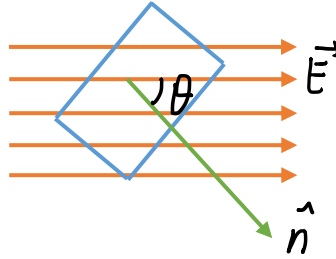
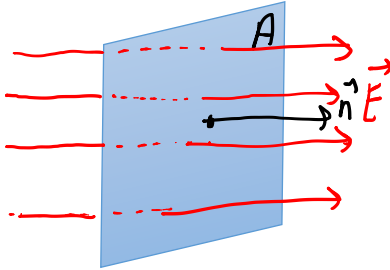


BÖLÜM 24 GAUSS YASASI

Gauss yasası belli simetrilere sahip yük dağılımları için elektrik alanı hesaplamaya yarayan bir yasadır.

24.1 ELEKTRİK AKISI



Elektrik akısı Φ_E ile gösterilir. Bir yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin bir ölçüsüdür.

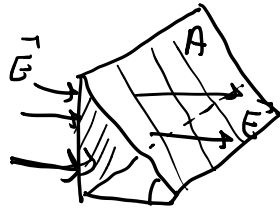
$$\Phi_E = EA \quad \vec{E} \parallel \hat{n}$$

ile tanımlanır. Φ_E 'nin birimi $\frac{N}{C} m^2$ 'dir.

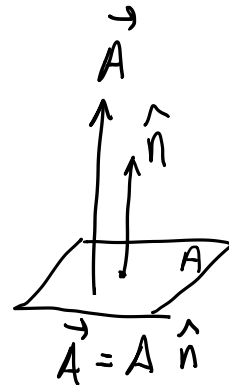
Eğer yüzey normali ile $\vec{E}$ arasında θ açısı varsa akı

$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

$$A' = A \cos \theta$$



$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (\vec{E} \text{ düzgün ve})$$
$$= EA \cos \theta$$

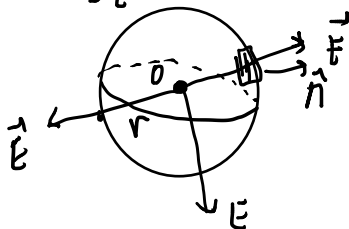


"Elektrik akısı bir yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayısı ile orantılı"

Örnek 24.1 Bir Küreden Geçen Akı

Merkezinde $+1,00 \mu C$ luk bir yük bulunduran $1,00 m$ yarıçaplı, bir küreden geçen elektrik akısı ne kadardır.

Çözüm: $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$



$$\vec{E} \parallel \hat{n} \quad \Phi_E = EA \cos 0^\circ$$

Küre yüzeyinde $|\vec{E}|$ sabittir.

$$\Phi_E = EA = k_e \frac{q}{r^2} 4\pi r^2$$

$$E = \left(8,99 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \right) \frac{(1,00 \times 10^{-6} \text{ C})}{(1,00 \text{ m})^2}$$

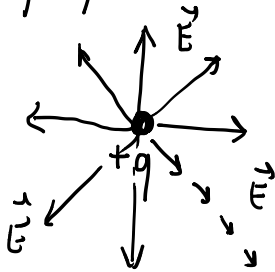
$$E = 8,99 \times 10^3 \frac{N}{C} \text{ bulunur. } A = 4\pi r^2 \approx 12,6 \text{ m}^2$$

$$\Phi_E = E A \approx 1,13 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C} \text{ bulunur.}$$

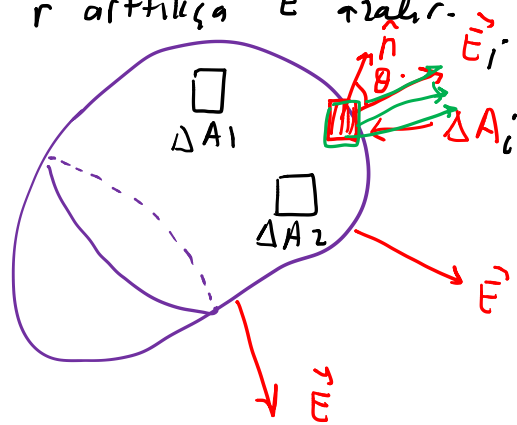
Elektrik akısı, skaler bir büyüklüktür.

