

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SPLİT KUATERNİYONLARDA ÜSTEL,
LOGARİTMİK VE TRİGONOMETRİK
FONKSİYONLAR**

Hamide Feyza AYKUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Haziran, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYONLARDA ÜSTEL, LOGARİTMİK VE
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Hamide Feyza AYKUT tarafından hazırlanan tez çalışması 19.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Melek ERDOĞDU, Üye
Necmettin Erbakan Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Split Kuaterniyonlarda Üstel, Logaritmik ve Trigonometrik Fonksiyonlar başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Hamide Feyza AYKUT

İmza



Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile desteklenmiştir.

*Sevgi dolu canım anneme
ve babama ithafen*



TEŞEKKÜR

Öğrencilerine bilgi ve tecrübelerini büyük bir titizlik ile aktaran, bu çalışma boyunca özveri ile değerli vaktini ve desteğini benden esirgemeyerek özenle yol gösteren saygıdeğer ve kıymetli hocam **Prof. Dr. Salim YÜCE**'ye, hayatın meşakkatli yollarında verdiği tüm destek için canım **babama**, bir işin doğru ve güzel olması için sevgi ile yapılması gerektiğini öğreten canım **anneme** en içten teşekkürlerimi sunarım. Bunun yanında yüksek lisans sürem boyunca 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile tezimi destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkürü borç bilirim.

Hamide Feyza AYKUT

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Bulgular	3
2 SPLIT KUATERNİYONLAR	5
2.1 Split Kuaterniyonlar ve Karakterizasyonları	5
2.2 Split Kuaterniyonların Polar Formu ve Argümanı	20
3 SPLIT KUATERNİYONLARDA ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR	23
3.1 Split Kuaterniyonlarda Üstel Fonksiyon	23
3.2 Split Kuaterniyonlarda Logaritmik Fonksiyon	40
3.3 Split Kuaterniyonlarda Kuvvet Fonksiyonu	52
4 SPLIT KUATERNİYONLARDA TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR	54
4.1 Split Kuaterniyonlarda Trigonometrik Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlar	54
4.2 Split Kuaterniyonlarda Trigonometrik Sekant ve Kosekant Fonksiyonlar	81
4.3 Split Kuaterniyonlarda Trigonometrik Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonlar	83
5 SONUÇ	90
KAYNAKÇA	91
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	93

SİMGELİSTESİ

$\mathbb{R}_\nu^n$	ν –indeksli n –boyutlu Pseudo–Öklid Uzay
$S(p)$	p Split Kuaterniyonun Skaler Kısmı
$V(p)$	p Split Kuaterniyonun Vektörel Kısmı
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\text{sgn}(p)$	Normlanmış p Split Kuaterniyon
$\mathbf{p}$	Pure Split Kuaterniyon
$\mathbb{H}$	Reel Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\ln$	Split Kuaterniyonun Çok Değerli Logaritmik Fonksiyonu
$\bar{p}$	Split Kuaterniyonun Eşleniği
$\mathbb{H}_S$	Split Kuaterniyonlar Kümesi
Ln	Split Kuaterniyonun Tek Değerli Esas Logaritmik Fonksiyonu
$\exp$	Split Kuaterniyonun Üstel Fonksiyonu

Split Kuaterniyonlarda Üstel, Logaritmik ve Trigonometrik Fonksiyonlar

Hamide Feyza AYKUT

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Literatürde split kuaterniyonlar kümesi bazı kaynaklarda $(-, -, +, +)$ metriği ile bazı kaynaklarda ise $(+, +, -, -)$ metriği ile tanımlanmıştır. $(-, -, +, +)$ metriği ile tanımlanan split kuaterniyonlar üzerinde üstel ve logaritmik fonksiyonlar literatürde mevcut olup karakteristikleri ve özellikleri incelenmemiştir. Bu çalışmada split kuaterniyonlar kümesi $(+, +, -, -)$ metriği ile ele alınmıştır. Bu durumda pure split kuaterniyonlar kümesinin $\mathbb{R}_2^3$ uzayına $(+, -, -)$ metriği ile izomorf olduğu açıktır. Üstel ve logaritmik fonksiyonların tanımlarına ek olarak karakteristikleri ve özellikleri bu metrik ile tartışılmıştır. Ayrıca split kuaterniyonlarda trigonometrik fonksiyonlar tanımlanmış olup karakteristikleri ve özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Split kuaterniyonlar, üstel fonksiyon, logaritmik fonksiyon, trigonometrik fonksiyon.

ABSTRACT

Exponential, Logarithmic and Trigonometric Functions on Split Quaternions

Hamide Feyza AYKUT

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

In the literature, some studies define the set of split quaternions by metric $(-, -, +, +)$ where some others by metric $(+, +, -, -)$. Polar forms and exponential functions have already been defined over the set of split quaternions with the metric $(-, -, +, +)$. However, their characterization has not been discussed. In this study, we considered the set of split quaternions with the metric $(+, +, -, -)$. It is clear that the set of the vector part of them is isomorphic to $\mathbb{R}_2^3$ with the metric $(+, -, -)$. We discussed the properties and characterizations of the exponential and logarithmic function on split quaternions considering definition of the exponential function via this approach. Additionally, we defined trigonometric functions on split quaternions and discussed their properties and characterizations.

Keywords: Split quaternions, exponential function, logarithmic function, trigonometric function.

1.1 Literatür Özeti

Literatürde sıkça karşılaştığımız Öklid uzayların yanı sıra semi-Öklid (pseudo-Öklid) uzayları da merak konusudur. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}_\nu^n} = \sum_{r=1}^{n-\nu} x_r y_r - \sum_{r=n-\nu+1}^n x_r y_r$$

indefinite dejenere iç çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına ν indeksli *pseudo-Öklid* (*semi-Öklid*) *uzayı* denir ve $\mathbb{R}_\nu^n$ ile gösterilir. Semi- Öklid uzay ile ilgili [1–4] bakınız.

İrlandalı Matematikçi Sir William Rowan Hamilton 1843 yılında reel kuaterniyonlar olarak adlandırılan $ij = -ji = k, jk = i = -kj, ki = j = -ik$ olmak üzere

$$\mathbb{H} = \{p_0 + p_1i + p_2j + p_3k : p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1\} \quad (1.1)$$

değişmeli olmayan sıfır bölensiz birleşmeli bölüm cebrini keşfetmesiyle matematiğin ve mühendisliğin pek çok alanına ışık tuttu, [5]. Reel kuaterniyonlar $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k, q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}} = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

iç çarpımı ile birlikte $\mathbb{R}^4$ uzayına izomorftur. Bu nedenle $\mathbb{R}^4$ uzayında yapılan pek çok çalışmanın $\mathbb{H}$ uzayı için de geçerli olup olmadığı araştırılmıştır.

$ij = -ji = k, jk = -i = -kj, ki = j = -ik$ olmak üzere split kuterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}_S = \{p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k : p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}, i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1\} \quad (1.3)$$

şeklinde James Cockle tarafından 1849 yılında tanımlandı. $p_0 = 0$ iken p split kuaterniyonu *pure split kuaterniyon* olarak adlandırılır ve $\mathbf{p}$ ile gösterilir. Ayrıca her $p \in \mathbb{H}_S$ $p = p_0 + \mathbf{p}$ şeklinde yazılabilir. Reel kuaterniyonların aksine split kuaterniyonlar sıfır bölene sahiptir. Split kuaterniyonlar üzerinde tanımlı $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$, $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = \frac{1}{2}(p\bar{q} + \bar{p}q) = p_0q_0 + p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

iç çarpım ile birlikte indefinite dejenere bir iç çarpım uzayıdır. Split kuaterniyonların kümesi $(+, +, -, -)$ metriği ile $\mathbb{R}_2^4$ uzayına izomorftur. Ayrıca pure split kuaterniyonların kümesi de $(+, -, -)$ metriği ile $\mathbb{R}_2^3$ uzayına izomorftur. Literatürde bazı kaynaklarda split kuaterniyonlar üzerinde iç çarpım

$$\langle p, q \rangle = -p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

şeklinde $(-, -, +, +)$ metriği ile tanımlanmış olup bu tanım ile split kuaterniyonların kümesinin $\mathbb{R}_2^4$ uzayına, pure split kuaterniyonların kümesinin de $(-, +, +)$ metriği ile $\mathbb{R}_1^3$ uzayına izomorf olduğu gösterilmiştir, [6–9]. Bu çalışmada, split kuaterniyonlar $(+, +, -, -)$ ve pure split kuaterniyonları $(+, -, -)$ metriği ile ele alınacaktır.

$\mathbb{R}_2^3$ üzerinde vektörel çarpım

$$x \wedge_{\mathbb{R}_2^3} y = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlıdır, [2]. Bu vektörel çarpıma benzer olarak iki pure split kuaterniyonun vektörel çarpımı

$$\mathbf{p} \wedge_{\mathbb{H}_S} \mathbf{q} = \begin{vmatrix} i & -j & -k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_1q_3 - p_3q_1)j + (p_2q_1 - p_1q_2)k \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Split kuaterniyonlar üzerinde tanımlı olan iç çarpımın değeri tanımı gereği pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Bu durum ise split kuaterniyonları spacelike, timelike ve lightlike olarak üç tipte incelememize yol açar. Literatürde var olan reel kuaterniyonlar üzerine verilen tanımları split kuaterniyonlar için incelerken karakteristikleri de hesaba katılmaktadır.

Split kuaterniyonların cebirsel özellikleri, polar formları, De Moivre formülü ve geometrik uygulamalar ile ilgili literatürdeki bazı çalışmalar [6–13] ile verilmiştir. Split kuaterniyon matrisler için [12, 14–16] kaynaklarına bakınız. Aynı zamanda split kuaterniyonlarda diziler ve serilerle ilgili geniş bilgi [17] kaynağında yer almaktadır. Reel kuaterniyonlarda üstel, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonlar için [18] kaynağına bakınız.

$\forall p \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere split kuaterniyon değişkenli split kuaterniyon değerli üstel fonksiyon $(-, -, +, +)$ metriği ile

$$e^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \quad (1.8)$$

olacak şekilde reel kuaterniyonlara benzer olarak [8, 19, 20] kaynaklarında tanımlanmıştır. p split kuaterniyonunun $(-, -, +, +)$ metriği ile karakterizasyonu göz önünde bulundurularak e^p değeri skaler ve vektörel kısımları ile tekrar ifade edilmiştir. Detaylı bilgi için [8, 19, 20] kaynaklarına bakınız. Fakat split kuaterniyon değerli üstel fonksiyonların karakteristikleri incelenmemiştir. Split kuaterniyonlarda logaritmik fonksiyonlar çeşitli makalelerde kullanılmış olsa da karakteristikleri ile birlikte incelenmemiştir [10, 20]. Split kuaterniyonlarda trigonometrik fonksiyonlar hakkında çalışma bulunmamaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Gerekli araştırmalar sonucunda literatürde split kuaterniyon değişkenli ve split kuaterniyon değerli olan üstel ve logaritmik fonksiyonların karakteristiklerinin ve özelliklerinin irdelenmediği görülmüştür. Aynı zamanda split kuaterniyonlar üzerinde trigonometrik fonksiyonların tanımlanmadığı ve dolayısıyla özelliklerinin incelenmediği sonucuna varılmıştır. Bu tez ile literatürde var olan boşluğu gerekli tanımlamalar ve tartışmalar yaparak doldurmak ve yeni çalışmalara ışık tutmak hedeflenmiştir.

1.3 Bulgular

Split kuaterniyonların karakteristikleri ile toplamalarının karakteristikleri ele alınarak iç çarpımları incelendi, çeşitli eşitsizlikler ile bağlantı kuruldu. Literatürde tanımlanmış olan split kuaterniyonlarda üstel ve logaritmik fonksiyonların karakteristikleri ve özellikleri incelendi. Üstel ve logaritmik fonksiyonların karakteristikleri dikkate alınarak split kuaterniyonların kuvvet fonksiyonları reel kuaterniyonlara benzer olarak tanımlandı. Üstel fonksiyon yardımıyla

split kuaterniyonlarda sinüs, kosinüs, sekant, kosent, tanjant ve kotanjant fonksiyonları tarif edildi. Bu fonksiyonlar karakteristiklerine göre açılarak reel ve vektörel kısımlarına ayrıldı. Split kuaterniyonlarda trigonometrik fonksiyonların karakteristikleri incelendi ve reel trigonometrik fonksiyonların sağladığı temel özelliklerin sağlanıp sağlanmadığı araştırıldı.



2 SPLIT KUATERNİYONLAR

2.1 Split Kuaterniyonlar ve Karakterizasyonları

Bu bölümde, split kuaterniyonlar kümesi üzerinde temel işlemler ve iç çarpım verilmiştir. Sonrasında karakteristiği ve çarpma işleminin tersi tanımlanarak iki split kuaterniyonun çarpımının ve split kuaterniyonun çarpma işlemine göre tersinin karakteristiği incelenmiştir. Bölme işlemi ve norm tanımları da verilerek $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ split kuaterniyonların tiplerine göre bazı eşitsizlikler incelenmiştir. Split kuaterniyonlarda logaritmik fonksiyonun tanımlanmasına zemin hazırlamak için polar formlar verilmiş olup argümanları ele alınmıştır. Split kuaterniyonlar ile ilgili daha geniş bilgi [17, 21, 22] kaynaklarında yer almaktadır.

Tanım 2.1. $\forall p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$i^2 = -1, j^2 = 1, k^2 = 1 \quad (2.1)$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = -i, ki = -ik = j, i(jk) = (ij)k = 1 \quad (2.2)$$

olacak şekilde $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ şeklindeki kuaterniyona *split kuaterniyon* adı verilir ve split kuaterniyonların kümesi $\mathbb{H}_S$ ile gösterilir. $S(p) = p_0$ ve $V(p) = \mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k$ olmak üzere $p = S(p) + V(p)$ şeklinde yazılabilir ve $S(p)$ reel sayısına p split kuaterniyonunun *skaler kısmı*, $V(p) = \mathbf{p}$ split kuaterniyonuna ise p split kuaterniyonunun *vektörel kısmı* denir. $p_0 = 0$ iken $p = \mathbf{p}$ split kuaterniyonu *pure split kuaterniyon* olarak adlandırılır.

$p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k, q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_S$ ve $z = z_0 + z_1i \in \mathbb{C}$ olsun.

- *İki split kuaterniyonun toplamı*

$$p + q = p_0 + q_0 + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \quad (2.3)$$

şeklinde dir.

- *Split kuaterniyonun eşleniği*

$$\bar{p} = p_0 - \mathbf{p} = p_0 - p_1i - p_2j - p_3k \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlıdır ve $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$, $\overline{pq} = \bar{q} \bar{p}$, $\overline{pp} = p\bar{p}$ özelliklerini sağlar.

- *İki split kuaterniyonun çarpımı*

$$\begin{aligned} pq = & p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)i \\ & + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)j + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)k \end{aligned}$$

şeklinde olup değişmeli değildir. Ayrıca iki split kuaterniyonun çarpımı

$$pq = S(p)S(q) - \langle V(p), V(q) \rangle_{\mathbb{R}_2^3} + S(p)V(q) + S(q)V(p) - V(p) \wedge_{\mathbb{R}_2^3} V(q) \quad (2.5)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

- *Kompleks sayı ile split kuaterniyonun çarpımı*

$$zq = z_0p_0 - z_1p_1 + (z_0p_1 + z_1p_0)i + (z_0p_2 - z_1p_3)j + (z_0p_3 + z_1p_2)k \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlıdır.

