Legendre Diferansiyel Denkleminin Seri Yöntemiyle Çözümü

$L^2 Y(\theta,\phi) = \lambda \hbar^2 Y(\theta,\phi)$, ($\lambda = \ell(\ell+1)$ bunun böyle olduğunu bilmiyoruz.)

$$* \quad (1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - \underbrace{2x\frac{dP}{dx}} + \lambda P = 0 \quad , \quad P(x): \text{ Legendre polinomu.}$$

$$P(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \text{ olsun.}$$

Gerekli türevleri alalım ve yerine yazalım.

$$\frac{dP}{dx} = P' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \dots \checkmark$$

$$2xP' = 2(1C_1 x + 2C_2 x^2 + 3C_3 x^3 + 4C_4 x^4 \dots)$$

n

$$2xP' = \sum_n 2n C_n x^n \checkmark$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = P'' = 2C_2 + 2.3C_3 x + 3.4C_4 x^2 + \dots$$

$$(1-x^2)P'' = P'' - x^2 P''$$

$$= (1.2C_2 + 2.3C_3 x + 3.4.C_4 x^2 \dots) - (1.2C_2 x^2 + 2.3.C_3 x^3 + 3.4C_4 x^4 + \dots)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)n C_n x^n$$

Bunları *'da yerine yazılırsa,

$$\sum \left[(n+1)(n+2)C_{n+2} - (n-1)nC_n - 2nC_n + \lambda C_n \right] x^n = 0$$

Bu denklemin sağlanması için $[\dots] = 0$ olmalıdır.

$$\sum \left[(n+1)(n+2)C_{n+2} - \underbrace{(n^2 - n + 2n - \lambda)}_{(n^2+n-\lambda)} C_n \right] x^n = 0$$

Her n için

$$(n+1)(n+2)\,C_{n+2} = (\underbrace{n^2+n-\lambda}_{n(n+1)-\lambda})\,C_n$$

$$C_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}\,C_n \qquad **$$

C_0 ve C_1 gibi iki başlangıç katsayısı verilirse tüm C_n'ler bulunur ve seride $P(x)=\sum C_n x^n$'de yerine yazılarak çözüm bulunur.

Ancak bu sonsuz terimli seri yakınsak mıdır? Seri yakınsak değilse çözüm olarak kabul edilemez.

Bunu anlamak için $n\to\infty$ için katsayıların oranına bakalım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+2}}{C_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2}{n^2}\to 1.$$

Sonuç sıfır olmadığından seri ıraksaktır.

Bu seriyi yakınsak yapmak için n sayısının sonlu bir değerden öteye geçmesi engellenmelidir. Yani seri bir yerde kesilmeli ve sonlu elemanlı bir polinom olmalıdır.

n indisi arttıkça belli bir l değerine geldiğinde

$**$ ile verilen ifadenin payı sıfır olsun.

Payı sıfır yapan l değeri

$$n\to l \quad\to\quad n(n+1)-\lambda=0$$

$$l(l+1)-\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = l(l+1)}$$

olur.

Her l için ayrı bir polinom elde edilir.

BAZı POLİNOMLARIN ELDE EDİLMESİ

$P_\ell(x)$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ $P_\ell(x) = \sum_n c_n x^n$,

$\rightarrow C_{n+2} = \dfrac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+1)} C_n$

$\ell = 0$ için $P_0 = C_0$, $C_0 = 1$ seçersek
$P_0(x) = 1$ ✓

$\ell = 1$ için $P_1(x) = C_1 x$, $C_1 = 1$ seçersek
$P_1(x) = x$

$\ell = 2$ için $P_2(x) = C_0 + C_2 x^2$

$n = 0 \rightarrow C_2 = \dfrac{0(0+1) - \lambda}{(0+1)(0+2)} C_0$, $\lambda = \ell(\ell+1)$