DÜZGÜN OLMAYAN ELEKTRİK ALANIN AKISI

- Eğer elektrik alanın şiddeti ve yönü sabit ise $\vec{E}$ düzgündür denir. İki levha arasındaki alan düzgündür.
- Elektrik alanın şiddeti veya yönü yerden yere değişiyorsa $\vec{E}$ düzgün değildir.



$E = k \frac{q}{r^2}$ idi. r arttıkça E azalır.



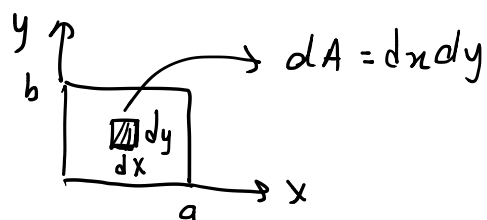
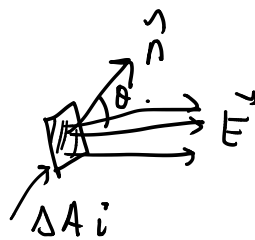
Küçük ΔA yüzey bölgesinde

$\vec{E}$ hemen hemen düzgün. ΔA 'dan geçen akıyı

$$\Delta \Phi = E \Delta A \cos \theta.$$

$$\Phi_E = \sum_i \Delta \Phi = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$$

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i \\ &= \int_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$



Sonuç: $\vec{E}$ düzgün değilse

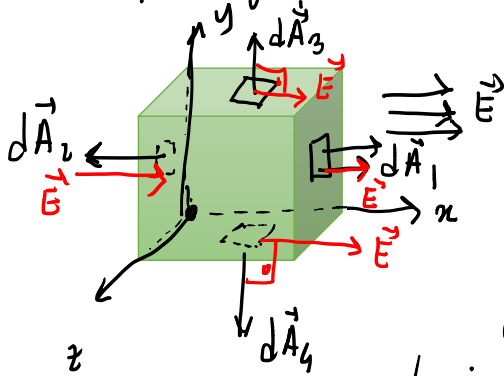
$$\Phi_E = \int_{\text{yüzey}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

elektrik akısı

ile hesaplanır.

Örnek 24.2 Bir Küpten Geçen Akı

x doğrultusunda yönelmiş düzgün bir $\vec{E}$ alanını göz önüne alalım. Bir kenar uzunluğu l olan ve şekildedeki gibi verilen küpten geçen elektrikli akıyı hesaplayınız.



$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \dots$$

1.yüz 2.yüz

6 tane yüzey var. $d\vec{A}_1$ ve $d\vec{A}_2$ haric diğer yüzeylerden geçen akı sıfırdır. $\vec{E} \perp d\vec{A}$ olduğundan $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ 'lar sıfır olur.

$$\Phi = \int E dA_1 \cos 0^\circ + \int E dA_2 \cos 180^\circ$$

1.yüzey = 1 2.yüzey = -1

$$= \int E dA_1 - \int E dA_2$$

$$= E A_1 - E A_2$$

$$= \underbrace{E l^2}_{\text{Çıkan akı}} - \underbrace{E l^2}_{\text{Giren akı}} = 0 \quad \checkmark \quad \text{"Toplam akı sıfırdır"}$$

$$A_1 = A_2 = \dots = A_6 = l^2$$

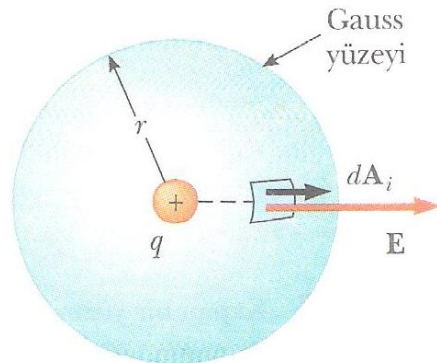
24.2 GAUSS YASASI

Noktasal bir yükün r yarıçaplı bir küresel yüzeyden geçirdiği akıyı hesaplayalım.