- *Split kuaterniyonlar üzerinde*

$$\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = \frac{1}{2}(p\bar{q} + q\bar{p}) = p_0q_0 + p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon reel değerli indefinite iç çarpımdır.

- *Pure split kuaterniyonlar üzerinde vektörel çarpım*

$$\mathbf{p} \wedge_{\mathbb{H}_S} \mathbf{q} = \begin{vmatrix} i & -j & -k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_1q_3 - p_3q_1)j + (p_2q_1 - p_1q_2)k \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Split kuaterniyonlarda iç çarpım fonksiyonu indefinite olduğundan $\langle p, p \rangle > 0$, $\langle p, p \rangle < 0$ ve $\langle p, p \rangle = 0$ olabilir. Split kuaterniyonların bu iç çarpıma bağlı olarak karakterizasyonları literatürde yer almaktadır, [7, 8, 11, 12, 20].

Tanım 2.2. $\forall p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere *split kuaterniyonun karakteristik fonksiyonu*

$$I_p = \langle p, p \rangle = p\bar{p} = p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlı olup

- $I_p > 0$ veya $p = 0$ ise p split kuaterniyonu *spacelike(sl)*,
- $I_p < 0$ ise p split kuaterniyonu *timelike(tl)*,
- $I_p = 0$ ise p split kuaterniyonu *null* veya *lightlike(ll)*

olarak adlandırılır.

Split kuaterniyonların karakteristikleri incelendiğinde literatürde var olan ve split kuaterniyonlarda fonksiyonları tanımlarken sıkça kullanılan aşağıdaki teoremler ve sonuç verilir:

Teorem 2.1. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere p spacelike split kuaterniyonun $\mathbf{p}$ vektörel kısmı spacelike, timelike ve lightlike olabilir.

İspat. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p spacelike ise $I_p = p_0^2 + I_{\mathbf{p}} > 0$ olup

$$p_0^2 > -I_{\mathbf{p}} \quad (2.10)$$

elde edilir. Öyleyse $I_{\mathbf{p}} > 0$, $I_{\mathbf{p}} < 0$ ve $I_{\mathbf{p}} = 0$ olabilir ve dolayısıyla

- $\mathbf{p}$ spacelike,
- $\mathbf{p}$ timelike,
- $\mathbf{p}$ lightlike

olabilir. ■

Sonuç 2.1. p spacelike split kuaterniyon iken $\mathbf{p}$ lightlike ise $p_0 \neq 0$ şeklindedir.

Teorem 2.2. $\forall p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere p timelike split kuaterniyon ise $\mathbf{p}$ vektörel kısmı sadece timelike olabilir.

İspat. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p timelike ise $I_p = p_0^2 + I_{\mathbf{p}} < 0$ olup

$$0 \leq p_0^2 < -I_{\mathbf{p}} \quad (2.11)$$

olduğundan $I_{\mathbf{p}} < 0$ elde edilir. Yani $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyondur. ■

Teorem 2.3. $\forall p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere p lightlike split kuaterniyon olsun. O halde

1. $p_0 \neq 0$ ise $\mathbf{p}$ timelike,
2. $p_0 = 0$ ise $\mathbf{p}$ lightlike

split kuaterniyondur.

İspat. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p lightlike iken $I_p = p_0^2 + I_{\mathbf{p}} = 0$ olduğundan

$$0 \leq p_0^2 = -I_{\mathbf{p}} \quad (2.12)$$

elde edilir. O zaman

1. $p_0 = 0$ ise $I_{\mathbf{p}} = 0$ olup $\mathbf{p}$ lightlike,
2. $p_0 \neq 0$ ise $I_{\mathbf{p}} < 0$ olup $\mathbf{p}$ timelike

split kuaterniyondur. ■

Uyarı. Spacelike, timelike ve lightlike olmak üzere üç tip split kuaterniyon vardır. Her split kuaterniyon skaler ve vektörel kısımdan oluşur. Split kuaterniyonların vektörel kısımları da birer split kuaterniyon olduğundan üç farklı tipte olmaları mümkündür. $p = p_0 + \mathbf{p}$ olmak üzere Teorem 2.1, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 sayesinde p split kuaterniyonunu ile $\mathbf{p}$ pure split kuaterniyonunun karakteristiklerinin birbirinden bağımsız olmadığını gördük. Vektörel kısmı ile birlikte bir split kuaterniyonu incelediğimizde altı tip split kuaterniyonun var olduğu sonucuna varılır.

Notasyon. $p = p_0 + \mathbf{p}$ olmak üzere p split kuaterniyonunun karakteristiğini vektörel kısmının karakteristiği ile birlikte kısaca göstermemiz gerektiğinde

- p ve $\mathbf{p}$ spacelike ise $(p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$,
- p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$,
- p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike ise $(p, \mathbf{p}) = (sl, ll)$,
- p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise $(p, \mathbf{p}) = (tl, tl)$,
- p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike ise $(p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$,
- p lightlike ve $\mathbf{p}$ lightlike ise $(p, \mathbf{p}) = (ll, ll)$

şeklinde göstereceğiz.

Split kuaterniyonların karakteristikleri belirli olmadığında fonksiyonlar altındaki görüntülerini incelemek zorlaşır. Örneğin, $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{r}$ lightlike iken $\mathbf{p}^2 = -\|\mathbf{p}\|^2$, $\mathbf{q}^2 = \|\mathbf{q}\|^2$ ve $\mathbf{r}^2 = 0$ elde edilir. Bu sebeple fonksiyonları ve özelliklerini ele almamız için iki split kuaterniyonun çarpımının karakteristiğini bilmek gereklidir:

Teorem 2.4. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p ve q spacelike ise pq spacelike,
2. p spacelike ve q timelike ise pq timelike,
3. p spacelike ve q lightlike ise pq lightlike,
4. p timelike ve q spacelike ise pq timelike,
5. p ve q timelike ise pq spacelike,
6. p timelike ve q lightlike ise pq lightlike,
7. p lightlike ve q spacelike ise pq lightlike,
8. p lightlike ve q timelike ise pq lightlike,
9. p ve q lightlike ise pq lightlike

split kuaterniyondur.

İspat. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

$$I_{pq} = (pq)(\overline{pq}) = (pq)(\overline{q}\overline{p}) = p(q\overline{q})\overline{p} = pI_q\overline{p} = I_qI_p \quad (2.13)$$

olduğundan

1. $I_q > 0$ ve $I_p > 0$ iken $I_{pq} > 0$ olup pq spacelike,
2. $I_q > 0$ ve $I_p < 0$ iken $I_{pq} < 0$ olup pq timelike,
3. $I_q < 0$ ve $I_p < 0$ iken $I_{pq} > 0$ olup pq spacelike,
4. $I_q = 0$ veya $I_p = 0$ iken $I_{pq} = 0$ olup pq lightlike

split kuaterniyondur. $I_{pq} = I_qI_p = I_pI_q = I_{qp}$ olduğundan tekrar eden durumlar tek seferde incelenmiştir. ■

Örnek. 2.1. $p = 1 + i + j + k$ ve $q = 2 + i + k$ olsun. pq çarpımının karakteristiğini araştırınız.

Çözüm. $I_p = 1^2 + 1^2 - 1^2 - 1^2 = 0$ olduğundan p lightlike ve $I_q = 2^2 + 1^2 - 1^2 = 4$ olduğundan q spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} pq &= (1 + i + j + k)(2 + i + k) = 2 + i + k + 2i - 1 - j + 2j - k - i + 2k + j + 1 \\ &= 2 + 2i + 2j + 2k \end{aligned}$$

olup $I_{pq} = 2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2 = 0$ elde edilir. Böylece pq split kuaterniyonunun lightlike olduğu görülür.

Örnek. 2.2. $p = 1 + i + j + 2k$ ve $q = 2 + i + k$ olsun. pq çarpımının karakteristiğini araştırınız.

Çözüm. $I_p = 1^2 + 1^2 - 1^2 - 2^2 = -3$ olduğundan p timelike ve $I_q = 2^2 + 1^2 - 1^2 = 4$ olduğundan q spacelike split kuaterniyondur.

$$pq = (1 + i + j + 2k)(2 + i + k) = 3 + 2i + 3j + 4k$$

olup $I_{pq} = 3^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 = -12$ elde edilir. Böylece pq split kuaterniyonunun timelike olduğu görülür.

Tanım 2.3. p lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere p split kuaterniyonunun çarpma işlemine göre tersi $p^{-1} = \frac{\overline{p}}{I_p}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.5. p lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere

1. p spacelike iken p^{-1} spacelike,
2. p timelike iken p^{-1} timelike

split kuaterniyondur.

İspat. $0 \neq p \in \mathbb{H}_S$ ve lightlike olmayan bir split kuaterniyon olmak üzere

$$I_{p^{-1}} = p^{-1} \overline{p^{-1}} = \frac{\bar{p}}{I_p} \frac{\bar{\bar{p}}}{I_p} = \frac{\bar{p}p}{(I_p)^2} = \frac{1}{I_p} = (I_p)^{-1} \quad (2.14)$$

olup

1. p spacelike iken p^{-1} spacelike,
2. p timelike iken p^{-1} timelike

split kuaterniyondur. ■

Split kuaterniyonlarda çarpma işlemi değişme özelliğini sağlamadığından split kuaterniyonlarda bölme işlemi sağdan ve soldan bölme olarak iki şekilde tarif edilir:

Tanım 2.4. $p, q \in \mathbb{H}_S$ ve q lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere *split kuaterniyonlarda sağdan bölme*

$$pq^{-1} = \frac{p\bar{q}}{I_q} \quad (2.15)$$

ve *split kuaterniyonlarda soldan bölme*

$$q^{-1}p = \frac{\bar{q}p}{I_q} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlıdır.

Not. Bu çalışma boyunca, soldan bölme işlemi kullanılacaktır.

Tanım 2.5. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonunun *normu*

$$\|p\| = \sqrt{|I_p|} \quad (2.17)$$

ile tanımlanır.

Not. $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. $\bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}$ olduğundan

- $\mathbf{p}$ spacelike iken $\|\mathbf{p}\|^2 = -\mathbf{p}^2$,
- $\mathbf{p}$ timelike iken $\|\mathbf{p}\|^2 = \mathbf{p}^2$,
- $\mathbf{p}$ lightlike iken $\|\mathbf{p}\|^2 = 0$.

İki split kuaterniyonun ve toplamlarının karakteristikleri ele alınarak normlarının kareleri ile ilgili aşağıdaki durumlar orijinal olarak elde edilmiştir:

Teorem 2.6. $\forall \mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k, \mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike iken

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$.

2. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ spacelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ olup

- $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$,
- $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$,
- $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$

olabilir.

3. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ spacelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ olup

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = 0 \quad (2.18)$$

sağlanır.

4. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ olup

- $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

olabilir.

5. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *timelike* iken

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

6. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ *timelike* ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *lightlike* ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ olup

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = 0 \quad (2.19)$$

sağlanır.

7. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ *lightlike* ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *spacelike* ise $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}$ olup

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 0 \quad (2.20)$$

sağlanır.

8. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ *lightlike* ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *timelike* ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ olup

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 0 \quad (2.21)$$

sağlanır.

9. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *lightlike* ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ olup

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = 0 \quad (2.22)$$

sağlanır.

10. $\mathbf{p}$ *spacelike*, $\mathbf{q}$ *timelike* ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *spacelike* iken

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

11. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike iken

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

12. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike iken

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 < 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 > 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 = 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

13. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike iken

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

14. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike iken

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

15. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ olup

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 \quad (2.23)$$

sağlanır.

16. $\mathbf{p}$ timelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ olup

$$\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 \quad (2.24)$$

sağlanır.

17. $\mathbf{p}$ timelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ sağlanır.

18. $\mathbf{p}$ timelike, $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike ise $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ olup

$$\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 \quad (2.25)$$

sağlanır.

İspat. $\forall \mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k, \mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |(p_1 + q_1)^2 - (p_2 + q_2)^2 - (p_3 + q_3)^2| \\ &= |p_1^2 + q_1^2 + 2p_1q_1 - p_2^2 - q_2^2 - 2p_2q_2 - p_3^2 - q_3^2 - 2p_3q_3| \\ &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2(p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)| \\ &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \end{aligned}$$

yazılabilir.

1. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike iken

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

olup

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

elde edilir.

2. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ spacelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike ise

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= -I_{\mathbf{p}} - I_{\mathbf{q}} - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= -\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

olup $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ olduğu görülür ve

- $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$,
- $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$,

- $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$

olabilir.

3. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ spacelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike ise

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$$

yazılır. $|\mathbf{p}|^2 > 0$ ve $|\mathbf{q}|^2 > 0$ olduğundan $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ elde edilir ve

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = 0 \quad (2.26)$$

olduğu görülür.

4. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike ise

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= -\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

olduğundan $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ olup

- $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

olabilir.

5. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike ise

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= -I_{\mathbf{p}} - I_{\mathbf{q}} - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

olup

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

6. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike ise

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| = | - \|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} | = 0$$

ve $\|\mathbf{p}\|^2, \|\mathbf{q}\|^2 > 0$ olduğundan $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ olup

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir.

7. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike ise

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

elde edilir. $\|\mathbf{p}\|^2 = 0$ ve $\|\mathbf{q}\|^2 = 0$ olduğundan $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ve

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 \quad (2.28)$$

sağlanır.

8. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike ise

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= -I_{\mathbf{p}} - I_{\mathbf{q}} - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= -2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

elde edilir. $\|\mathbf{p}\|^2 = 0$ ve $\|\mathbf{q}\|^2 = 0$ olup $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ve

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 \quad (2.29)$$

sağlanır.

9. $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike ise

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= |2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ve $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$ sağlanır.

10. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike iken

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

olup

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

11. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike iken

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= -I_{\mathbf{p}} - I_{\mathbf{q}} - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= -\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \end{aligned}$$

olup

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

12. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ timelike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike iken

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0 \end{aligned}$$

olup

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 < 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 > 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 = 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

bulunur.

13. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike ise

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}\end{aligned}$$

olup

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

elde edilir.

14. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ timelike ise

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= -I_{\mathbf{p}} - I_{\mathbf{q}} - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= -\|\mathbf{p}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}\end{aligned}$$

olup

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$,
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$

sağlanır.

15. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ lightlike ise

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 = |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| = |\|\mathbf{p}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| = 0$$

olduğundan $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ olup

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 > 0 = \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 \quad (2.30)$$

elde edilir.

16. $\mathbf{p}$ timelike, $\mathbf{q}$ lightlike ve $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ spacelike ise

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 &= |I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}| \\ &= I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{q}} + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &= -\|\mathbf{p}\|^2 + 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}\end{aligned}$$

olduğundan $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ olup

$$\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 \quad (2.31)$$

sağlanır.

■

Örnek. 2.3. $\mathbf{p} = 3i + j$, $\mathbf{q} = j + k$ ve $\mathbf{r} = i + j$ olsun. Teorem 2.6 ile verilen ifadenin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. $I_p = 9 - 1 = 8$ olup p spacelike, $I_q = -1 - 1 = -2$ olup q timelike ve $I_r = 1 - 1 = 0$ olup r lightlike olarak elde edilir.

