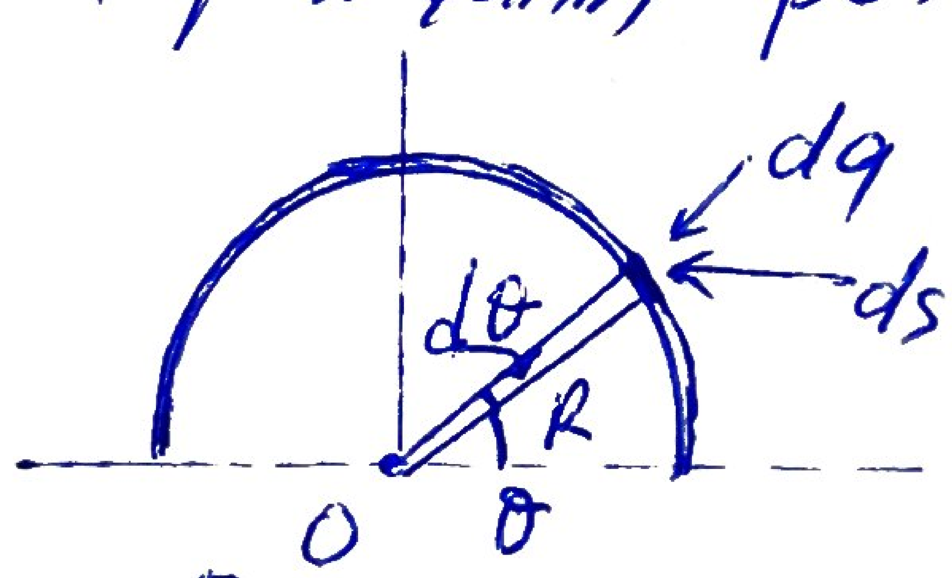
$$V_3 = \int_{x=R}^{3R} \frac{k\lambda dx}{x} = k\lambda \ln(x)\Big|_R^{3R} = k\lambda\left[\ln(3R) - \ln(R)\right]$$

$$= k\lambda \ln\left(\frac{3\cancel{R}}{\cancel{R}}\right) = \boxed{k\lambda \ln 3} ✓$$

① nolu parçanın potansiyeli ③ ile aynı olur.

$V_1 = k\lambda \ln(3)$

② nolu parçanın potansiyeli



$V_2 = \int \frac{k\,dq}{r}$ $r = R$

$dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$.

$$V_2 = \int_0^{\pi} \frac{k\lambda \cancel{R} d\theta}{\cancel{R}} = k\lambda\, \theta\Big|_0^{\pi} = k\lambda\pi$$

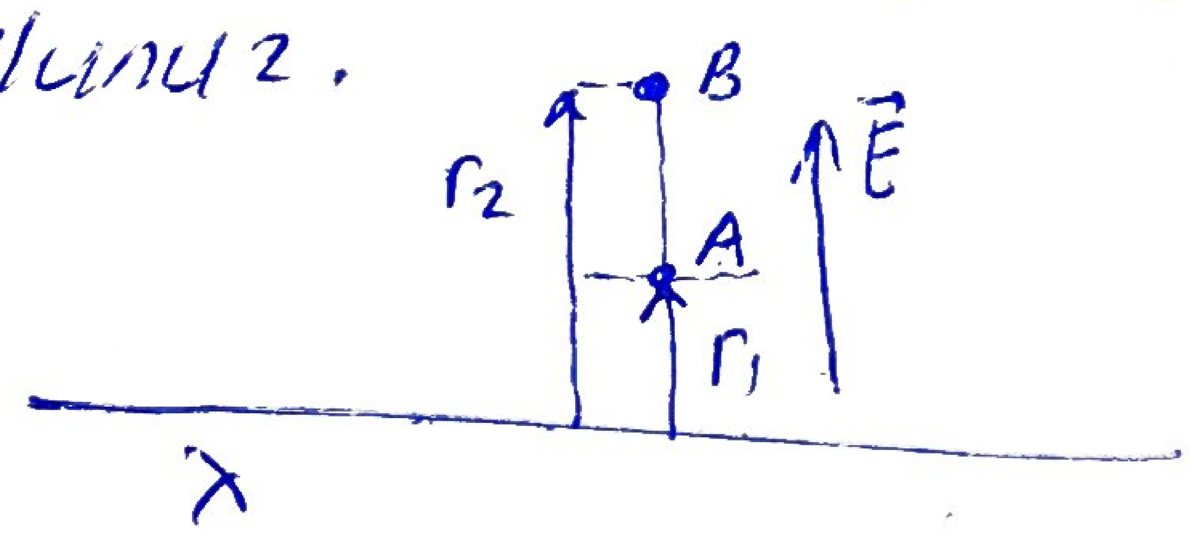
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 2k\lambda \ln 3 + k\lambda\pi = k\lambda(2\ln 3 + \pi)$$

Örnek problem 11

Düzgün dağılmış çizgisel bir yükün elektrik alanı, Gauss yasasına göre.