$C_2 = \dfrac{0(0+1) - 2(2+1)}{(0+1)(0+2)} C_0 = -\dfrac{6}{2} C_0 = -3C_0$

$P_2(x) = C_0 + (-3C_0)x^2 = C_0(1 - 3x^2)$, $C_0 = -1/2$

olarak alınırsa $P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ✓

$\ell = 3$ için $P_3(x) = C_1 x + C_3 x^3$

$n = 1 \rightarrow C_{n+2} = C_3 = \dfrac{1(1+1) - 3(3+1)}{(1+1)(1+2)} C_1$

$= \dfrac{2 - 12}{6} C_1 = \dfrac{-10}{6} C_1 = -\dfrac{5}{3} C_1$

$P_3(x) = C_1 x - \dfrac{5}{3} C_1 x^3 = C_1\left(x - \dfrac{5}{3} x^3\right)$, $C_1 = -3/2$ alırsak

$P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$\ell = 4$ için $P_4(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4$

$n = 0, 2$ değerlerini alabilir.

→ n=0 için $\underbrace{C_{0+2}}_{C_2} = \frac{0(0+1)-4(4+1)}{(0+1)(0+2)} C_0 = -\frac{20}{2} C_0 = -10C_0$

→ n=2 için $C_{2+2} = C_4 = \frac{2(2+1)-4(4+1)}{(2+1)(2+2)} C_2$

$$C_4 = \frac{6-20}{12} C_2 = \frac{-14}{12} C_2 \leftarrow (-10C_0)$$

$$C_4 = \frac{-14}{12}(-10C_0) = \frac{35}{3} C_0$$

$$P_4(x) = C_0 + C_2x^2 + C_4x^4 + \cancel{C_6}^{\,0} x^6 + \cancel{C_8}^{\,0} x^8$$

$$= C_0\left(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right) \qquad C_0 = 3/8 \text{ seçersek}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

ilk 5 polinom:

$P_0(x) = 1$

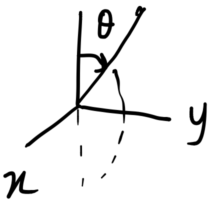
$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