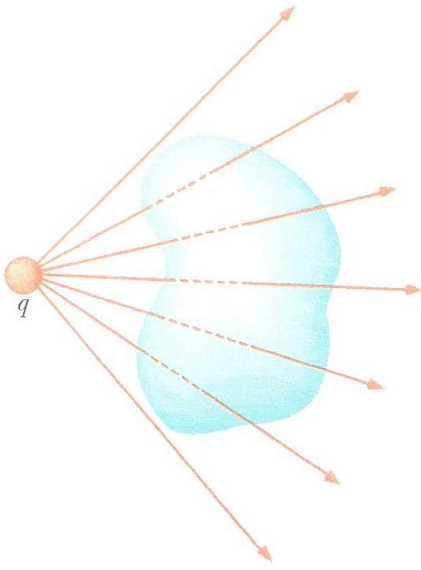
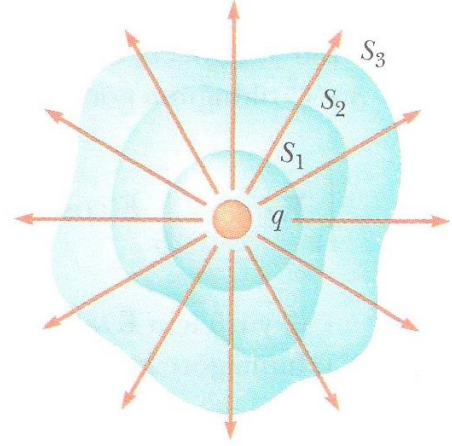
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (dA \hat{r})$$

$$\Phi_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) \quad r = \text{sabit}$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{iz}}}{\epsilon_0} \quad \text{"Gauss Yasası"}$$



q yükünü saran değişik biçimli yüzeylerden geçen aynıdır.



Kapalı bir yüzey dışında bulunan bir nokta yük. Yüzeye giren ve çıkan alan çizgilerinin sayısı eşittir.

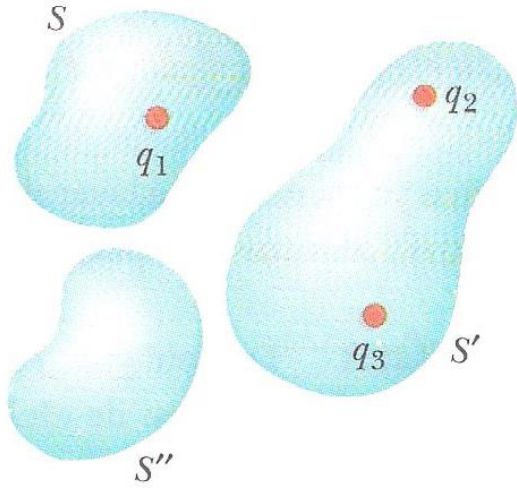
Yük kapalı yüzeyin içinde değilse yüzeye giren akı ile çıkan akı eşit olur. Dolayısıyla net akı sıfırdır.

Bir çok yükün elektrik abı, elektrik ablarının toplamı olduğundan

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{A}$$

yaşanabilir. Toplam akı,

$q_{iç} = q_1 + q_2 + \dots + q_n$, toplam yükün akısına eşittir. Yani $q_{iç} = \sum q_i$ olarak ele alınır.



$$S \text{ yüzeyi} : \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$S' \text{ yüzeyi} : \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$

$$S'' \text{ yüzeyi} : \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$q_{iç} = 0$$

ÖRNEK 24.4 Bir Nokta Yükün Elektrik Alanı

Gauss yasasından başlayarak, yalıtılmış bir q nokta yükünün elektrik alanını hesaplayınız.