- $p + q = 3i + 2j + k$ ve $I_{p+q} = 3^2 - 2^2 - 1^2 = 4$ olup $p + q$ spacelike ve $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = -1 < 0$ olduğundan $\|\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{q}\|^2 > \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$ olması beklenir. Gerçekten, $8 - 2 = 6 > 4$ olduğu görülür.
- $\mathbf{q} + \mathbf{r} = i + 2j + k$ ve $I_{q+r} = 1^2 - 2^2 - 1^2 = -4$ olup $\mathbf{q} + \mathbf{r}$ timelike olup $\langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{H}_S} = -1 < 0$ sağlanır.
- $\mathbf{p} + \mathbf{r} = 4i + 2j$ ve $I_{p+r} = 4^2 - 2^2 = 12$ olup $\mathbf{p} + \mathbf{r}$ spacelike ve $\langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 2 > 0$ olduğundan $\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 < \|\mathbf{p} + \mathbf{r}\|^2$ olması beklenir. Gerçekten, $8 + 0 < 12$ olduğu görülür.

2.2 Split Kuaterniyonların Polar Formu ve Argümanı

Literatürde split kuaterniyonların polar formu $(-, -, +, +)$ metriği ile verilmiştir, [6–8, 11, 13]. Split kuaterniyonların karakterizasyonu metriklerle ilişkili olarak adlandırıldığından literatürde var olan çalışmalar kullanılırken bu durum göz önüne alınmıştır.

Teorem 2.7. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p ve $\mathbf{p}$ spacelike ise

$$p = \|p\|(\cos \alpha + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \alpha) \quad (2.32)$$

şeklinde yazılır. Burada $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}}$, $\cos \alpha = \frac{p_0}{\|p\|}$ ve $\sin \alpha = \frac{\sqrt{p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}}{\|p\|}$ şeklindedir, [6–8, 11, 13].

Örnek. 2.4. $p = 3 + 2i + j - k$ split kuaterniyonunu kutupsal formda yazınız.

Çözüm. $I_p = 3^2 + 2^2 - 1^2 - 1^2 = 11$ olup p spacelike ve $I_{\mathbf{p}} = 2^2 - 1^2 - 1^2 = 2$ olup $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyondur.

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{11}} \text{ ve } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \quad (2.33)$$

olup $\alpha = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{11}}$ elde edilir. Böylece

$$p = \sqrt{11} \left(\cos \alpha + \frac{2i + j - k}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) \quad (2.34)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.6. $\alpha = \cos^{-1} \frac{p_0}{\|p\|}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının periyodu $2\pi n$ olduğundan $\mathbf{p}$ spacelike iken p spacelike split kuaterniyonunun argümanı

$$\arg(p) := \{\alpha + 2\pi n : 0 \leq \alpha \leq \pi, n \in \mathbb{N}\} \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanır. p split kuaterniyonunun argümanı çok değerli bir fonksiyondur. Burada $n = 0$ için tek bir değer elde edilir. Bu değer esas argüman olarak adlandırılır ve $\text{Arg}(p) = \alpha$ ile gösterilir.

Teorem 2.8. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise

$$p = \|p\| (\cosh \beta + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \beta) \quad (2.36)$$

şeklinde yazılır. Burada $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$, $\cosh \beta = \frac{|p_0|}{\|p\|}$ ve $\sinh \beta = \frac{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{\|p\|}$ şeklindedir, [6–8, 11, 13].

Tanım 2.7. $\beta = \cosh^{-1} \frac{|p_0|}{\|p\|}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \mathbb{C}$ olmak üzere kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının periyodu $2\pi ni$ olduğundan $\mathbf{p}$ timelike iken p spacelike split kuaterniyonunun argümanı

$$\arg(p) := \{\beta + 2\pi ni : 0 \leq \beta \leq \pi, n \in \mathbb{N}\} \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanır. p split kuaterniyonunun argümanı çok değerli bir fonksiyondur. Burada $n = 0$ için tek bir değer elde edilir. Bu değer esas argüman olarak adlandırılır ve $\text{Arg}(p) = \beta$ ile gösterilir.

Teorem 2.9. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike ise $\frac{p}{\|p\|}$ birim spacelike ve $\|p\| = \|p_0\|$ olup

$$p = \|p\| \left(1 + \frac{\mathbf{p}}{\|p\|} \right) = \|p_0\| \left(1 + \frac{\mathbf{p}}{\|p_0\|} \right) \quad (2.38)$$

şeklindedir, [6–8, 11, 13].

Teorem 2.10. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p ve $\mathbf{p}$ timelike ise

$$p = \|p\|(\sinh \gamma + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cosh \gamma) \quad (2.39)$$

şeklinde yazılır. Burada $\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$, $\sinh \gamma = \frac{p_0}{\|p\|}$ ve $\cosh \gamma = \frac{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{\|p\|}$ şeklindedir, [6–8, 11, 13].

Tanım 2.8. $\gamma = \sinh^{-1} \frac{\|\mathbf{p}\|}{\|p\|}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ ve $i \in \mathbb{C}$ olmak üzere kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının periyodu $2\pi ni$ olduğundan p timelike split kuaterniyonunun argümanı

$$\arg(p) := \{\gamma + 2\pi ni : 0 \leq \gamma \leq \pi, n \in \mathbb{N}\} \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlanır. p split kuaterniyonunun argümanı çok değerli bir fonksiyondur. Burada $n = 0$ için tek bir değer elde edilir. Bu değer esas argüman olarak adlandırılır ve $\operatorname{Arg}(p) = \gamma$ ile gösterilir.

Teorem 2.11. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike ise

$$p^n = \|p\|^n (\cos n\alpha + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sin n\alpha), \quad (2.41)$$

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise

$$p^n = \|p\|^n (\cosh n\beta + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh n\beta), \quad (2.42)$$

3. p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike ise

$$p^n = \|p_0\|^n \left(1 + \frac{n\mathbf{p}}{\|p_0\|} \right), \quad (2.43)$$

4. p ve $\mathbf{p}$ timelike ise $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$p^n = \begin{cases} \|p\|^n (\sinh n\gamma + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cosh n\gamma), & n = 2k + 1 \\ \|p\|^n (\cosh n\gamma + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh n\gamma), & n = 2k \end{cases} \quad (2.44)$$

şeklindedir, [6, 11].

3

SPLIT KUATERNİYONLARDA ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

3.1 Split Kuaterniyonlarda Üstel Fonksiyon

Literatürde $(-, -, +, +)$ metriği ile ele alınan split kuaterniyonlarda üstel fonksiyon pure split kuaterniyonlar için tanımlanmış olup split kuaterniyonlara genişletilmiştir, [19, 20]. Bu bölümde split kuaterniyonlarda üstel fonksiyon $(+, +, -, -)$ ve pure split kuaterniyon $(+, -, -)$ metriği ile ele alınarak ifade edilmiştir.

Tanım 3.1. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere *split kuaterniyon değişkenli split kuaterniyon değerli üstel fonksiyon*

$$e^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlıdır, [19, 20].

Teorem 3.1. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ olsun. $pq = qp$ iken $e^p e^q = e^{p+q}$ sağlanır.

İspat. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $pq = qp$ iken binom açılımı yapılabilir, [23].

$$\begin{aligned} e^{p+q} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+q)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{p^k}{k!} \frac{q^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} \right) = e^p e^q \end{aligned}$$



Sonuç 3.1. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ olsun. $pq = qp$ iken

$$e^p e^q = e^{p+q} = e^{q+p} = e^q e^p$$

olduğundan $e^p e^q = e^q e^p$ sağlanır.

$p_0 \mathbf{p} = \mathbf{p} p_0$ olduğundan literatürde üstel fonksiyonları ifade ederken kullanılan eşitlik aşağıdaki sonuç ile verilebilir:

Sonuç 3.2. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$e^p = e^{p_0} e^{\mathbf{p}}. \quad (3.2)$$

Literatürde p split kuaterniyonunun $(-, -, +, +)$ metriği ile karakterizasyonu ele alınarak e^p değeri skaler ve vektörel kısımları ile ifade edilmiştir, [19, 20]. Benzer şekilde, p split kuaterniyonunun $(+, +, -, -)$ metriği ile karakterizasyonu ele alındığında aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 3.2. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ ve $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ olsun.

1. p spacelike ve $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0} (\cos \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|), \quad (3.3)$$

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0} (\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|), \quad (3.4)$$

3. p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0} (1 + \mathbf{p}), \quad (3.5)$$

4. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0} (\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|), \quad (3.6)$$

5. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0} (\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|), \quad (3.7)$$

6. p lightlike ve $\mathbf{p}$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^{\mathbf{p}} = 1 + \mathbf{p} \quad (3.8)$$

şeklindedir.

İspat. $e^{\mathbf{p}} = e^{p_0} e^{\mathbf{p}}$ şeklinde yazılabildiğinden $\mathbf{p}$ split kuaterniyonunun karakteristiğine bağlı olarak $e^{\mathbf{p}}$ seri açılımını inceleyerek $e^{\mathbf{p}}$ split kuaterniyonunu ifade edebiliriz:

1. $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyon olsun. $\bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}$ olduğundan

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}\mathbf{p} = -\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} = -I_{\mathbf{p}} \quad (3.9)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{|I_{\mathbf{p}}|}$ olup $\mathbf{p}$ spacelike olduğundan $\|\mathbf{p}\|^2 = |I_{\mathbf{p}}| = I_{\mathbf{p}}$ yazılabilir. Ayrıca $\mathbf{p}^2 = -\|\mathbf{p}\|^2$, $\mathbf{p}^3 = -\|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{p}$, $\mathbf{p}^4 = \|\mathbf{p}\|^4, \dots$ olup

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{p}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{p}^n}{n!} = 1 + \mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}^2}{2!} + \frac{\mathbf{p}^3}{3!} + \frac{\mathbf{p}^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \mathbf{p} - \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2!} - \frac{\|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{p}}{3!} + \frac{\|\mathbf{p}\|^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2!} + \dots + \mathbf{p} \left(1 - \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{3!} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left(\|\mathbf{p}\| - \frac{\|\mathbf{p}\|^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\|\mathbf{p}\|^{2n}}{(2n)!} + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\|\mathbf{p}\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \|\mathbf{p}\| \\ &= \cos \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olsun. $\bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}$ olduğundan

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}\mathbf{p} = -\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} = -I_{\mathbf{p}} \quad (3.10)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{|I_{\mathbf{p}}|}$ olup $\mathbf{p}$ timelike olduğundan $\|\mathbf{p}\|^2 = |I_{\mathbf{p}}| = -I_{\mathbf{p}}$ yazılabilir. Ayrıca $\mathbf{p}^2 = \|\mathbf{p}\|^2$, $\mathbf{p}^3 = \|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{p}$, $\mathbf{p}^4 = \|\mathbf{p}\|^4, \dots$ olup

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{p}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{p}^n}{n!} = 1 + \mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}^2}{2!} + \frac{\mathbf{p}^3}{3!} + \frac{\mathbf{p}^4}{4!} + \dots \\
&= 1 + \mathbf{p} + \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2!} + \frac{\|\mathbf{p}\|^2 \mathbf{p}}{3!} + \frac{\|\mathbf{p}\|^4}{4!} + \dots \\
&= 1 + \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2!} + \dots + \mathbf{p} \left(1 + \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{3!} + \dots \right) \\
&= 1 + \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left(\|\mathbf{p}\| + \frac{\|\mathbf{p}\|^3}{3!} + \dots \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\mathbf{p}\|^{2n}}{(2n)!} + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\mathbf{p}\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \\
&= \cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\mathbf{p}$ lightlike split kuaterniyon olsun. $\bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}$ ve $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}\mathbf{p} = -\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} = -I_{\mathbf{p}} = 0$ olduğundan

$$e^{\mathbf{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{p}^n}{n!} = 1 + \mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}^2}{2!} + \frac{\mathbf{p}^3}{3!} + \frac{\mathbf{p}^4}{4!} + \dots = 1 + \mathbf{p}$$

elde edilir, [19, 20].

■

Şimdi, e^p fonksiyonu için aşağıdaki orijinal teoremi verelim:

Teorem 3.3. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olsun.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike ise e^p spacelike ve $\|\mathbf{p}\| = n\pi$ iken $V(e^p)$ lightlike, $\|\mathbf{p}\| \neq n\pi$ iken $V(e^p)$ spacelike,
2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise e^p spacelike ve $V(e^p)$ timelike,
3. p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike ise e^p spacelike ve $V(e^p)$ lightlike,
4. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise e^p spacelike ve $V(e^p)$ timelike,
5. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike ise e^p spacelike ve $V(e^p)$ timelike,
6. p lightlike ve $\mathbf{p}$ lightlike ise e^p spacelike ve $V(e^p)$ lightlike.

İspat. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p spacelike ve $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyon olsun.

$$e^p = e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|) \quad (3.11)$$

ve $\mathbf{p}^2 = -\|\mathbf{p}\|^2$ olup $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_{e^p} &= [e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|)] [e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| - \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|)] \\ &= e^{2p_0} \left[\cos^2 \|\mathbf{p}\| - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}^2\|} \sin^2 \|\mathbf{p}\| \right] \\ &= e^{2p_0} [\cos^2 \|\mathbf{p}\| + \sin^2 \|\mathbf{p}\|] \\ &= e^{2p_0} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e^p spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(e^p)} &= [e^{p_0} \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|] [-e^{p_0} \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|] \\ &= -e^{2p_0} \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}^2\|} \sin^2 \|\mathbf{p}\| \\ &= e^{2p_0} \sin^2 \|\mathbf{p}\| \geq 0 \end{aligned}$$

olup $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere $\|\mathbf{p}\| = n\pi$ iken $V(e^p)$ lightlike, $\|\mathbf{p}\| \neq n\pi$ iken $V(e^p)$ spacelike split kuaterniyondur.

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olsun.

$$e^p = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.12)$$

ve $\mathbf{p}^2 = \|\mathbf{p}\|^2$ olup $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_{e^p} &= e^{2p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|)(\cosh \|\mathbf{p}\| - \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{2p_0} [\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 \|\mathbf{p}\|] \\ &= e^{2p_0} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e^p spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(e^p)} &= [e^{p_0} \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|] [-e^{p_0} \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|] \\ &= -e^{2p_0} \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}^2\|} \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

yazılabilir. $\sinh^2 \|\mathbf{p}\| = \frac{1}{2} \cosh 2\|\mathbf{p}\| - \frac{1}{2} = 0$ olması için gerek ve

yeter şart $\cosh 2\|\mathbf{p}\| = 1$ olması, yani $\|\mathbf{p}\| = 0$ olmasıdır. $\mathbf{p}$ timelike olduğundan $\|\mathbf{p}\| \neq 0$ olup $\sinh^2 \|\mathbf{p}\| \neq 0$ ve pozitif olup $V(e^p)$ timelike split kuaterniyondur.

3. p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0}(1 + \mathbf{p}) \quad (3.13)$$

ve $\mathbf{p}^2 = 0$ olup

$$\begin{aligned} I_{e^p} &= e^{2p_0}(1 + \mathbf{p})(1 - \mathbf{p}) \\ &= e^{2p_0}(1 - \mathbf{p}^2) \\ &= e^{2p_0} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e^p spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(e^p)} &= [e^{p_0}\mathbf{p}][-e^{p_0}\mathbf{p}] \\ &= -e^{2p_0}\mathbf{p}^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $V(e^p)$ lightlike split kuaterniyondur.

4. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.14)$$

ve $\mathbf{p}^2 = \|\mathbf{p}\|^2$ olup $(\operatorname{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_{e^p} &= e^{2p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|)(\cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{2p_0} [\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 \|\mathbf{p}\|] \\ &= e^{2p_0} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e^p spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(e^p)} &= [e^{p_0} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|][-e^{p_0} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|] \\ &= -e^{2p_0} \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}^2\|} \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

olup $V(e^p)$ timelike split kuaterniyondur.

5. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = e^{p_0} (\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.15)$$

ve $\mathbf{p}^2 = \|\mathbf{p}\|^2$ olup $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_{e^p} &= e^{2p_0} (\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) (\cosh \|\mathbf{p}\| - \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{2p_0} [\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 \|\mathbf{p}\|] \\ &= e^{2p_0} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e^p spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(e^p)} &= [e^{p_0} \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|] [-e^{p_0} \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|] \\ &= -e^{2p_0} \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}^2\|} \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

olup $V(e^p)$ timelike split kuaterniyondur.

6. p lightlike ve $\mathbf{p}$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere

$$e^p = 1 + \mathbf{p} \quad (3.16)$$

ve $\mathbf{p}^2 = 0$ olup

$$\begin{aligned} I_{e^p} &= (1 + \mathbf{p})(1 - \mathbf{p}) \\ &= 1 - \mathbf{p}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e^p spacelike split kuaterniyondur.

$$I_{V(e^p)} = \mathbf{p}(-\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 = 0$$

olup $V(e^p)$ lightlike split kuaterniyondur.

■

Şimdi, üstel fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.3. *Split kuaterniyonlarda üstel fonksiyonun tanım kümesi*

$$D(\exp) = \mathbb{H}_S \quad (3.17)$$

ve görüntü kümesi

$$R(\exp) = \{q = q_0 + \mathbf{q} : I_q > 0\} \quad (3.18)$$

şeklindedir.

Örnek. 3.1. $p = 2 + i + j + k$ olsun. $I_p = 2^2 + 1^2 - 1^2 - 1^2 = 3$ olup p spacelike ve

$I_{\mathbf{p}} = 1^2 - 1^2 - 1^2 = -1$ olup $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyondur. Ayrıca $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{|I_{\mathbf{p}}|} = \sqrt{|-1|} = 1$ elde edilir. O zaman

$$e^p = e^2(\cosh 1 + (i + j + k) \sinh 1) \approx 11,36 + 8,63i + 8,63j + 8,63k$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} I_{e^p} &\approx (11,36 + 8,63i + 8,63j + 8,63k)(11,36 - 8,63i - 8,63j - 8,63k) \\ &\approx (11,36)^2 + (8,63)^2 - (8,63)^2 - (8,63)^2 \\ &\approx 54,57 > 0 \end{aligned}$$

olup buradan e^p split kuaterniyonunun spacelike

$$\begin{aligned} I_{V(e^p)} &\approx (8,63i + 8,63j + 8,63k)(-8,63i - 8,63j - 8,63k) \\ &\approx (8,63)^2 - (8,63)^2 - (8,63)^2 \\ &\approx -74,47 < 0 \end{aligned}$$

olup $V(e^p)$ split kuaterniyonunun timelike olduğu görülür.

Örnek. 3.2. $I_i = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$ olup i spacelike split kuaterniyondur. Ayrıca $|i| = 1$ olduğundan

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1 \quad (3.19)$$

yazılabilir.

Literatürde var olan split kuaterniyonlarda üstel fonksiyonun özellikleri reel kuaterniyonlardaki üstel fonksiyon özelliklerine paralel olarak aşağıdaki teoremden derlenmiştir ve ispat edilmiştir, [19, 20]:

Teorem 3.4. $\forall p = p_0 + \mathbf{p}, q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1. $\overline{e^p} = e^{\bar{p}}$,
2. $e^p \neq 0_{\mathbb{H}_S}$,
3. $e^{-p}e^p = 1_{\mathbb{H}_S}$,
4. $\|e^p\| = e^{p_0}$.

İspat. 1. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

(a) p ve $\mathbf{p}$ spacelike olsun.

$$\overline{e^p} = e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| - \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|) \quad (3.20)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{\bar{p}} &= \overline{e^{p_0 + \mathbf{p}}} = e^{p_0 - \mathbf{p}} = e^{p_0}(\cos \|\mathbf{-p}\| + \text{sgn}(\mathbf{-p}) \sin \|\mathbf{-p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| + \frac{-\mathbf{p}}{\|\mathbf{-p}\|} \sin \|\mathbf{p}\|) = e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| - \text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|) \end{aligned}$$

olup $\overline{e^p} = e^{\bar{p}}$ elde edilir.

(b) p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun.

$$\overline{e^p} = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.21)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{\bar{p}} &= \overline{e^{p_0 + \mathbf{p}}} = e^{p_0 - \mathbf{p}} = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{-p}\| + \text{sgn}(\mathbf{-p}) \sinh \|\mathbf{-p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{-\mathbf{p}}{\|\mathbf{-p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \end{aligned}$$

olup $\overline{e^p} = e^{\bar{p}}$ elde edilir.

(c) p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike olsun.

$$\overline{e^p} = e^{p_0}(1 - \mathbf{p}) \quad (3.22)$$

ve

$$e^{\bar{p}} = e^{p_0}(1 + (-\mathbf{p})) = e^{p_0}(1 - \mathbf{p}) \quad (3.23)$$

olup $\overline{e^p} = e^{\overline{p}}$ elde edilir.

(d) p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun.

$$\overline{e^p} = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.24)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{\overline{p}} &= e^{\overline{p_0 + \mathbf{p}}} = e^{p_0 - \mathbf{p}} = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(-\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{-\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \end{aligned}$$

olup $\overline{e^p} = e^{\overline{p}}$ elde edilir.

(e) p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun.

$$\overline{e^p} = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.25)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{\overline{p}} &= e^{\overline{p_0 + \mathbf{p}}} = e^{p_0 - \mathbf{p}} = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(-\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{-\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \end{aligned}$$

olup $\overline{e^p} = e^{\overline{p}}$ elde edilir.

(f) p ve $\mathbf{p}$ lightlike olsun.

$$\overline{e^p} = 1 - \mathbf{p} \quad (3.26)$$

ve

$$e^{\overline{p}} = 1 + (-\mathbf{p}) = 1 - \mathbf{p} \quad (3.27)$$

olup $\overline{e^p} = e^{\overline{p}}$ elde edilir.

2. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

(a) p spacelike ve $\mathbf{p}$ spacelike olsun. $p \neq 0$ ve $\mathbf{p} \neq 0$ iken

$$e^p = e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\|) = 0_{\mathbb{H}_S} \quad (3.28)$$

iken iki split kuaterniyonun eşitliği gereği

$$\cos \|\mathbf{p}\| = 0 \quad (3.29)$$

ve

$$\text{sgn}(\mathbf{p}) \sin \|\mathbf{p}\| = 0 \quad (3.30)$$

elde edilir. $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ olduğundan

$$\sin \|\mathbf{p}\| = 0 \quad (3.31)$$

olmalıdır. Fakat (3.29) ve 3.31 eşitliklerinin ortak çözümü olmadığından $e^p \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ elde edilir. $p = 0$ ise $e^p = e^0 = 1 \neq 0$ elde edilir. $p = p_0$ ise $e^p = e^{p_0} \neq 0$ elde edilir.

(b) p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun. $\cosh \|\mathbf{p}\| \neq 0$ olduğundan

$$e^p = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \neq 0_{\mathbb{H}_S} \quad (3.32)$$

elde edilir.

(c) p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike iken $e^{p_0} \neq 0$ olduğundan

$$e^p = e^{p_0}(1 + \mathbf{p}) \neq 0_{\mathbb{H}_S} \quad (3.33)$$

elde edilir.

(d) p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise $\cosh \|\mathbf{p}\| \neq 0$ olduğundan

$$e^p = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \neq 0_{\mathbb{H}_S} \quad (3.34)$$

elde edilir.

(e) p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike ise $\cosh \|\mathbf{p}\| \neq 0$ olduğundan

$$e^p = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \neq 0_{\mathbb{H}_S} \quad (3.35)$$

elde edilir.

(f) p lightlike ve $\mathbf{p}$ lightlike ise

$$e^p = 1 + \mathbf{p} \neq 0_{\mathbb{H}_S} \quad (3.36)$$

elde edilir.

3. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ için

$$e^{-p}e^p = e^{-p_0-\mathbf{p}}e^{p_0+\mathbf{p}} = e^{-p_0}e^{-\mathbf{p}}e^{p_0}e^{\mathbf{p}} = e^{-p_0+p_0}e^{-\mathbf{p}+\mathbf{p}} = 1 \quad (3.37)$$

elde edilir.

4. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. $\|e^p\| = \|e^{p_0} e^{\mathbf{p}}\| = |e^{p_0}| \|e^{\mathbf{p}}\|$ yazılabilir.

(a) $\mathbf{p}$ spacelike ise $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = -1$ olduğundan

$$\|e^{\mathbf{p}}\| = \sqrt{|\cos^2 \|\mathbf{p}\| - (\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 \sin^2 \|\mathbf{p}\|} = 1, \quad (3.38)$$

(b) $\mathbf{p}$ timelike ise $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ olduğundan

$$\|e^{\mathbf{p}}\| = \sqrt{|\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - (\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} = 1, \quad (3.39)$$

(c) $\mathbf{p}$ lightlike ise $\mathbf{p}^2 = 0$ olduğundan $\|e^{\mathbf{p}}\| = \sqrt{|1 - \mathbf{p}^2|} = 1$

elde edilir. Böylece $\|e^p\| = e^{p_0}$ sağlanır. Diğer split kuaterniyon türleri için de ispat benzer şekilde yapılabilir.

■

Örnek. 3.3. $p = 2 + i - j + k$, $q = 1 + i + 2j + k$ ve $r = 2 + i + 2j + k$ olsun.

1. $\overline{e^p} = e^{\bar{p}}$,
2. $e^r \neq 0_{\mathbb{H}_S}$,
3. $e^{-q}e^q = 1_{\mathbb{H}_S}$

olduğunu gösterelim.

Çözüm. $I_p = 2^2 + 1^2 - 1^2 - 1^2 = 3 > 0$ ve $I_{\mathbf{p}} = 1^2 - 1^2 - 1^2 = -1$ olup p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyondur.

$I_q = 1^2 + 1^2 - 2^2 - 1^2 = -3$ ve $I_{\mathbf{q}} = 1^2 - 2^2 - 1^2 = -4$ olup q ve $\mathbf{q}$ timelike split kuaterniyondur.

$I_r = 2^2 + 1^2 - 2^2 - 1^2 = 0$ ve $I_{\mathbf{r}} = 1^2 - 2^2 - 1^2 = -4$ olup r lightlike ve $\mathbf{r}$ timelike split kuaterniyondur.

1. $\overline{e^p} = e^2 (\cosh 1 + (i - j + k) \sinh 1) = e^2 (\cosh 1 - (i - j + k) \sinh 1)$
ve
 $e^{\bar{p}} = e^2 (\cosh 1 + (-i + j - k) \sinh 1)$
olup $\overline{e^p} = e^{\bar{p}}$ olduğu görülür.
2. $e^r = e^2 \left(\cosh 2 - \frac{(i+2j+k)}{2} \sinh 2 \right)$ olup sıfırdan farklıdır.

$$3. e^q = e \left(\cosh 2 + \frac{(i+2j+k)}{2} \sinh 2 \right)$$

ve

$$e^{-q} = e^{-1} \left(\cosh 2 - \frac{(i+2j+k)}{2} \sinh 2 \right)$$

olup

$$\begin{aligned} e^q e^{-q} &= e \left(\cosh 2 + \frac{(i+2j+k)}{2} \sinh 2 \right) e^{-1} \left(\cosh 2 - \frac{(i+2j+k)}{2} \sinh 2 \right) \\ &= \cosh^2 2 - \frac{(i+2j+k)^2}{4} \sinh^2 2 = \cosh^2 2 - \sinh^2 2 = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

e^p bir split kuaterniyon olduğundan $q = e^p$ split kuaterniyonunu polar formda yazarak argümanını aşağıdaki sonuç ile verilebilir:

Sonuç 3.4. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p spacelike ve $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyon ise $\arg(e^p) = \|\mathbf{p}\|$,
2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon ise $\text{Arg}(e^p) = \|\mathbf{p}\|$,
3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon ise $\text{Arg}(e^p) = \|\mathbf{p}\|$,
4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon ise $\text{Arg}(e^p) = \|\mathbf{p}\|$.

İspat. $p = p_0 + \mathbf{p}$ olsun.

1. p spacelike ve $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyon olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\|\mathbf{p}\| \neq \pi n$ iken e^p ve $V(e^p)$ spacelike olup $0 \leq \alpha \leq \pi$ iken

$$e^p = e^{p_0} \left(\cos \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \|\mathbf{p}\| \right) = \|q\| \left(\cos \alpha + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \sin \alpha \right) \quad (3.40)$$

yazılabilir. $\|q\| = \|e^p\| = |e^{p_0}|$ ve $\sin \alpha > 0$ olduğundan

$$\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{V(e^q)}{\|V(e^q)\|} = \frac{e^{p_0} \sin \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\|e^{p_0} \sin \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}\|} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \text{ olup}$$

$$\cos \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \|\mathbf{p}\| = \cos \alpha + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \alpha \quad (3.41)$$

iken iki split kuaterniyonun eşitiğinden

$$\cos \|\mathbf{p}\| = \cos \alpha \quad (3.42)$$

ve

$$\sin \|\mathbf{p}\| = \sin \alpha \quad (3.43)$$

elde edilir. Buradan $\|\mathbf{p}\| = \alpha + 2\pi n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\arg(e^p) = \|\mathbf{p}\|$ elde edilir.

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olsun. e^p spacelike ve $V(e^p)$ timelike olup $0 \leq \beta \leq \pi$ iken

$$e^p = e^{p_0} \left(\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \right) = \|q\| \left(\cosh \beta + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \sinh \beta \right) \quad (3.44)$$

yazılabilir. $\|q\| = \|e^p\| = |e^{p_0}|$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ iken $\sinh \lambda > 0$ olduğundan $\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{V(e^q)}{\|V(e^q)\|} = \frac{e^{p_0} \sinh \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\|e^{p_0} \sinh \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}\|} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ olup

$$\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| = \cosh \beta + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \beta \quad (3.45)$$

yazılır. İki split kuaterniyonun eşitiğinden

$$\cosh \|\mathbf{p}\| = \cosh \beta \quad (3.46)$$

ve

$$\sinh \|\mathbf{p}\| = \sinh \beta \quad (3.47)$$

elde edilir. Buradan $\|\mathbf{p}\| + 2\pi ni = \beta$ yazılır. Böylece $q = e^p$ split kuaterniyonun argümanı $\beta = \|\mathbf{p}\|$ elde edilir.

3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olsun. e^p spacelike ve $V(e^p)$ timelike olup $0 \leq \beta \leq \pi$ iken

$$e^p = e^{p_0} \left(\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \right) = \|q\| \left(\cosh \beta + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \sinh \beta \right) \quad (3.48)$$

yazılabilir. $\|q\| = \|e^p\| = |e^{p_0}|$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ iken $\sinh \lambda > 0$ olduğundan $\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{V(e^q)}{\|V(e^q)\|} = \frac{e^{p_0} \sinh \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\|e^{p_0} \sinh \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}\|} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ olup

$$\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| = \cosh \beta + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \beta \quad (3.49)$$

yazılır. İki split kuaterniyonun eşitiğinden

$$\cosh \|\mathbf{p}\| = \cosh \beta \quad (3.50)$$

ve

$$\sinh \|\mathbf{p}\| = \sinh \beta \quad (3.51)$$

elde edilir. Buradan $\|\mathbf{p}\| + 2\pi ni = \beta$ yazılır. Böylece $q = e^p$ split kuaterniyonun esas argümanı $\beta = \|\mathbf{p}\|$ elde edilir.