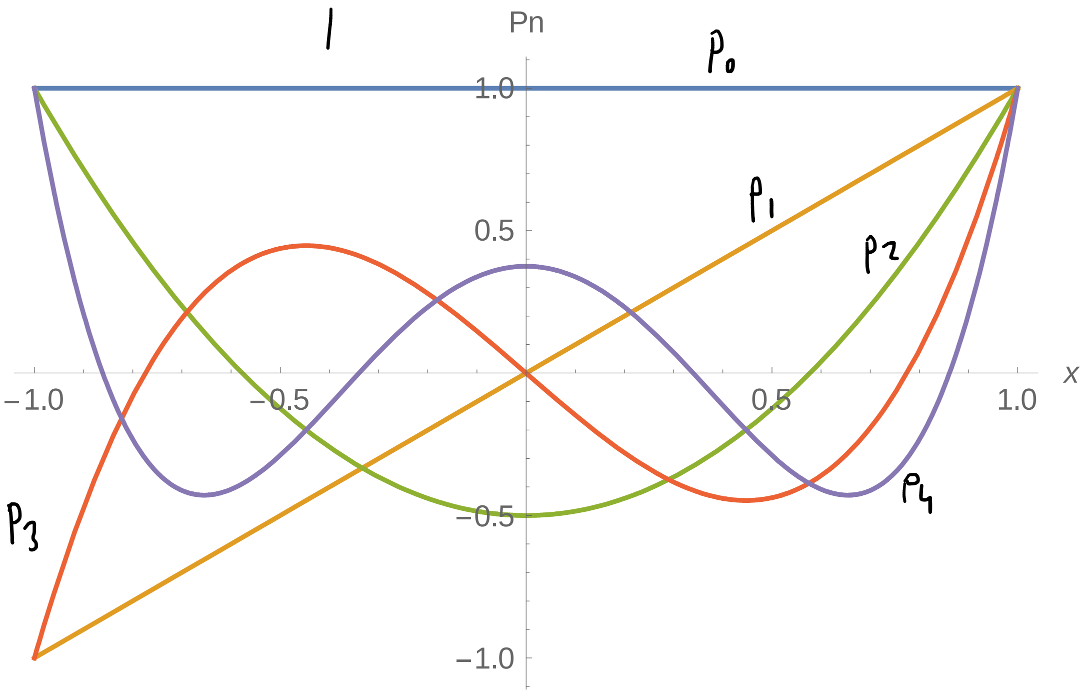
$x = \cos\theta$



$0 \le \theta \le \pi$

$-1 \le x \le +1$

Bu polinom için tanım aralığı [−1, +1]'dir.



Legendre polinomlarının bazı özellikleri

1. Diklik bağıntısı $\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} = \begin{cases} 0 & \ell \neq \ell' \\ \frac{2}{2\ell+1} & \ell' = \ell \end{cases}$

örnek $\int_{-1}^{1} P_0 P_1\, dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}\left((+1)^2 - (-1)^2\right)$
$= 0$

2. Parite $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$

3. Tekrarlama bağıntısı
$(\ell+1)P_{\ell+1} = (2\ell+1)\, x\, P_\ell - \ell\, P_{\ell-1}$

4. Türev bağıntısı $(1-x^2)P_\ell' = \ell P_{\ell-1} - \ell\, x\, P_\ell$

5. $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell$

Örnek (5) → $\ell = 0$ $P_0(x) = \frac{1}{2^0\, 0!}\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^0}_{\text{türevi alınmış}}(x^2-1)^0$
$= 1$

$$P_1(x) = \frac{1}{2 \cdot 1!} \left(\frac{d}{dx}\right)^1 (x^2-1)^1$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}x = x$$

(3) $\rightarrow$ $(\ell+1) P_{\ell+1} = (2\ell+1) x P_\ell - \ell P_{\ell-1}$

örneğin $P_2 = ?$ $\ell = 1$ alınır.

$$\underbrace{(1+1)}_{2} P_2 = 3x \underbrace{P_1}_{x} - 1 \underbrace{P_0}_{1} = 3x^2 - 1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

Assosiye Legendre denkleminin çözümleri

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta(x)}{dx} + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta(x) = 0$$

denkleminin çözümleri $\Theta(x) = A P_\ell^m(\cos\theta)$ ile verilen Assosiye Legendre polinomlarıdır. A Normalizasyon sabitidir.

! Bu denklem seri yöntemiyle bulunabilir.

Ancak biz $P_\ell^m(x)$ Polinomlarını $P_\ell(x)$'lerden elde edelim.

$$\boxed{P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_\ell(x)} \quad (*) \quad \cancel{m\neq 0}\ m>0$$

---

soru: Acaba m' üzerinde herhangi kısıtlama varmıdır? ℓ'ye bağlımıdır. Hangi değerleri alabilir.

Daha önce $m = 0 \mp 1, \mp 2 \ldots$

ℓ: daima pozitif tam sayı idi. $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

$|m| > \ell$ ise $P_\ell^m = ?$

$P_\ell(x)$: ℓ'inci dereceden bir polinomdur.

(*) eşitliğinde $\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|>\ell} P_\ell(x) = 0$ olacaktır.

Örnek $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

m=3 olsun. $P_2^3 = (1-x^2)^{3/2}\frac{d^3}{dx^3}\left[\frac{1}{2}(3x^2-1)\right]$

$$= (1-x^2)^{3/2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(3x^2-1)\right]\right) = (1-x^2)^{3/2}\frac{d^2}{dx^2}(3x)$$

$$= (1-x^2)^{3/2}\frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{d}{dx}(3x)}_{3}\right) = (1-x^2)^{3/2}\frac{d}{dx}(3) = 0$$

Öyleyse $|m| > \ell$ olamaz. $|m| \leq \ell$ olmak zorundadır.