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)\hat{r}$$

ile verilmektedir. Burada $\hat{r}$, çizgisel yükten çapsal doğrultuda uzaklaşan birim vektör, λ metre başına yüktür. $r=r_1$ ve $r=r_2$ arasındaki potansiyel farkını bulunuz.

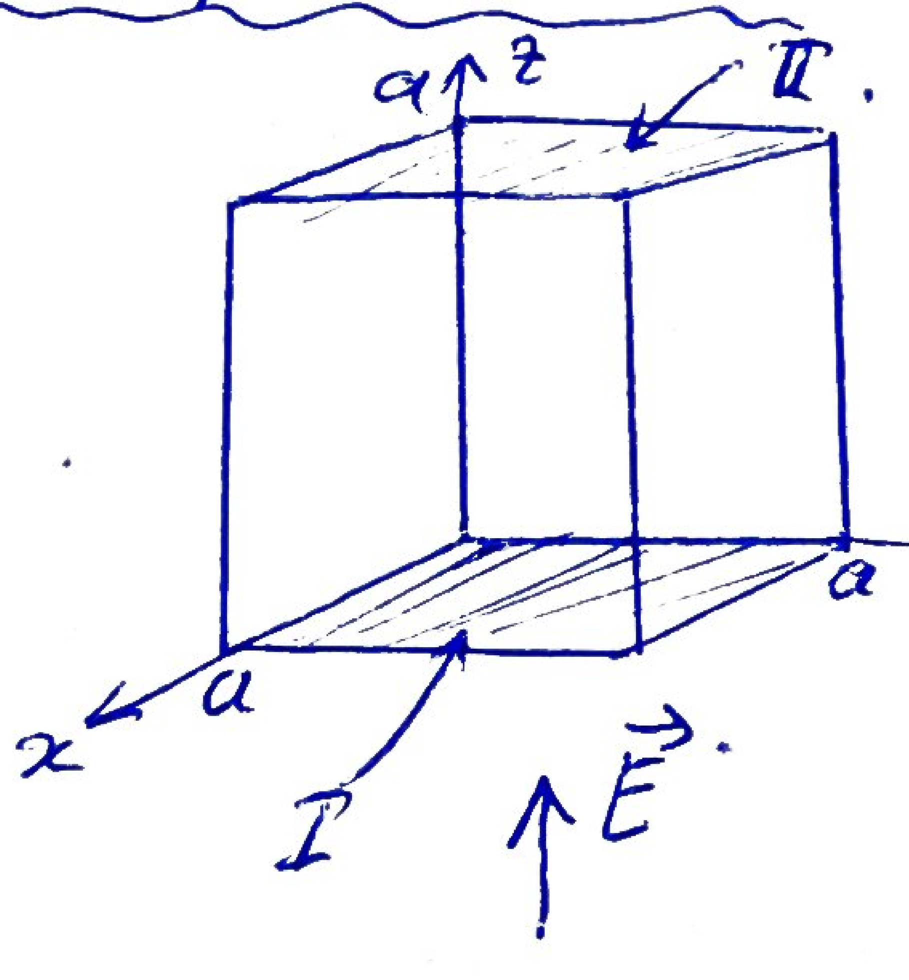


$$\Delta V = V_B - V_A = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}\ , \quad d\vec{r} = dr\,\hat{r}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln(r)\Big|_{r_1}^{r_2}\right)$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) ✓$$

Örnek problem 12



a) $\vec{E} = Az\hat{k}$ elektrik alanında bulunan a kenar uzunluğuna sahip küpten geçen akıyı bulunuz.

b) Küpün içinde ne kadar yük vardır?

a) Elektrik alan z yönünde olduğundan sadece taralı alandan akı geçer.

I: $z=0$, $\vec{E}=0$, $\int_I \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$.

II. $z=a$, $\vec{E} = Aa\hat{k}$ $\int_{II}\vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{II} E\,dA = Aa\int dA = Aa^3$ ✓

b) $\Phi = \frac{q_{iç}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{iç} = \varepsilon_0 A a^3$ ✓