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyon olsun. e^p spacelike ve $V(e^p)$ timelike olup $0 \leq \beta \leq \pi$ iken

$$e^p = e^{p_0} \left(\sinh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \right) = \|q\| \left(\cosh \beta + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \sinh \beta \right) \quad (3.52)$$

yazılabilir. $\|q\| = \|e^p\| = |e^{p_0}|$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ iken $\sinh \lambda > 0$ olduğundan $\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{V(e^q)}{\|V(e^q)\|} = \frac{e^{p_0} \sinh \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\|e^{p_0} \sinh \|\mathbf{p}\| \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}\|} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ olup

$$\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| = \cosh \beta + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \beta \quad (3.53)$$

yazılır. İki split kuaterniyonun eşitiğinden

$$\cosh \|\mathbf{p}\| = \cosh \beta \quad (3.54)$$

ve

$$\sinh \|\mathbf{p}\| = \sinh \beta \quad (3.55)$$

elde edilir. Buradan $\|\mathbf{p}\| + 2\pi ni = \beta$ yazılır. Böylece $q = e^p$ split kuaterniyonun esas argümanı $\beta = \|\mathbf{p}\|$ elde edilir. ■

Sonuç 3.5. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ ve $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

$$(e^p)^n = e^{np} \quad (3.56)$$

sağlanır.

İspat. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ için

$$(e^p)^n = (e^{p_0})^n (e^{\mathbf{p}})^n = e^{np_0} (e^{\mathbf{p}})^n \quad (3.57)$$

olup

$$(e^{\mathbf{p}})^n = e^{n\mathbf{p}} \quad (3.58)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $e^{\mathbf{p}}$ aynı zamanda bir split kuaterniyon olduğundan polar formda yazılabilir.

1. e^p ve $V(e^p)$ spacelike olsun.

$$e^p = e^{p_0} \left(\cos \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \|\mathbf{p}\| \right)$$

olup $\|e^p\| = |e^{p_0}|$ ve Sonuç 3.4 kullanılırsa $\arg(e^p) = \|\mathbf{p}\|$ olduğu görülür. Teorem 2.11 ile verilen De Moivre formülü kullanılırsa

$$(e^p)^n = e^{np_0} \left(\cos \|n\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \|n\mathbf{p}\| \right) = e^{np}$$

elde edilir.

Diğer split kuaterniyon türleri için de ispat benzer şekilde yapılabilir. ■

Sonuç 3.6. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken $e^{|p_0|} > e^{\|\mathbf{p}\|}$,
2. p ve $\mathbf{p}$ timelike iken $e^{|p_0|} < e^{\|\mathbf{p}\|}$,
3. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken $e^{|p_0|} = e^{\|\mathbf{p}\|}$

sağlanır.

İspat. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$I_p = p_0^2 + I_{\mathbf{p}} > 0 \tag{3.59}$$

olduğundan

$$p_0^2 > -I_{\mathbf{p}} = \|\mathbf{p}\|^2 \tag{3.60}$$

yazılır ve buradan

$$|p_0| > \|\mathbf{p}\| \tag{3.61}$$

elde edilir. Reel üstel fonksiyon artan olduğundan

$$e^{|p_0|} > e^{\|\mathbf{p}\|} \tag{3.62}$$

elde edilir.

2. p ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$I_p = p_0^2 + I_{\mathbf{p}} < 0 \quad (3.63)$$

olduğundan

$$p_0^2 < -I_{\mathbf{p}} = \|\mathbf{p}\|^2 \quad (3.64)$$

yazılır ve buradan

$$|p_0| < \|\mathbf{p}\| \quad (3.65)$$

elde edilir. Reel üstel fonksiyon artan olduğundan

$$e^{|p_0|} < e^{\|\mathbf{p}\|} \quad (3.66)$$

elde edilir.

3. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$I_p = p_0^2 + I_{\mathbf{p}} = 0 \quad (3.67)$$

olduğundan

$$p_0^2 = -I_{\mathbf{p}} = \|\mathbf{p}\|^2 \quad (3.68)$$

yazılır ve buradan

$$|p_0| = \|\mathbf{p}\| \quad (3.69)$$

ve

$$e^{|p_0|} = e^{\|\mathbf{p}\|} \quad (3.70)$$

elde edilir.

■

Uyarı. $\mathbf{p}$ lightlike iken argüman standart bir şekilde tanımlanamadığından e^p spacelike ve $V(e^p)$ lightlike durumunu sağlayan p split kuaterniyonları için $\text{Arg}(e^p)$ incelenememiştir.

Sonuç 3.6 sayesinde aşağıdaki sonucu verilebilir:

Sonuç 3.7. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$, p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun. $p_0 > 0$ ise

$$e^{p_0} > e^{\|\mathbf{p}\|} \quad (3.71)$$

sağlanır.

İspat. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ ve $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ olsun. Sonuç 3.6 sayesinde $e^{|p_0|} > e^{\|\mathbf{p}\|}$ olduğunu biliyoruz. O zaman

- $p_0 > 0$ iken $e^{|p_0|} = e^{p_0} > e^{\|\mathbf{p}\|}$ olup $p_0 > 0$ iken her $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ için $e^{p_0} > e^{\|\mathbf{p}\|}$ sağlanır.
- $p_0 < 0$ iken $e^{|p_0|} = e^{-p_0} > e^{\|\mathbf{p}\|}$ olup $e^{p_0} < e^{-\|\mathbf{p}\|} < e^{\|\mathbf{p}\|}$ elde edilir. Bu ise $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ split kuaterniyonu için $p_0 < 0$ iken $e^{p_0} > e^{\|\mathbf{p}\|}$ eşitsizliğinin sağlanmadığını kanıtlar.

■

Sonuç 3.8. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ ve $(p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$ olsun. $p_0 > 0$ ise

$$e^{p_0} = e^{\|\mathbf{p}\|} \quad (3.72)$$

sağlanır.

İspat. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ ve $(p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$ olsun. Sonuç 3.6 sayesinde $e^{|p_0|} = e^{\|\mathbf{p}\|}$ olduğunu biliyoruz. O zaman

- $p_0 > 0$ iken $e^{|p_0|} = e^{p_0} = e^{\|\mathbf{p}\|}$ olup $p_0 > 0$ iken her $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ için $e^{p_0} = e^{\|\mathbf{p}\|}$ sağlanır.
- $p_0 < 0$ iken $e^{|p_0|} = e^{-p_0} = e^{\|\mathbf{p}\|}$ olup $e^{p_0} = e^{-\|\mathbf{p}\|} \neq e^{\|\mathbf{p}\|}$ elde edilir. Bu ise $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ split kuaterniyonu için $p_0 < 0$ iken $e^{p_0} \neq e^{\|\mathbf{p}\|}$ olduğunu kanıtlar.

■

3.2 Split Kuaterniyonlarda Logaritmik Fonksiyon

Bu alt bölümde split kuaterniyonlarda literatürde bahsi geçen logaritmik fonksiyon reel kuaterniyonlara benzer olarak tanımlandı, [10, 20]. Literatüre ek olarak logaritmik fonksiyonların karakteristikleri ve özellikleri tartışılmıştır.

Tanım 3.2. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyonlar olmak üzere *split kuaterniyonlarda logaritmik fonksiyon*

$$\ln p = \begin{cases} \ln \|p\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \arg(p), & \|\mathbf{p}\| \neq 0 \\ \ln |p_0|, & \|\mathbf{p}\| = 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca p split kuaterniyonun karakterizasyonu ile logaritmik fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$\forall p \in \mathbb{H}_S$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

1. p spacelike iken

• $\mathbf{p}$ spacelike ise $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}}$ ve $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right)$ olmak üzere

$$\ln p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})(\alpha + 2\pi n) \quad (3.74)$$

• $\mathbf{p}$ timelike ise $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve $\beta = \cosh^{-1} \left(\frac{|p_0|}{\|p\|} \right)$ olmak üzere

$$\ln p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})(\beta + 2\pi n i) \quad (3.75)$$

şeklinde yazılabilir.

2. p timelike iken $\mathbf{p}$ timelike olup, $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve

$\gamma = \sinh^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right)$ olmak üzere

$$\ln p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})(\gamma + 2\pi n i) \quad (3.76)$$

şeklinde yazılabilir.

3. p lightlike split kuaterniyon veya $p = 0$ ise $\|p\| = 0$ olduğundan $\ln \|p\|$ tanımsız olup $\ln p$ benzer şekilde tanımlanamaz.

Not. Split kuaterniyonlarda logaritmik fonksiyon çok değerli bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Bir sonraki alt bölümde, tek değerli esas logaritmik fonksiyon verilecektir.

Split kuaterniyonlarda logaritmik fonksiyon tanımından yola çıkarak aşağıdaki orijinal teorem verilir:

Teorem 3.5. $p = p_0 + \mathbf{p}$ sıfırdan farklı ve lightlike olmayan split kuaterniyon ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyonlar ise $\ln p$ ve $V(\ln \mathbf{p})$ spacelike split kuaterniyondur.

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise

- (a) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \beta^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \beta \ln \|p\|} > p_1$ ise $\ln p$ spacelike,
- (b) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \beta^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \beta \ln \|p\|} < p_1$ ise $\ln p$ timelike,
- (c) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \beta^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \beta \ln \|p\|} = p_1$ ise $\ln p$ lightlike

ve $V(\ln p)$ timelike split kuaterniyondur.

3. p ve $\mathbf{p}$ timelike kuaterniyonlar ise

- (a) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \gamma^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \gamma \ln \|p\|} > p_1$ ise $\ln p$ spacelike,
- (b) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \gamma^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \gamma \ln \|p\|} < p_1$ ise $\ln p$ timelike,
- (c) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \gamma^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \gamma \ln \|p\|} = p_1$ ise $\ln p$ lightlike

ve $V(\ln p)$ timelike split kuaterniyondur.

4. p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike iken $\ln p$ ve $V(\ln p)$ spacelike split kuaterniyondur.

İspat. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyonlar, $n \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right)$ ve $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = -1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_{\ln p} &= (\ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})((\alpha + 2\pi n)))(\ln \|p\| - \text{sgn}(\mathbf{p})(\alpha + 2\pi n)) \\ &= (\ln \|p\|)^2 - (\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 (\alpha + 2\pi n)^2 \\ &= (\ln \|p\|)^2 + (\alpha + 2\pi n)^2 > 0 \end{aligned}$$

olup $\ln p$ spacelike split kuaterniyon ve

$$\begin{aligned} I_{V(\ln p)} &= (\text{sgn}(\mathbf{p})(\alpha + 2\pi n))(-\text{sgn}(\mathbf{p})(\alpha + 2\pi n)) \\ &= -(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 (\alpha + 2\pi n)^2 \\ &= (\alpha + 2\pi n)^2 > 0 \end{aligned}$$

olup $V(\ln p)$ spacelike split kuaterniyondur.

2. p spacelike, $\mathbf{p}$ timelike, $n \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve $\beta = \cosh^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right)$ olsun. $i \in \mathbb{C}$ iken $\overline{\mathbf{p}i} = \bar{i}\bar{\mathbf{p}} = (-i)(-\mathbf{p}) = i\mathbf{p}$ sağlanır.

$$\begin{aligned}\ln p &= \ln \|p\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})(\beta + 2\pi i n) = \ln \|p\| + \left(\frac{p_1 i}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{p_2 j}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{p_3 k}{\|\mathbf{p}\|} \right) (\beta + 2\pi i n) \\ &= \ln \|p\| - \frac{2\pi n \beta p_1}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{2\pi n \beta p_3}{\|\mathbf{p}\|} j - \frac{2\pi n \beta p_2}{\|\mathbf{p}\|} k\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}I_{\ln p} &= \left(\ln \|p\| - \frac{2\pi n \beta p_1}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n \beta p_3}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n \beta p_2}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 \\ &= (\ln \|p\|)^2 + \frac{4\pi^2 n^2 \beta^2 p_1^2}{\|\mathbf{p}\|^2} - \frac{4\pi n \beta p_1 \ln \|p\|}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{4\pi^2 n^2 \beta^2 p_3^2}{\|\mathbf{p}\|^2} - \frac{4\pi^2 n^2 \beta^2 p_2^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \\ &= (\ln \|p\|)^2 - \frac{4\pi n \beta p_1 \ln \|p\|}{\|\mathbf{p}\|} - 4\pi^2 n^2 \beta^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

- (a) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \beta^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \beta \ln \|p\|} > p_1$ ise $\ln p$ spacelike,
- (b) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \beta^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \beta \ln \|p\|} < p_1$ ise $\ln p$ timelike,
- (c) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \beta^2) \|\mathbf{p}\|}{4\pi n \beta \ln \|p\|} = p_1$ ise $\ln p$ lightlike

split kuaterniyon olduğu görülür.

$$V(\ln p) = \frac{2\pi n \beta p_3}{\|\mathbf{p}\|} j - \frac{2\pi n \beta p_2}{\|\mathbf{p}\|} k \quad (3.77)$$

olduğundan

$$I_{V(\ln p)} = - \left(\frac{2\pi n \beta p_3}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n \beta p_2}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 < 0$$

elde edilir. Böylece $V(\ln p)$ timelike split kuaterniyondur.

3. p ve $\mathbf{p}$ timelike kuaterniyonlar ise

$$\ln p = \ln \|p\| - \frac{2\pi n \gamma p_1}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{2\pi n \gamma p_3}{\|\mathbf{p}\|} j - \frac{2\pi n \gamma p_2}{\|\mathbf{p}\|} k$$

olup

$$\begin{aligned}I_{\ln p} &= \left(\ln \|p\| - \frac{2\pi n \gamma p_1}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n \gamma p_3}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n \gamma p_2}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 \\ &= (\ln \|p\|)^2 + \frac{4\pi^2 n^2 \gamma^2 p_1^2}{\|\mathbf{p}\|^2} - \frac{4\pi n \gamma p_1 \ln \|p\|}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{4\pi^2 n^2 \gamma^2 p_3^2}{\|\mathbf{p}\|^2} - \frac{4\pi^2 n^2 \gamma^2 p_2^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \\ &= (\ln \|p\|)^2 - \frac{4\pi n \gamma p_1 \ln \|p\|}{\|\mathbf{p}\|} - 4\pi^2 n^2 \gamma^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

- (a) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \gamma^2) \|p\|}{4\pi n \gamma \ln \|p\|} > p_1$ ise $\ln p$ spacelike,
- (b) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \gamma^2) \|p\|}{4\pi n \gamma \ln \|p\|} < p_1$ ise $\ln p$ timelike,
- (c) $\frac{((\ln \|p\|)^2 - 4\pi^2 n^2 \gamma^2) \|p\|}{4\pi n \gamma \ln \|p\|} = p_1$ ise $\ln p$ lightlike

split kuaterniyon olduğu görülür.

$$V(\ln p) = \frac{2\pi n \gamma p_3}{\|p\|} j - \frac{2\pi n \gamma p_2}{\|p\|} k \quad (3.78)$$

olduğundan

$$I_{V(\ln p)} = - \left(\frac{2\pi n \gamma p_3}{\|p\|} \right)^2 - \left(\frac{2\pi n \gamma p_2}{\|p\|} \right)^2 < 0$$

elde edilir. Böylece $V(\ln p)$ timelike split kuaterniyondur.