$\ell = 0$ için $m = 0$
$\ell = 1$ için $m = -1, 0, +1$
$\ell = 2$ için $m = -2, -1, 0, 1, 2$

$\Bigg\}$ $m \rightarrow 2\ell+1$ tane değer alabilir.

Bazı Assosiye Legendre ~~...~~ polinomlarını elde edelim. Tekrar

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_\ell(x)$$

ifadesini göz önüne alalım.

$\rightarrow$ $\ell=0$, $m=0$ $\quad P_0^0(x) = \underbrace{(1-x^2)^0}_{1}\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^0}_{\text{türev alma}} P_0(x) = 1$

$\rightarrow$ $\ell=1$ için $m=-1,0,1$ değerlerini alır.

$$P_1^0(x) = P_1(x) = x \Rightarrow \boxed{P_1^0(x) = \cos\theta}$$

$$P_1^{-1}(x) = (1-x^2)^{1/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^1 (P_1) = (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta$$

Negatif m'ler için başka bir ifade kullanılır.

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} P_\ell^{|m|}(x) \qquad m<0$$

$$P_1^{-1}(x) = (-1)^{-1}\frac{(1-1)!}{(1+1)!} P_1^1(x) = -\frac{0!}{2!}\sin\theta = -\frac{1}{2}\sin\theta .$$

ℓ	m	P_ℓ^m
1	1	$P_1^1 = \sin\theta$
	0	$P_1^0 = \cos\theta$
	-1	P_1^{-1} $-\frac{1}{2}\sin\theta$.

$\rightarrow$ $\ell=2$ için $m=-2,-1,0,1,2$

$$P_2^0 = P_2(x) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

$$P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^2 = 3\sin^2\theta$$

$$P_2^{-1} = -\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^{-2} = \frac{1}{8}\sin^2\theta .$$

Assosiye Legendre Polinomları için Bazı özdeşlikler.

1 - Diklik ve Normlama

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'} \qquad m>0$$

$$\delta_{\ell\ell'} = \begin{cases} 1 & \ell'=\ell \\ 0 & \ell'\neq\ell \end{cases}$$

$$P_\ell^{-m} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m \qquad m>0$$

2. Türev bağıntısı.

$$(1-x^2)\frac{dP_\ell^m}{dx} = -\ell x P_\ell^m + (\ell+m) P_{\ell-1}^m$$

3. Tekrarlama bağıntısı

$$(2\ell+1)(1-x^2)^{1/2} P_\ell^m = P_{\ell+1}^{m+1} - P_{\ell-1}^{m+1}$$

Küresel Harmonikler

Artık L^2'nin özfonksiyonları olan $Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ fonksiyonlarını elde edebiliriz. ℓ ve m kuantum sayılarına bağlı olarak

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = A\, P_\ell^m(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = A\, P_\ell^m(\theta)\, e^{im\phi}$$

$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$ idi

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ normalizasyon sabiti içine katılacak

fonksiyonlarına Küresel harmonikler denir. Küresel koordinatlarda sabit bir r için açısal hareketi temsil ederler.

Normlanmış "küresel harmonikler"

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = (-1)^m \left[\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{1/2} P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \qquad *$$

Bir kaç küresel harmonikler

$$Y_0^0 = (-1)^0 \left[\frac{(2.0+1)\,(0-0)!}{4\pi\ (0+0)!} \right]^{1/2} P_0^0\, e^{i0\phi} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad \Big\{ \quad 0! = 1$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,, \qquad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}\,, \qquad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi}$$

—o—

Küresel Harmonikler ortogonaldir.

$$x = \cos\theta \qquad \theta = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\theta = \pi \Rightarrow x = -1$$

$$dx = -\sin\theta\, d\theta$$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi} [Y_\ell^m(\theta,\phi)]^* [Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\phi)] \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \qquad (4.33)$$

$$= \begin{cases} 0 & \ell' \neq \ell \text{ veya } m' \neq m \text{ ise} \\ 1 & \ell' = \ell \text{ ve } m' = m \text{ ise} \end{cases}$$

Kuantum sayıları.