Çözüm Tek bir yük, olası en basit yük dağılımı olduğundan, Gauss yasası ile elektrik alanının nasıl bulunacağını göstermek için bilinen durum ele alınmaktadır. Bunun için, Şekil 24.10'daki gibi, merkezi nokta yük üzerinde bulunan yarıçaplı küresel bir Gauss yüzeyi seçilir. Pozitif nokta yükün elektrik alanı simetriden dolayı çap boyunca dışarı doğru olacağından yüzeye her noktada diktir. (2) koşulundaki gibi, her noktada $\vec{E}$, $d\vec{A}$ ya paralel olduğundan $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ dır ve Gauss yasasına göre

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

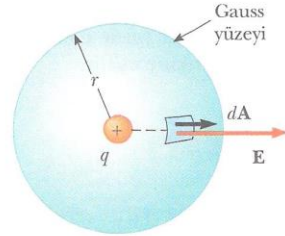
olur. Simetri uyarınca E , yüzeyin her yerine sabit olduğundan (1) koşuluna sağlar ve integral dışına alınabilir. Böylece, küre yüzölçümünü $4\pi r^2$ alarak;

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Buna göre, alanın büyüklüğü

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$

olur. Bu, Bölüm 23'de Coulomb yasasından çıkarılan bir nokta yükün bilinen elektrik alanıdır.

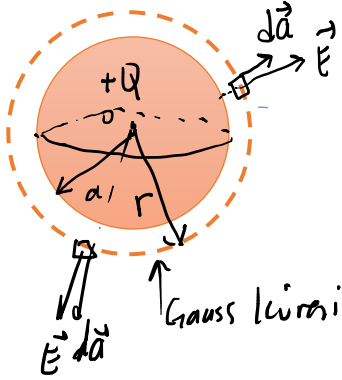


Şekil 24.10 Bir q nokta yükü küresel Gauss yüzeyinin merkezindedir ve $\vec{E}$ yüzeyin her noktasında $d\vec{A}$ ya paraleldir.

Örnek 24. 5 Küresel Simetrik Bir Yük Dağılımının Alanı

ρ yarıçaplı yalıtkan dolu bir kürenin düğün yük yoğunluğu ρ ve toplam yükü Q dur. a) kürenin dışında alanı hesaplayınız
b) kürenin içinde alanı "

Cözüm: a) $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$ = sçit.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} \quad \text{"Gauss yasası"}$$

$$q_{iç} = Q \quad \vec{E} \parallel d\vec{a} \quad \vec{E} \cdot d\vec{a} = E da$$

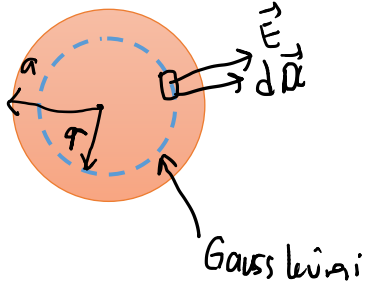
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint E da = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \oint da = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$A_{küre} = 4\pi r^2$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad r > a$$

b) $r < a$



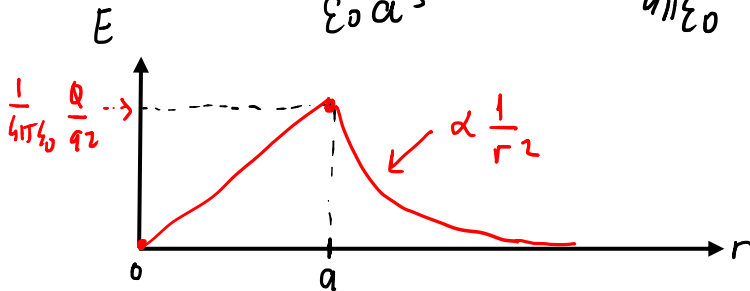
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

$$E \oint da = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}, \quad q_{iç} = ?$$

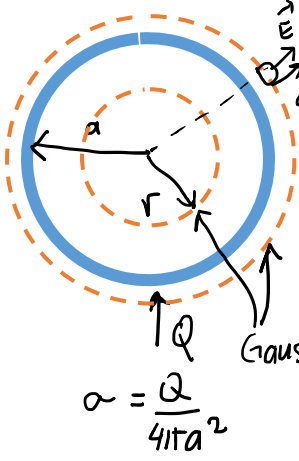
$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{3}\pi a^3 \\ \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} Q \\ q_{iç} \end{array} \Rightarrow q_{iç} = \left(\frac{r}{a}\right)^3 Q$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{r^3 Q}{\epsilon_0 a^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r \hat{r} \quad r \leq a$$