4. p lightlike iken $\ln p$ reel sayı olduğundan spacelike ve $V(\ln p) = 0$ olduğundan spacelike split kuaterniyondur.

■

Böylece, logaritmik fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

Sonuç 3.9. Split kuaterniyonlarda logaritmik fonksiyonun tanım kümesi

$$D(\ln) = \{p : I_p \neq 0 \text{ ve } p \neq 0\} \quad (3.79)$$

ve görüntü kümesi

$$R(\ln) = \{q = q_0 + \mathbf{q} : (q, \mathbf{q}) = (sl, sl) \vee (sl, tl) \vee (tl, tl) \vee (ll, tl)\} \quad (3.80)$$

şeklindedir.

Örnek. 3.4. $p = 2 + 4i + 6j$ split kuaterniyonu için $\ln p$ değerini bulunuz.

Çözüm. $I_p = -16$ ve $I_{\mathbf{p}} = -20$ olup p ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyonlardır.

$$\|p\| = 4 \text{ ve } \|\mathbf{p}\| = 2\sqrt{5} \text{ ve}$$

$$\arg(p) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi ni \text{ olup}$$

$$\begin{aligned} \ln p &= \ln(2 + 4i + 6j) = \ln 4 + \frac{4i}{2\sqrt{5}} \left(\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi ni \right) + \frac{6j}{2\sqrt{5}} \left(\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi ni \right) \\ &= \ln 4 + \frac{4i}{2\sqrt{5}} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{2\sqrt{5}} 2\pi ni^2 + \frac{6j}{2\sqrt{5}} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{6}{2\sqrt{5}} 2\pi nj i \\ &= \ln 4 - \frac{4}{2\sqrt{5}} 2\pi n + \frac{4}{2\sqrt{5}} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) i + \frac{6}{2\sqrt{5}} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) j - \frac{6}{2\sqrt{5}} 2\pi nk \end{aligned}$$

elde edilir.

Split Kuaterniyonlarda Esas Logaritmik Fonksiyon

Bu alt bölümde, split kuaterniyonlarda tek değerli logaritmik fonksiyon tanımı, karakteristikleri ve özellikleri verilmiştir. Ek olarak, üstel fonksiyon ile aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Tanım 3.3. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun. p sıfırdan farklı ve lightlike olmayan split kuaterniyon olsun. $0 \leq \text{Arg}(p) \leq \pi$ olmak üzere *split kuaterniyonlarda esas logaritmik fonksiyon*

$$\text{Ln } p = \begin{cases} \text{Ln } \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p}) \text{Arg}(p), & \|\mathbf{p}\| \neq 0 \\ \text{Ln } |p_0|, & \|\mathbf{p}\| = 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece, p split kuaterniyonun karakterizasyonu göz önünde bulundurularak esas logaritmik fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$\forall p \in \mathbb{H}_S$ spacelike olsun.

1. $\mathbf{p}$ spacelike ise $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{p_0}{\|p\|}\right)$ olmak üzere

$$\text{Ln } p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})\alpha \quad (3.82)$$

2. $\mathbf{p}$ timelike ise $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}}$ ve $\beta = \cosh^{-1}\left(\frac{p_0}{\|p\|}\right)$ olmak üzere

$$\text{Ln } p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})\beta \quad (3.83)$$

sağlanır.

Not. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ timelike split kuaterniyon olsun. O zaman $\mathbf{p}$ split kuaterniyonu da timelike split kuaterniyondur. $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve $\gamma = \cosh^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right)$ olmak üzere

$$\text{Ln } p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})\gamma \quad (3.84)$$

sağlanır.

Teorem 3.6. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike split kuaterniyonlar ise $\text{Ln } p$ ve $V(\text{Ln } p)$ spacelike split kuaterniyondur.
2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise
 - (a) $\|p\| > e^\beta$ iken $\text{Ln } p$ spacelike,
 - (b) $\|p\| < e^\beta$ iken $\text{Ln } p$ timelike,
 - (c) $\|p\| = e^\beta$ iken $\text{Ln } p$ lightlike
 ve $V(\text{Ln } p)$ timelike split kuaterniyondur.
3. p ve $\mathbf{p}$ timelike kuaterniyonlar ise
 - (a) $\|p\| > e^\gamma$ iken $\text{Ln } p$ spacelike,
 - (b) $\|p\| < e^\gamma$ iken $\text{Ln } p$ timelike,
 - (c) $\|p\| = e^\gamma$ iken $\text{Ln } p$ lightlike
 ve $p_0 = 0$ iken $\mathbf{p}$ lightlike, $p_0 \neq 0$ iken $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyondur.
4. p spacelike ve $\mathbf{p}$ lightlike iken $\text{Ln } p$ ve $V(\text{Ln } p)$ spacelike split kuaterniyondur.

İspat. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ spacelike olsun.

1. $\mathbf{p}$ spacelike ise $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right)$ iken $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = -1$ olduğundan

$$I_{\text{Ln } p} = (\ln \|p\|)^2 - (\text{sgn}(\mathbf{p})\alpha)^2 = (\ln \|p\|)^2 + \alpha^2 > 0 \quad (3.85)$$

olup $\text{Ln } p$ spacelike,

$$I_{V(\text{Ln } p)} = -(\text{sgn}(\mathbf{p})\alpha)^2 = \alpha^2 > 0 \quad (3.86)$$

olup $V(\text{Ln } p)$ spacelike split kuaterniyondur.

2. $\mathbf{p}$ timelike ise $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$, $\beta = \cosh^{-1} \left(\frac{|p_0|}{\|p\|} \right)$ iken $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ sağlanır. p spacelike $\text{Ln } p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})\beta$ olduğundan

$$I_{\text{Ln } p} = (\ln \|p\|)^2 - (\text{sgn}(\mathbf{p})\beta)^2 = (\ln \|p\|)^2 - \beta^2 \quad (3.87)$$

olup

(a) $\|p\| > e^\beta$ iken $\text{Ln } p$ spacelike,

(b) $\|p\| < e^\beta$ iken $\text{Ln } p$ timelike,

(c) $\|p\| = e^\beta$ iken $\text{Ln } p$ lightlike

split kuaterniyon,

$$I_{V(\text{Ln } p)} = -(\text{sgn}(\mathbf{p})\beta)^2 = -\beta^2 \quad (3.88)$$

olup $V(\mathbf{p})$ timelike split kuaterniyondur.

($\beta = \cosh^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right) \neq 0$ olduğundan $V(\mathbf{p})$ lightlike split kuaterniyon olamaz.)

3. p ve $\mathbf{p}$ timelike ise $\text{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$, $\gamma = \sinh^{-1} \left(\frac{p_0}{\|p\|} \right)$ iken $(\text{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ sağlanır. p timelike iken $\text{Ln } p = \ln \|p\| + \text{sgn}(\mathbf{p})\gamma$ olduğundan

$$I_{\text{Ln } p} = (\ln \|p\|)^2 - (\text{sgn}(\mathbf{p})\gamma)^2 = (\ln \|p\|)^2 - \gamma^2 \quad (3.89)$$

olup

(a) $\|p\| > e^\gamma$ iken $\text{Ln } p$ spacelike,

(b) $\|p\| < e^\gamma$ iken $\text{Ln } p$ timelike,

(c) $\|p\| = e^\gamma$ iken $\text{Ln } p$ lightlike

split kuaterniyondur.

$$I_{V(\text{Ln } p)} = -(\text{sgn}(\mathbf{p})\gamma)^2 = -\gamma^2 \quad (3.90)$$

yazılabilir. Burada $\gamma = 0$ ise $p_0 = 0$ olup $V(\text{Ln } p)$ lightlike, $\gamma \neq 0$ ise $p_0 \neq 0$ olup $V(\text{Ln } p)$ timelike split kuaterniyondur.

4. $\mathbf{p}$ lightlike iken $\text{Ln } p$ reel sayı olduğundan spacelike ve $V(\text{Ln } \mathbf{p}) = 0$ olduğundan spacelike split kuaterniyondur.

■

Böylece, esas logaritmik fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.10. Split kuaterniyonlarda esas logaritmik fonksiyonun tanım kümesi

$$D(\text{Ln}) = \{p : I_p \neq 0 \text{ ve } p \neq 0\} \quad (3.91)$$

ve görüntü kümesi

$$R(\text{Ln}) = \{(q, \mathbf{q}) : (q, \mathbf{q}) = (sl, sl) \vee (sl, tl) \vee (tl, tl) \vee (ll, tl)\} \quad (3.92)$$

şeklindedir.

Örnek. 3.5. • *i spacelike split kuaterniyondur.* $\text{Arg}(i) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ ve $\text{Ln } i = \text{Ln } 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$ olup $I_{\text{Ln } i} = \left(i\frac{\pi}{2}\right) \left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i^2 \frac{\pi^2}{4} > 0$ olduğundan $\text{Ln } i$ ve $V(\text{Ln } i)$ spacelike split kuaterniyonlardır.

- *j timelike split kuaterniyondur.* $\text{Arg}(j) = \sinh^{-1} 0 = 0$ ve $\text{Ln } j = \text{Ln } 1 + j0 = 0$ olup $\text{Ln } j = 0$ spacelike split kuaterniyondur.
- *k timelike split kuaterniyondur.* $\text{Arg}(k) = \sinh^{-1} 0 = 0$ ve $\text{Ln } k = \text{Ln } 1 + k0 = 0$ olup $\text{Ln } k = 0$ spacelike split kuaterniyondur.
- $p = 1 + 2i + j$ ve $\mathbf{p} = 2i + j$ spacelike olup $\|p\| = 2$ ve $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{3}$ elde edilir. Ayrıca $\text{Arg}(p) = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ bulunur. Öyleyse

$$\text{Ln } p = \text{Ln}(1 + 2i + j) = \text{Ln } 2 + \left(\frac{2i + j}{\sqrt{3}}\right) \frac{\pi}{3} = \text{Ln } 2 + \frac{2\pi i}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi j}{3\sqrt{3}} \quad (3.93)$$

olup $\text{Ln } p$ ve $V(\text{Ln } p)$ spacelike olması beklenir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} I_{\text{Ln } p} &= \left(\text{Ln } 2 + \frac{2\pi i}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi j}{3\sqrt{3}}\right) \left(\text{Ln } 2 - \frac{2\pi i}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi j}{3\sqrt{3}}\right) \\ &= (\text{Ln } 2)^2 + \frac{4\pi^2}{27} - \frac{\pi^2}{27} \\ &= (\text{Ln } 2)^2 + \frac{\pi^2}{9} > 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_{V(\text{Ln } p)} &= \left(\frac{2\pi i}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi j}{3\sqrt{3}} \right) \left(-\frac{2\pi i}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi j}{3\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{4\pi^2}{27} - \frac{\pi^2}{27} \\
&= \frac{\pi^2}{9} > 0
\end{aligned}$$

olup $\text{Ln } p$ ve $V(\text{Ln } p)$ spacelike split kuaterniyondur.

$\forall p = p_0 + \mathbf{p}$, $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$e^p = q$ iken $p = \text{Ln } q$ olması için e^p split kuaterniyonunun yani q split kuaterniyonunun karakteristiği ile $\text{Ln } q$ split kuaterniyonunun yani p split kuaterniyonunun karakteristiğinin uyumlu olması gerekir. $e^p = q$ eşitliğinden yola çıkarak $\text{Ln } q = p$ split kuaterniyonunun karakteristiğini inceleyerek uyumlu olduğu durumları tespit edelim.

1. $(p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ ise

(a) $\|\mathbf{p}\| \neq \pi n$ iken $(e^p, V(e^p)) = (q, \mathbf{q}) = (sl, sl)$ olup
 $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ elde edilir.

Bu durumda $(p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ ve $\|\mathbf{p}\| \neq \pi n$ ise p ile q **uyumludur**.

(b) $\|\mathbf{p}\| = \pi n$ iken $(e^p, V(e^p)) = (q, \mathbf{q}) = (sl, ll)$ olup
 $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ elde edilir.

Bu durumda $(p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ ve $\|\mathbf{p}\| = \pi n$ ise p ile q **uyumludur**.

2. $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ ise $(e^p, V(e^p)) = (q, \mathbf{q}) = (sl, tl)$ olup $\text{Arg}(q) = \beta$ olmak üzere

(a) $\|q\| > e^\beta$ iken yani Sonuç 3.7 gereğince $p_0 > 0$ iken

$(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ olup p ile q **uyumludur**,

(b) $\|q\| < e^\beta$ iken $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (tl, tl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**,

(c) $\|q\| = e^\beta$ iken $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**.

3. $(p, \mathbf{p}) = (sl, ll)$ ise $(e^p, V(e^p)) = (q, \mathbf{q}) = (sl, ll)$ olduğundan
 $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**.

4. $(p, \mathbf{p}) = (tl, tl)$ ise $(e^p, V(e^p)) = (q, \mathbf{q}) = (sl, tl)$ olup $\text{Arg}(q) = \beta$ olmak üzere

- (a) $\|q\| > e^\beta$ iken $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**,
- (b) $\|q\| < e^\beta$ iken $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (tl, tl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**,
- (c) $\|q\| = e^\beta$ iken $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**.
5. $(p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$ ise $(e^p, V(e^p)) = (q, \mathbf{q}) = (sl, tl)$ olup $\text{Arg}(q) = \beta$ olmak üzere
- (a) $\|q\| > e^\beta$ iken $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**,
- (b) $\|q\| < e^\beta$ iken $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (tl, tl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**,
- (c) $\|q\| = e^\beta$ iken yani Sonuç 3.8 gereği $p_0 > 0$ iken
 $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$ olup p ile q **uyumludur**.
6. $(p, \mathbf{p}) = (ll, ll)$ ise $(e^p, V(e^p)) = (q, \mathbf{q}) = (sl, ll)$ olup
 $(\text{Ln } q, V(\text{Ln } q)) = (p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ olup p ile q **uyumsuzdur**.

$$A = \{p = p_0 + \mathbf{p} : (p, \mathbf{p}) = (sl, sl) \text{ veya } (p, \mathbf{p}) = (sl, tl) \text{ ve } p_0 > 0 \\ \text{veya } (p, \mathbf{p}) = (sl, tl) \text{ ve } p_0 > 0 \text{ veya } (p, \mathbf{p}) = (ll, tl) \text{ ve } p_0 > 0\}$$

kümesini tanımlayalım.

Teorem 3.7. *A kümesine kısıtlanmış üstel fonksiyonu ele alalım.*

1. $(p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ ve $0 \leq \|\mathbf{p}\| \leq \pi$ veya
2. $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ veya
3. $(p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$

ise

$$e^p = q \Rightarrow p = \text{Ln } q. \quad (3.94)$$

özdeşliği geçerlidir.

İspat. $p = p_0 + \mathbf{p}$ split kuaterniyon olsun.

1. $(p, \mathbf{p}) = (sl, sl)$ ise

$$q = e^p = e^{p_0}(\cos \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin \|\mathbf{p}\|) \quad (3.95)$$

olup $0 \leq \text{Arg}(e^p) \leq \pi$ ve $\|\mathbf{p}\| = \text{Arg}(e^p) + 2\pi n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ olduğundan $\frac{\sin \|\mathbf{p}\|}{\sin \|\mathbf{p}\|} = 1$ ve

$$\text{Ln } q = \ln \|q\| + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \text{Arg}(q) = \ln e^{p_0} + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} (\|\mathbf{p}\| + 2\pi n) = p + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} 2\pi n$$

elde edilir. $0 \leq \|\mathbf{p}\| \leq \pi$ ise

$$\text{Ln } q = p$$

yazılır.