ℓ: orbital (yörünge) kuantum sayısı adı verilir.

$\ell =$ 0, 1, 2, 3, ... değerler alır.

↓ ↓ ↓ ↓

s p d f yörüngemsi (orbital)

$\ell=0$, s: sharp

$\ell=1$, p: principle

$\ell=2$, d: diffuse

$\ell=3$, f: fundamental

m veya m_ℓ : manyetik kuantum sayısı

(! Neden manyetik kuantum sayısı denmiştir.)

The first few spherical harmonics are

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \tag{11.83}$$

$$Y_1^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \sin(\theta)\ e^{i\phi} \tag{11.84}$$

$$Y_1^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} \cos(\theta) \tag{11.85}$$

$$Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \sin(\theta)\ e^{-i\phi} \tag{11.86}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2} \sin^2(\theta)\ e^{2i\phi} \tag{11.87}$$

$$Y_2^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2} \sin(\theta)\cos(\theta)\ e^{i\phi} \tag{11.88}$$

$$Y_2^0 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/2} (3\ \cos^2(\theta) - 1) \tag{11.89}$$

$$Y_2^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2} \sin(\theta)\cos(\theta)\ e^{-i\phi} \tag{11.90}$$

$$Y_2^{-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2} \sin^2(\theta)\ e^{-2i\phi} \tag{11.91}$$

$$Y_3^3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{35}{\pi}\right)^{1/2} \sin^3(\theta)\ e^{3i\phi} \tag{11.92}$$

$$Y_3^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{105}{2\pi}\right)^{1/2} \sin^2(\theta)\cos(\theta)\ e^{2i\phi} \tag{11.93}$$

$$Y_3^1 = -\frac{1}{8}\left(\frac{21}{\pi}\right)^{1/2} \sin(\theta)(5\ \cos^2(\theta) - 1)\ e^{i\phi} \tag{11.94}$$

$$Y_3^0 = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{\pi}\right)^{1/2} (5\ \cos^3(\theta) - 3\ \cos(\theta)) \tag{11.95}$$