Örnek 24.6 İnce Küresel Bir Tabakanın Elektrik Alanı

a yarıçaplı ince küresel bir tabakanın yüzeyinde düzgün olarak dağılmış Q yükü bulunmaktadır. Tabakanın içinde ve dışında elektrik alanı bulunuz.



a) $r < a$ (Kahupın içinde)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{i\zeta}}{\epsilon_0}, \quad q_{i\zeta} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0 \quad r < a$$

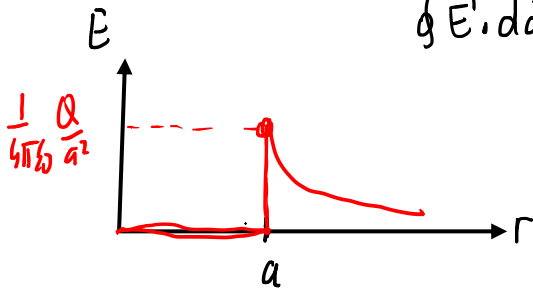
b) $r > a$ (Kahupın dışında)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{i\zeta}}{\epsilon_0}, \quad q_{i\zeta} = Q$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{a}$$

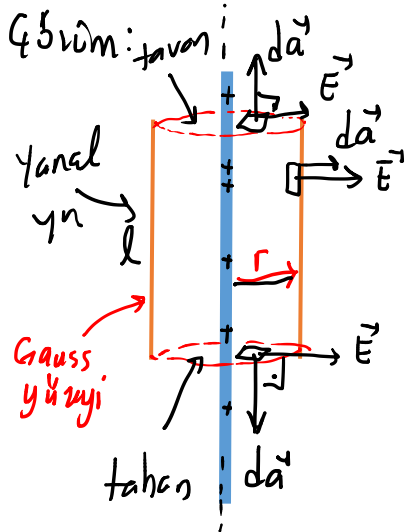
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint E da \cos 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \hat{r} \quad r > a$$



Örnek 24.7 Silindirik Simetrik Bir Yük Dağılımı

λ sabit doğrusal yük yoğunluğu, sonsuz uzunlukta doğrusal + bir yükten r kadar uzakta elektrik alanı bulunuz.



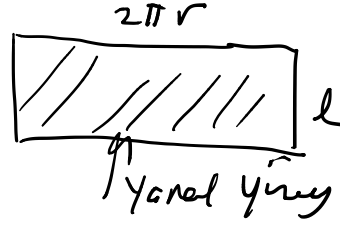
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{i\zeta}}{\epsilon_0} \quad \text{"Gauss yüzü"}$$

$$\int_{\text{tavan}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{\text{taban}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{\text{yanal yüzü}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{i\zeta}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \perp d\vec{a}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\underbrace{E \oint da}_{\text{Yanal yüzey}} = \frac{q_{iz}}{\epsilon_0}$$

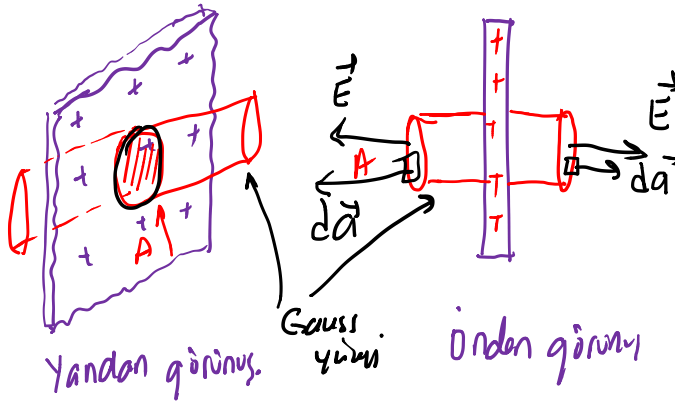


$$E \cancel{2\pi r l} = \frac{\lambda \cancel{l}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \left(\frac{1}{2 \cdot 2\pi \epsilon_0} \right) \frac{2\lambda}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \hat{r}$$

Örnek 24.8 Yalıtkan Düzlem bir Yük Tabakası

σ düğün yüzey yük yoğunluklu, yalıtkan, sonsuz artı yüklü bir düzlemin elektrik alanını bulunuz.