2. $(p, \mathbf{p}) = (sl, tl)$ ise

$$q = e^p = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.96)$$

olup $0 \leq \text{Arg}(e^p) \leq \pi$, $\|\mathbf{p}\| = \text{Arg}(e^p)$ ve $\sinh \|\mathbf{p}\| > 0$ olduğundan $\frac{\sinh \|\mathbf{p}\|}{\sinh \|\mathbf{p}\|} = 1$ ve

$$\text{Ln } q = \ln \|q\| + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \text{Arg}(q) = \ln e^{p_0} + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{p}\| = p_0 + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{p}\| = p$$

elde edilir. $0 \leq \|\mathbf{p}\| \leq \pi$ ise

$$\text{Ln } q = p$$

yazılır.

3. $(p, \mathbf{p}) = (ll, tl)$ ise

$$q = e^p = e^{p_0}(\cosh \|\mathbf{p}\| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\|) \quad (3.97)$$

olup $0 \leq \text{Arg}(e^p) \leq \pi$, $\|\mathbf{p}\| = \text{Arg}(e^p)$ ve $\sinh \|\mathbf{p}\| > 0$ olduğundan $\frac{\sinh \|\mathbf{p}\|}{\sinh \|\mathbf{p}\|} = 1$ ve

$$\text{Ln } q = \ln \|q\| + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \text{Arg}(q) = \ln e^{p_0} + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{p}\| = p_0 + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{p}\| = p$$

elde edilir. $0 \leq \|\mathbf{p}\| \leq \pi$ ise

$$\text{Ln } q = p$$

yazılır.

■

Sonuç 3.11. A kümesine kısıtlanmış üstel fonksiyonun görüntü kümesi $R(\exp|_A) = \{p \in \mathbb{H}_S : I_p > 0\}$ şeklindedir.

3.3 Split Kuaterniyonlarda Kuvvet Fonksiyonu

Bu alt bölümde, üstel ve logaritmik fonksiyon kullanılarak split kuaterniyonlarda kuvvet fonksiyonu tanımlanmıştır. Özel olarak t bir reel sayı ve p split kuaterniyon olmak üzere t^q için özellikler incelenmiştir.

Tanım 3.4. $\forall q \in \mathbb{H}_S$ olsun. p sıfırdan farklı ve lightlike olmayan split kuaterniyon olmak üzere *split kuaterniyonlarda kuvvet fonksiyonu*

$$p^q := e^{q \text{Ln } p} \quad (3.98)$$

şeklinde tanımlanır.

Not. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ olsun. $0 \neq t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t^p = e^{p \text{Ln } t} \quad (3.99)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 3.12. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere t^p spacelike split kuaterniyondur.

$$V(t^p) = V(e^{p \text{Ln } t}) = V(e^{p_0 \text{Ln } t + \mathbf{p} \text{Ln } t}) \quad (3.100)$$

olup $V(t^p)$ pure split kuaterniyonunun karakteristiği Teorem 3.3 kullanılarak incelenebilir.

Teorem 3.8. $\forall p, q \in \mathbb{H}$ ve $t, r \in \mathbb{R}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $pq = qp$ iken $t^p t^q = t^{p+q}$,
2. $t^p r^p = (tr)^p$.

İspat. $\forall p, q \in \mathbb{H}$ olsun.

1. $pq = qp$ iken $t^p t^q = e^{p \text{Ln } t} e^{q \text{Ln } t}$ olup

$$e^{p \text{Ln } t} e^{q \text{Ln } t} = e^{p \text{Ln } t + q \text{Ln } t} = e^{(p+q) \text{Ln } t} = t^{p+q} \quad (3.101)$$

elde edilir.

2. $t^p r^p = e^{p \text{Ln } t} e^{p \text{Ln } r} = e^{p(\text{Ln } t + \text{Ln } r)} = e^{p(\text{Ln } (tr))} = (tr)^p$ elde edilir.

■

Örnek. 3.6. $2^{(1+2i+3j)}$ ifadesinin split kuaterniyon değerini bulalım. $I_{1+2i+3j} = -4$ olup $1 + 2i + 3i$ timelike olduğundan

$$\begin{aligned} 2^{(1+2i+3j)} &= e^{(\text{Ln } 2)(1+2i+3j)} = 2 \left[\cosh(5 \text{Ln } 2) + \frac{2i+3j}{5} \sinh(5 \text{Ln } 2) \right] \\ &= 2 \left[16,015625 + \frac{2i+3j}{5} 15,984375 \right] \\ &= 32,03125 + \left(\frac{2i+3j}{5} \right) 31,96875 \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

4

SPLIT KUATERNİYONLARDA TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde split kuaterniyonlarda sinüs, kosinüs, sekant, kosekant, tanjant ve kotanjant fonksiyonlar reel kuaterniyonlara paralel olarak tanımlanmıştır. Karakterizasyonlarına göre üstel fonksiyon ile verilen ifadeler, Teorem 3.2 yardımıyla skaler ve vektörel kısımlarına ayrılmıştır. Ayrıca karakteristikleri ve özellikleri incelenmiştir.

4.1 Split Kuaterniyonlarda Trigonometrik Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlar

Tanım 4.1. $p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. $\mathbf{p}$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere split kuaterniyonların *sinüs* ve *kosinüs* fonksiyonları

$$\sin(p) := -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \quad (4.1)$$

ve

$$\cos(p) := \frac{1}{2}(e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}), \quad (4.2)$$

2. $\mathbf{p}$ lightlike split kuaterniyon ise split kuaterniyonların sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$\sin(p) := \sin(p_0) \quad \text{ve} \quad \cos(p) := \cos(p_0)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. $\sin p \cos p = \cos p \sin p$,
2. $\cos(-p) = \cos p$,
3. $\sin(-p) = -\sin p$,
4. $\cos p \neq 0$,
5. $\sin p \neq 0$.

İspat. 3. $\text{sgn}(-\mathbf{p}) = -\text{sgn}(\mathbf{p})$ olduğundan $\sin(-p) = -\sin p$ elde edilir.

4. Her p split kuaterniyonu için $e^p \neq 0$ olduğundan $\cos p \neq 0$ olduğu açıktır.

5. $p \neq 0$ ve $\mathbf{p}$ lightlike olmayan bir split kuaterniyon olmak üzere

$$\sin(p) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(\mathbf{p})(e^{p \text{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \text{sgn}(\mathbf{p})}) = 0 \text{ olsun.}$$

$\text{sgn}(\mathbf{p}) \neq 0$ olduğundan

$$e^{p \text{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \text{sgn}(\mathbf{p})} = 0 \quad (4.3)$$

olmalıdır.

$$e^{\frac{p_0 \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{-\frac{p_0 \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|}} \quad (4.4)$$

ve

$$e^{\frac{p_0 \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} e^{\frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{-\frac{p_0 \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|}} \quad (4.5)$$

olup $\mathbf{p}^2 = -I_{\mathbf{p}}$ olduğundan

$$e^{\frac{p_0 \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} e^{\frac{-I_{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{-\frac{p_0 \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} e^{\frac{I_{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{p}\|}} \quad (4.6)$$

elde edilir.

$$e^{2\frac{p_0 \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{2\frac{I_{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{p}\|}} \quad (4.7)$$

olup

$$e^{p_0 \mathbf{p}} = e^{I_{\mathbf{p}}} \quad (4.8)$$

elde edilir. Buradan $p_0 \mathbf{p} = 0$ ve $I_{\mathbf{p}} = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\mathbf{p}$ split kuaterniyonunun lightlike olmaması ile çelişir. Böylece $\sin p \neq 0$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.2. $\mathbf{p}$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \quad (4.9)$$

ve

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.10)$$

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \quad (4.11)$$

ve

$$\sin p = -\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \quad (4.12)$$

3. p ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \quad (4.13)$$

ve

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.14)$$

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| - p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \quad (4.15)$$

ve

$$\sin p = -\cosh \|\mathbf{p}\| p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat. $p \in \mathbb{H}_S$ olsun. $\mathbf{p}$ lightlike olmayan split kuaterniyon olmak üzere

$$e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} = e^{(p_0 + \mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} \quad (4.17)$$

ve

$$e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} = e^{(-p_0 - \mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}} = e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} \quad (4.18)$$

yazılabilir.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike olsun. $\frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} = -1$ sağlanır. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinin toplamı

$$e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} = e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} + e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} I_{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} &= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\| \right) \overline{\left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\| \right)} \\ &= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\| \right) \left(-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\| \right) \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - p_0^2 \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + p_0^2 \\ &= |I_{\mathbf{p}}| + p_0^2 \\ &= p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_0^2 \\ &= I_p > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|$ spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} &= e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos \left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| + \frac{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\|} \sin \left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| \right) \\ &= e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos \left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| - \frac{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\|} \sin \left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} = \\
& = e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) + e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \\
& = (e^{-\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|}) \cos |p_0| + (e^{-\|\mathbf{p}\|} - e^{\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0|
\end{aligned}$$

$$\text{ve } \frac{p_0}{|p_0|} = \begin{cases} 1, & p_0 > 0 \\ -1, & p_0 < 0 \end{cases} \text{ olduğundan } p_0 > 0 \text{ iken}$$

$$\begin{aligned}
\cos p &= \frac{1}{2} (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\
&= \frac{1}{2} (e^{-\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|}) \cos p_0 + \frac{1}{2} (e^{-\|\mathbf{p}\|} - e^{\|\mathbf{p}\|}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin p_0 \\
&= \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0
\end{aligned}$$

ve $p_0 < 0$ iken

$$\begin{aligned}
\cos p &= \frac{1}{2} (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\
&= \frac{1}{2} (e^{-\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|}) \cos p_0 - \frac{1}{2} (e^{-\|\mathbf{p}\|} - e^{\|\mathbf{p}\|}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin p_0 \\
&= \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sin(p) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|})
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.19) ve (4.20) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} = \\
& = e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) - e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \\
& = e^{-\|\mathbf{p}\|} \cos |p_0| + e^{-\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| - e^{\|\mathbf{p}\|} \cos |p_0| + e^{\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \\
& = (e^{-\|\mathbf{p}\|} - e^{\|\mathbf{p}\|}) \cos |p_0| + (e^{-\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sin(p) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|}) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left[(e^{-\|\mathbf{p}\|} - e^{\|\mathbf{p}\|}) \cos |p_0| + (e^{-\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right] \\
&= \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left[\sinh \|\mathbf{p}\| \cos |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sin |p_0| \right] \\
&= \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \cos |p_0| - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sin |p_0| \\
&= \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \cos |p_0| + \frac{p_0}{|p_0|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sin |p_0|
\end{aligned}$$

olup $p_0 > 0$ için

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.21)$$

ve $p_0 < 0$ için

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.22)$$

elde edilir.

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun. $\frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} = 1$ sağlanır. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinin toplamı

$$e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} = e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} + e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
I_{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} &= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \overline{\left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right)} \\
&= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \left(-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 - p_0^2 \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 - p_0^2 \\
&= |I_{\mathbf{p}}| - p_0^2 \\
&= -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 \\
&= -I_p < 0
\end{aligned}$$

olduğundan $p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|$ timelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh \left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| + \frac{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\|} \sinh \left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} &= e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh \left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| - \frac{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\|} \sinh \left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| \right) \\ &= e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} &= \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \right) + e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \cosh |p_0| + e^{\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| + e^{-\|\mathbf{p}\|} \cosh |p_0| - e^{-\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \\ &= (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cosh |p_0| + (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \end{aligned}$$

$$\text{ve } \frac{p_0}{|p_0|} = \begin{cases} 1, & p_0 > 0 \\ -1, & p_0 < 0 \end{cases} \text{ olduğundan } p_0 > 0 \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{1}{2} (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cosh p_0 + \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh p_0 \\ &= \cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \end{aligned}$$

ve $p_0 < 0$ iken

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{1}{2} (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cosh p_0 + \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh p_0 \\ &= \cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sin(p) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|})\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \right) \\ &\quad - e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cosh |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \cosh |p_0| + e^{\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \\ &\quad - e^{-\|\mathbf{p}\|} \cosh |p_0| + e^{-\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \\ &= (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cosh |p_0| + (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\sin(p) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left[(e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cosh |p_0| + (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sinh |p_0| \right] \\ &= -\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left[\sinh \|\mathbf{p}\| \cosh |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh |p_0| \right] \\ &= -\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh |p_0| - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh |p_0| \\ &= -\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh |p_0| - \frac{p_0}{|p_0|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh |p_0|\end{aligned}$$

olup $p_0 > 0$ için

$$\sin p = -\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \quad (4.25)$$

ve $p_0 < 0$ için

$$\sin p = -\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \quad (4.26)$$

elde edilir.

3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun. $\frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} = 1$ sağlanır. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinin toplamı

$$e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} = e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} + e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} I_{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} &= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \overline{\left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right)} \\ &= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \left(-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - p_0^2 \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 - p_0^2 \\ &= |I_{\mathbf{p}}| - p_0^2 \\ &= -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 \\ &= -I_p > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|$ spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos \left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| + \frac{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\|} \sin \left\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} &= e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos \left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| - \frac{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}}{\left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\|} \sin \left\| -p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right\| \right) \\ &= e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} &= \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) + e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \\ &= (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cos |p_0| + (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \end{aligned}$$

ve $\frac{p_0}{|p_0|} = \begin{cases} 1, & p_0 > 0 \\ -1, & p_0 < 0 \end{cases}$ olduğundan $p_0 > 0$ iken

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{1}{2} (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cos p_0 + \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin p_0 \\ &= \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \end{aligned}$$

ve $p_0 < 0$ iken

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{1}{2} (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|}) \cos p_0 + \frac{1}{2} (e^{-\|\mathbf{p}\|} - e^{\|\mathbf{p}\|}) \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sin p_0 \\ &= \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sin(p) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|}) \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.27) ve (4.28) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} = \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) - e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(\cos |p_0| - \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} \cos |p_0| + e^{\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| - e^{-\|\mathbf{p}\|} \cos |p_0| + e^{-\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \\ &= (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cos |p_0| + (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sin(p) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|} - e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \|\mathbf{p}\|}) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left[(e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) \cos |p_0| + (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \sin |p_0| \right] \\
&= -\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \left[\sinh \|\mathbf{p}\| \cos |p_0| + \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sin |p_0| \right] \\
&= -\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \cos |p_0| + \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \frac{p_0 \mathbf{p}}{|p_0| \|\mathbf{p}\|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sin |p_0| \\
&= -\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \sinh \|\mathbf{p}\| \cos |p_0| + \frac{p_0}{|p_0|} \cosh \|\mathbf{p}\| \sin |p_0|
\end{aligned}$$

olup $p_0 > 0$ için

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.29)$$

ve $p_0 < 0$ için

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.30)$$

elde edilir.