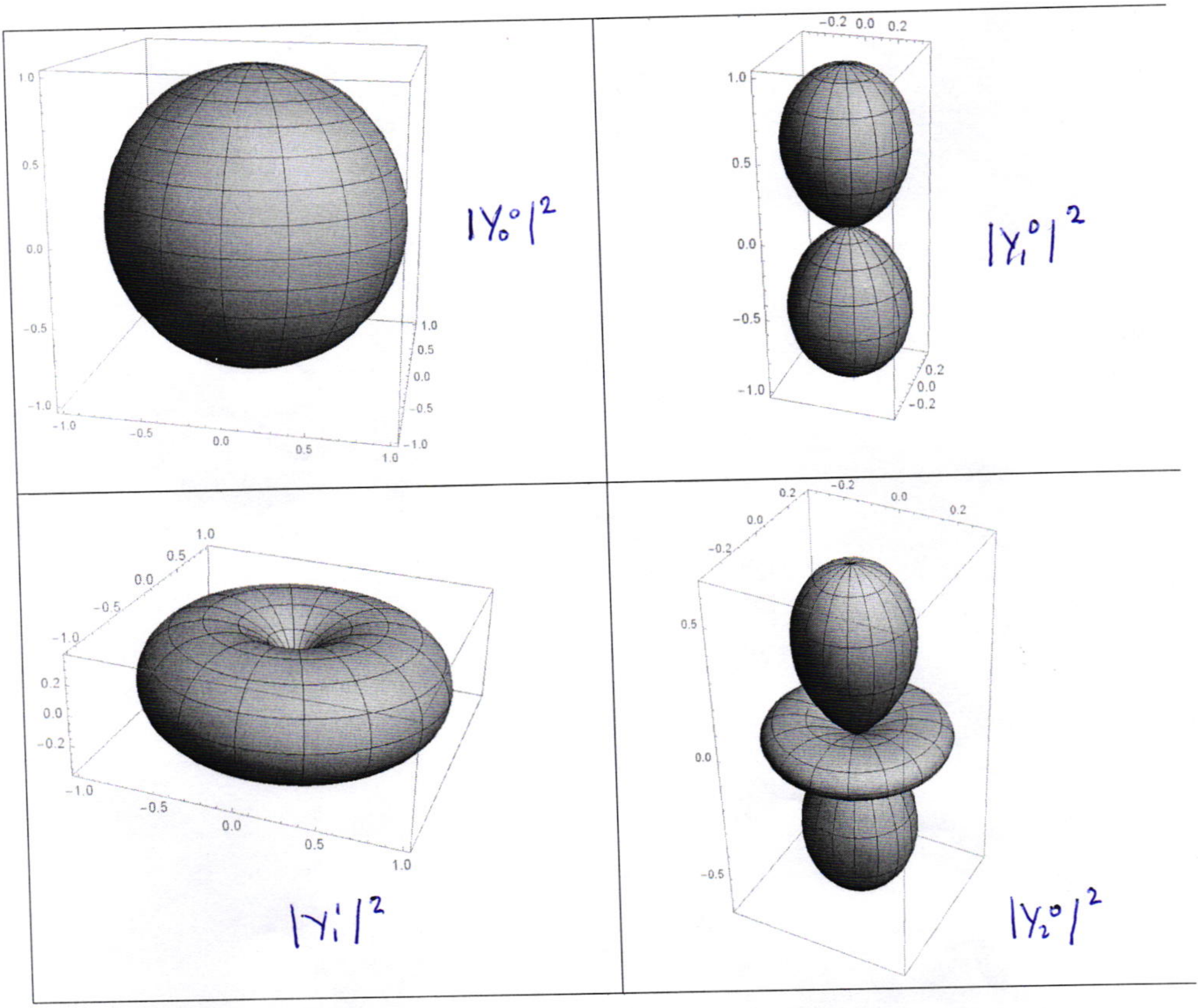
$$Y_3^{-1} = \frac{1}{8}\left(\frac{21}{\pi}\right)^{1/2} \sin(\theta)(5\ \cos^2(\theta) - 1)\ e^{-i\phi} \tag{11.96}$$

$$Y_3^{-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{105}{2\pi}\right)^{1/2} \sin^2(\theta)\cos(\theta)\ e^{-2i\phi} \tag{11.97}$$

$$Y_3^{-3} = \frac{1}{8}\left(\frac{35}{\pi}\right)^{1/2} \sin^3(\theta)\ e^{-3i\phi} \tag{11.98}$$

Açısal bulunma olasılığı yoğunluğu

$$Y^*Y = |Y|^2 = \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|!)}{4\pi(\ell+|m|)!}\right]\left[P_\ell^m(\cos\theta)\right]^2 ,$$



Matematica: `SphericalHarmonicY [l, m, θ, φ]`

`SphericalPlot3D [SphericalHarmonicY [l, m, θ, φ], {θ, 0, Pi}, {φ, 0, 2Pi}]`

Radyal Denklem ve Bazı Çözümler

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}(V-E)=\ell(\ell+1)$$ "Radyal denklem"

Bu denklemi $R(r)$ ile çarpıp düzenlersek

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E-\left(V(r)+\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}\right)\right]R(r)=0$$

olur. Burada

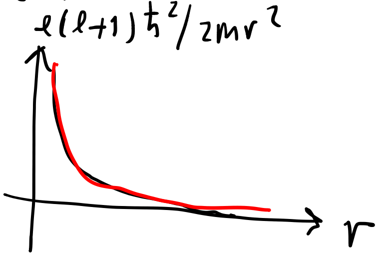
$$V_{et}=V(r)+\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$$ ifadesi "etkin potansiyel"

olarak isimlendirilir. $V(r)$ henüz belirlenmedi.