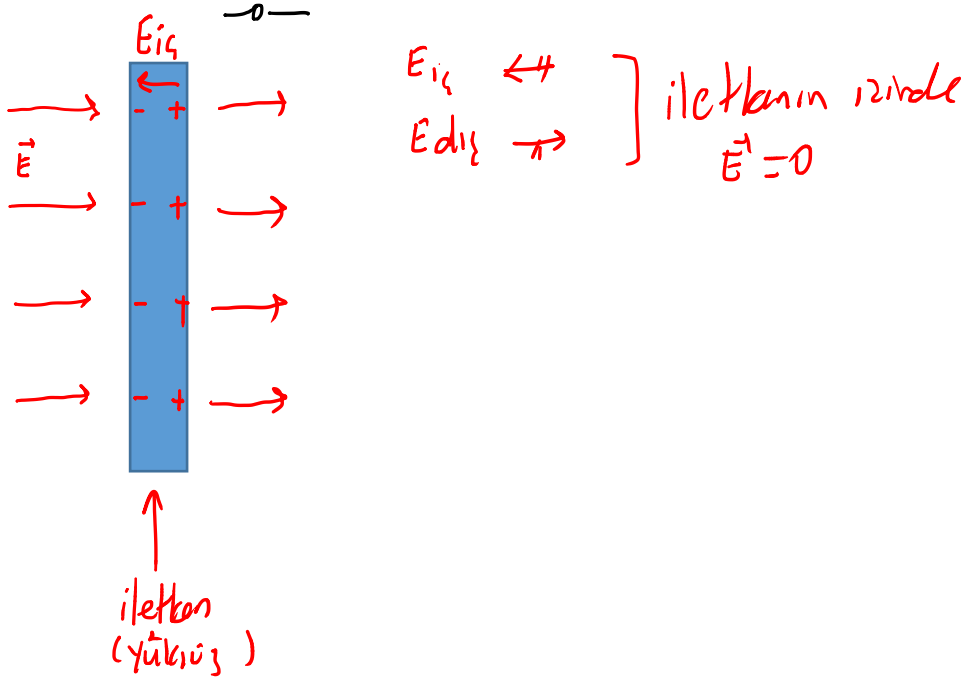
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{iz}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2 E A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \text{sabit}$$

24.4. ELEKTROSTATİK DENGEDKİ İLETKEN

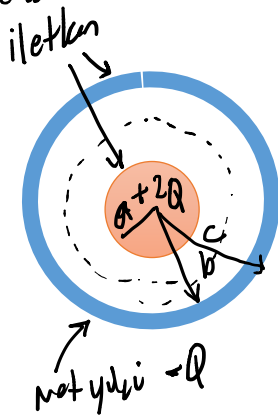
1. İletken içinde her yerde elektrik alan sıfırdır.
2. Yalıtılmış bir iletkende bir yük varsa iletkenin yüzeyindedir.
3. Yüklü bir iletkenin hemen dışındaki elektrik alanı iletken yüzeyine dik olup $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ büyüklüğündedir. Burada σ söz konusu noktadaki yük yoğunluğudur.
4. Düzgün biçimli olmayan bir iletkende, yüzeyin eğrilik

Yarıçapının en küçük olduğu yerde en büyüktür.



Örnek 24.10 Küresel Tabaka İçinde Bir Küre

a yarıçaplı iletken dolu bir kürenin net $+2Q$ yükü bulunuyor. iç yarıçapı b , dış yarıçapı c olan iletken küresel bir kabuk $-Q$ net yükünü taşımaktadır. Tüm bölgede elektrik alanını bulunuz.



a) $r < a$ $\vec{E} = 0$ (iletkenin içinde
alan sıfırdır)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{2Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r^2} \hat{r}$$

c) $b < r < c$ (küresel
boşlukta) $\vec{E} = 0$

$$d) r > c \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{iz}}{\epsilon_0}, \quad q_{iz} = +2Q - Q = Q$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad r > c$$