Ancak $\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$ merkezkaç terimi

$r\to 0$, $\frac{1}{r^2}\to\infty$

$r\to\infty$, $\frac{1}{r^2}\to 0$



Bu terim $r\to 0$ limitinde baskın,

Küresel koordinatlarda $\Psi(r,\theta,\phi)=R(r)\,Y(\theta,\phi)$ dalga fonksiyonu için olasılık yoğunluğu

$$\rho=\psi^*\psi=|\psi|^2=R^2(r)\,|Y(\theta,\phi)|^2$$ şeklindedir.

Normalizasyon $$\int|\psi|^2dv=\int R^2(r)\,|Y(\theta,\phi)|^2\underbrace{r^2dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi}_{dv}=1$$

Bu ifade $R(r)$'ye ve $Y(\theta,\phi)$ kısımlar için ayrı ayrı normlayabiliriz.

$$\int_{r=0}^{\infty}R^2(r)\,r^2dr=1\;,\quad\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}|Y(\theta,\phi)|^2\underbrace{\sin\theta\,d\theta\,d\phi}_{d\Omega}=1$$

Buradan radyal olasılığın ($\theta=$ sabit, $\phi=$ sabit)

$$\rho(r)=|r\,R(r)|^2$$ olduğu anlaşılır.

$\int_0^{\infty} |r R(r)|^2 dr$ integralinin sonlu çıkması için
$R(r)$'nin sıfıra gitmesi yeterli olmaz.
$(r \to \infty, R(r) \to 0)$

$\lim_{r \to \infty} [r R(r)] \to 0$ olmalıdır.

$U(r) = r R(r)$ şeklinde yenibir fonksiyon tanımlayalım.

$$R(r) = \frac{U}{r}, \quad \frac{dR}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(r^{-1} u\right) = -r^{-2}u + r^{-2}\frac{du}{dr}$$

$$= \left(r\frac{du}{dr} - u\right)/r^2$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left[\cancel{r^2}\frac{\left(r\frac{du}{dr} - u\right)}{\cancel{r^2}}\right] = \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr} - u\right)$$

$$= \cancel{\frac{du}{dr}} + r\frac{d^2u}{dr^2} - \cancel{\frac{du}{dr}} = r\frac{d^2u}{dr^2}$$

Bu ifadeler radyal denklemde yerine yazılırsa

$$\underbrace{\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR(r)}{dr}\right)} + \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E - \left(V + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right)\right]R(r) = 0$$

"Radyal denklemi"

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E - V - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\frac{u}{r} = 0$$

Her terimi r ile bölelim

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E - V) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = 0$$

denklemine ulaşılır. $l \neq 0$ için $r \to 0$ limitine bakalım.

$$\lim_{r \to 0} \frac{l(l+1)}{r^2} \to \infty, \quad \frac{2m}{\hbar^2}[E - V] \text{ terimi}$$

onun yanında ihmal edilebilir.

$r \to 0$ limitinde

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u(r) \approx 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümleri

$$u(r) = \text{sabit} \times r^{\ell+1} \quad , \quad u(r) = \text{Sabit} \times r^{-\ell}$$

$r \to 0$ limitinde $r^{-\ell} = \frac{1}{r^{\ell}} \to \infty$ olacağından

çözüm olamaz. Böyleyse $u(r) = \text{Sabit} \times r^{\ell+1}$ çözümdür.

$R(r) = \frac{u(r)}{r} \simeq \frac{r^{\ell+1}}{r} = r^{\ell}$ olur.

Özetlersek:

$r \to \infty \quad [r R(r)] \to 0$

$r \to 0 \quad \sim r^{\ell}$ olur. Bu aşamadan sonra

V potansiyelini seçip devam etmemiz gerekir.