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike olsun. $\frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} = 1$ sağlanır. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinin toplamı

$$e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} = e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} + e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
I_{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} &= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \overline{\left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right)} \\
&= \left(p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \left(-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\| \right) \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 - p_0^2 \frac{\mathbf{p}^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \\
&= \|\mathbf{p}\|^2 - p_0^2 \\
&= |I_{\mathbf{p}}| - p_0^2 \\
&= -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 \\
&= -I_p = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|$ lightlike split kuaterniyondur.

$$e^{p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \|\mathbf{p}\|} = e^{\|\mathbf{p}\|} \left(1 + p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) \quad (4.31)$$

ve

$$e^{-p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - \|\mathbf{p}\|} = e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(1 - p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) \quad (4.32)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(1 + p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) + e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(1 - p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|} p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|} p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|} + (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{1}{2} (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|} + (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) + \frac{1}{2} (e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|}) p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \\ &= \cosh \|\mathbf{p}\| - p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.31) ve (4.32) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} &= e^{\|\mathbf{p}\|} \left(1 + p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) - e^{-\|\mathbf{p}\|} \left(1 - p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{\|\mathbf{p}\|} p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|} p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \\ &= e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|} + (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \end{aligned}$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned}
\sin p &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (e^{p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p \operatorname{sgn}(\mathbf{p})}) \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \left(e^{\|\mathbf{p}\|} - e^{-\|\mathbf{p}\|} + (e^{\|\mathbf{p}\|} + e^{-\|\mathbf{p}\|}) p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) \\
&= -\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \left(\sinh \|\mathbf{p}\| + \cosh \|\mathbf{p}\| p_0 \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \right) \\
&= -p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3. $\mathbf{p}$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olsun.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike iken

$$\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p, \quad \sin 2p = 2 \sin p \cos p \quad (4.33)$$

ve

$$\cos^2 p + \sin^2 p = 1, \quad (4.34)$$

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos 2p = \cos^2 p + \sin^2 p \quad \text{ve} \quad \sin 2p = 2 \sin p \cos p, \quad (4.35)$$

3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos^2 p + \sin^2 p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| \quad (4.36)$$

ve genellikle

$$\cos 2p \neq \cos^2 p - \sin^2 p, \quad \sin 2p \neq 2 \sin p \cos p, \quad (4.37)$$

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos 2p = \cos^2 p + \sin^2 p - p_0 \cosh 2p \quad (4.38)$$

ve genellikle

$$\sin 2p \neq 2 \sin p \cos p \quad (4.39)$$

sağlanır.

İspat. $\mathbf{p}$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike iken split kuaterniyonun kosinüs fonksiyonu tanımından

$$\cos 2p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \cos^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 \\ &\quad - 2 \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

ve

$$\begin{aligned} \sin^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 \\ &\quad + 2 \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

olup

$$\begin{aligned} \cos^2 p - \sin^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 - \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= \cosh 2\|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 - \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= \cos 2p \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, split kuaterniyonun sinüs fonksiyonu tanımından

$$\sin 2p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \cos 2p_0$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} 2 \sin p \cos p &= 2 (\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\ &= 2 \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \cos p_0 - 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 \\ &\quad + 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| + 2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 \\ &= \sin 2p_0 \cosh 2\|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\sinh 2\|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0) \\ &= \sin 2p_0 \cosh 2\|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 \\ &= \sin 2p \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca, (4.40) ve (4.41) eşitlikleri kullanılırsa

$$\cos^2 p + \sin^2 p = \cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| = 1$$

elde edilir.

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken split kuaterniyonların kosinüs fonksiyonu tanımından

$$\cos 2p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 \quad (4.42)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} \cos^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh^2 p_0 \\ &\quad + 2 \cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

ve

$$\begin{aligned} \sin^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh^2 p_0 \\ &\quad + 2 \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

olup

$$\begin{aligned} \cos^2 p - \sin^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 \\ &= \cosh 2\|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 \\ &\neq \cos 2p \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \cos^2 p + \sin^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 \\ &= \cosh 2\|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 \\ &= \cosh 2\|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 \\ &= \cos 2p \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca,

$$\sin 2p = -\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0 \quad (4.45)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} 2 \sin p \cos p &= 2(-\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0) \\ &= 2[-\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \\ &\quad - \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \\ &\quad - \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0] \\ &= -\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 \\ &\quad - (\sinh^2 p_0 \sinh 2\|\mathbf{p}\| + \cosh^2 p_0 \sinh 2\|\mathbf{p}\|) \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= -\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 - (\cosh 2p_0 \sinh 2\|\mathbf{p}\|) \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= \sin 2p \end{aligned}$$

elde edilir.

3. p ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos 2p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 \quad (4.46)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} \cos^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 \\ &\quad + 2 \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

ve

$$\begin{aligned} \sin^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 \\ &\quad - 2 \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

olup

$$\begin{aligned} \cos^2 p - \sin^2 p &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 \\ &\quad + \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= \cos 2p_0 + \sinh 2\|\mathbf{p}\| \sinh 2p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \neq \cos 2p \end{aligned}$$

ve

$$\cos^2 p + \sin^2 p = \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| = \cosh 2\|\mathbf{p}\| \neq \cos 2p$$

elde edilir.

$$\sin 2p = -\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \cos 2p_0 \quad (4.49)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} 2 \sin p \cos p &= 2(-\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\ &= -2 \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \cos p_0 + 2 \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &\quad + 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - 2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 \\ &= -\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 - \sinh^2 \sin 2p_0 + \\ &\quad (\sinh 2\|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 + \sinh 2\|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0) \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= -\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 + \sinh 2\|\mathbf{p}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &\neq \sin 2p \end{aligned}$$

elde edilir.

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos 2p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| - 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) p_0 \sinh 2\|\mathbf{p}\| \quad (4.50)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\cos^2 p = \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\| - 2 \cosh \|\mathbf{p}\| p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \quad (4.51)$$

ve

$$\sin^2 p = \cosh^2 \|\mathbf{p}\| p_0^2 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| - 2 \cosh \|\mathbf{p}\| p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \quad (4.52)$$

olup

$$\cos^2 p - \sin^2 p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| - p_0^2 \cosh 2\|\mathbf{p}\| \neq \cos 2p$$

bulunur. (4.51) ve (4.52) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\cos^2 p + \sin^2 p &= (1 + p_0) \cosh 2\|\mathbf{p}\| - 2p_0 \sinh 2\|\mathbf{p}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= \cos 2p + p_0 \cosh 2\|\mathbf{p}\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\cos 2p = \cos^2 p + \sin^2 p - p_0 \cosh 2\|\mathbf{p}\| \quad (4.53)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\sin 2p = -2 \cosh 2\|\mathbf{p}\| p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}2 \sin p \cos p &= 2 (-\cosh \|\mathbf{p}\| p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) (\cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) p_0 \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= 2 (-\cosh 2\|\mathbf{p}\| p_0 + \cosh \|\mathbf{p}\| p_0^2 \sinh \|\mathbf{p}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &\quad + \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{p})) \\ &= 2 (-\cosh 2\|\mathbf{p}\| p_0 + (1 + p_0) (\cosh \|\mathbf{p}\| p_0 \sinh \|\mathbf{p}\|) \operatorname{sgn}(\mathbf{p})) \\ &= -2 \cosh 2\|\mathbf{p}\| p_0 + (1 + p_0) (2 \cosh \|\mathbf{p}\| p_0 \sinh \|\mathbf{p}\|) \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \\ &= -2 \cosh 2\|\mathbf{p}\| p_0 + (1 + p_0) (p_0 \sinh 2\|\mathbf{p}\|) \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \neq \sin 2p\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.1. $\mathbf{p}$ *lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere*

1. p ve $\mathbf{p}$ *spacelike iken*

$$\sin^2 p = \frac{1}{2} (1 - \cos 2p) \quad (4.54)$$

ve

$$\cos^2 p = \frac{1}{2} (1 + \cos 2p), \quad (4.55)$$

2. p *spacelike* ve $\mathbf{p}$ *timelike iken*

$$\sin^2 p = \frac{1}{2} (\cos 2p - 1) \quad (4.56)$$

ve

$$\cos^2 p = \frac{1}{2} (1 + \cos 2p), \quad (4.57)$$

3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\sin^2 p = \frac{1}{2} (\cos 2p - 1) \quad (4.58)$$

ve

$$\cos^2 p = \frac{1}{2} (1 + \cos 2p), \quad (4.59)$$

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\sin^2 p = \frac{1}{2} (\cos 2p - 1) \quad (4.60)$$

ve

$$\cos^2 p = \frac{1}{2} (1 + \cos 2p) \quad (4.61)$$

sağlanır.

Teorem 4.4. $\mathbf{p}$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike iken

(a) $\cos p$ ve $V(\cos p)$ spacelike,

(b) $\sin p$ ve $V(\sin p)$ spacelike,

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

(a) $\cos p$ spacelike ve $V(\cos p)$ timelike,

(b) $V(\sin p)$ timelike ve

i. $\sinh 2p_0 > \sinh 2\|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ spacelike,

ii. $\sinh 2p_0 < \sinh 2\|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ timelike,

iii. $\sinh 2p_0 = \sinh 2\|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ lightlike,

3. p ve $\mathbf{p}$ timelike iken

(a) $V(\cos p)$ timelike,

i. $\cosh \|\mathbf{p}\| |\cos p_0| > \sinh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0|$ iken $\cos p$ spacelike,

ii. $\cosh \|\mathbf{p}\| |\cos p_0| < \sinh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0|$ iken $\cos p$ timelike,

iii. $\cosh \|\mathbf{p}\| |\cos p_0| = \sinh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0|$ iken $\cos p$ lightlike,

(b) $V(\sin p)$ timelike ve

i. $\cosh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0| > |\sinh \|\mathbf{p}\|| \cos p_0|$ iken $\sin p$ spacelike,

ii. $\cosh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0| < |\sinh \|\mathbf{p}\|| \cos p_0|$ iken $\sin p$ timelike,

$$iii. \cosh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0| = |\sinh \|\mathbf{p}\|| |\cos p_0| \text{ iken } \sin p \text{ lightlike,}$$

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

(a) $V(\cos p)$ timelike ve

- i. $\cosh \|\mathbf{p}\| > |p_0| |\sinh \|\mathbf{p}\||$ iken $\cos p$ spacelike,
- ii. $\cosh \|\mathbf{p}\| < |p_0| |\sinh \|\mathbf{p}\||$ iken $\cos p$ timelike,
- iii. $\cosh \|\mathbf{p}\| = |p_0| |\sinh \|\mathbf{p}\||$ iken $\cos p$ lightlike,

(b) $V(\sin p)$ timelike ve

- i. $p_0^2 > \tanh^2 \|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ spacelike,
- ii. $p_0^2 < \tanh^2 \|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ timelike,
- iii. $p_0^2 = \tanh^2 \|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ lightlike

split kuaterniyondur.

İspat. $\mathbf{p}$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \quad (4.62)$$

olup

$$\begin{aligned} I_{\cos p} &= (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\ &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 > 0 \end{aligned}$$

olup $\cos p$ spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(\cos p)} &= (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) (\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\ &= \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 > 0 \end{aligned}$$

olup $V(\cos p)$ spacelike split kuaterniyondur.

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.63)$$

olup

$$\begin{aligned} I_{\sin p} &= (\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\sin p$ spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(\sin p)} &= (\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &= \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $V(\sin p)$ spacelike split kuaterniyondur.

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \quad (4.64)$$

olup

$$\begin{aligned} I_{\cos p} &= (\cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0) \\ &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh^2 p_0 \\ &= \cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| (\cosh^2 p_0 - \sinh^2 p_0) \\ &= \cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\cos p$ spacelike split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(\cos p)} &= (\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0) (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0) \\ &= -\sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh^2 p_0 < 0 \end{aligned}$$

olduğundan $V(\cos p)$ timelike split kuaterniyondur.

$$\sin p = -\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \quad (4.65)$$

olup

$$\begin{aligned}
I_{\sin p} &= (-\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) \\
&\quad (-\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) \\
&= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh^2 p_0 \\
&= (\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) (\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 + \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) \\
&= \sinh(p_0 - \|\mathbf{p}\|) \sinh(p_0 + \|\mathbf{p}\|) \\
&= \frac{1}{2} \sinh 2p_0 - \frac{1}{2} \sinh 2\|\mathbf{p}\|
\end{aligned}$$

olduğundan

- (a) $\sinh 2p_0 > \sinh 2\|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ spacelike,
- (b) $\sinh 2p_0 < \sinh 2\|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ timelike,
- (c) $\sinh 2p_0 = \sinh 2\|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ lightlike

split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned}
I_{V(\sin p)} &= (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) (\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) \\
&= -\sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh^2 p_0 < 0
\end{aligned}$$

olup $V(\sin p)$ timelike split kuaterniyondur.

3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \quad (4.66)$$

olup

$$\begin{aligned}
I_{\cos p} &= (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\
&\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\
&= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0
\end{aligned}$$

olduğundan

- (a) $\cosh \|\mathbf{p}\| |\cos p_0| > \sinh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0|$ iken $\cos p$ spacelike,
- (b) $\cosh \|\mathbf{p}\| |\cos p_0| < \sinh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0|$ iken $\cos p$ timelike,
- (c) $\cosh \|\mathbf{p}\| |\cos p_0| = \sinh \|\mathbf{p}\| |\sin p_0|$ iken $\cos p$ lightlike

split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(\cos p)} &= (\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\ &= -\sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 < 0 \end{aligned}$$

olup $V(\cos p)$ timelike split kuaterniyondur.

$$\sin p = \cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \quad (4.67)$$

olup

$$\begin{aligned} I_{\sin p} &= (\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 \end{aligned}$$

olduğundan

- (a) $\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 > |\sinh \|\mathbf{p}\|| \cos p_0|$ iken $\sin p$ spacelike,
- (b) $\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 < |\sinh \|\mathbf{p}\|| \cos p_0|$ iken $\sin p$ timelike,
- (c) $\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 = |\sinh \|\mathbf{p}\|| \cos p_0|$ iken $\sin p$ lightlike

split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(\sin p)} &= (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) (\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\ &= -\sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 < 0 \end{aligned}$$

olduğundan $V(\sin p)$ timelike split kuaterniyondur.

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\cos p = \cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \quad (4.68)$$

olup

$$\begin{aligned} I_{\cos p} &= (\cosh \|\mathbf{p}\| - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) p_0 \sinh \|\mathbf{p}\|) (\cosh \|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) p_0 \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= \cosh^2 \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

olduğundan

- (a) $\cosh \|\mathbf{p}\| > |p_0| |\sinh \|\mathbf{p}\||$ iken $\cos p$ spacelike,
- (b) $\cosh \|\mathbf{p}\| < |p_0| |\sinh \|\mathbf{p}\||$ iken $\cos p$ timelike,

(c) $\cosh \|\mathbf{p}\| = |p_0| + \sinh \|\mathbf{p}\|$ iken $\cos p$ lightlike

split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(\cos p)} &= (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p})p_0 \sinh \|\mathbf{p}\|) (\operatorname{sgn}(\mathbf{p})p_0 \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= -p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\| < 0 \end{aligned}$$

olup $V(\cos p)$ timelike split kuaterniyondur.

$$\sin p = -\cosh \|\mathbf{p}\|p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \quad (4.69)$$

olup

$$\begin{aligned} I_{\sin p} &= (-\cosh \|\mathbf{p}\|p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) (-\cosh \|\mathbf{p}\|p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= p_0^2 \cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \\ &= p_0^2 \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1 - \cosh^2 \|\mathbf{p}\| \\ &= (p_0^2 - 1) \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1 \end{aligned}$$

olduğundan

- (a) $p_0^2 > \tanh^2 \|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ spacelike,
- (b) $p_0^2 < \tanh^2 \|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ timelike,
- (c) $p_0^2 = \tanh^2 \|\mathbf{p}\|$ iken $\sin p$ lightlike

split kuaterniyondur.

$$\begin{aligned} I_{V(\sin p)} &= (\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) (-\operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) \\ &= -\sinh^2 \|\mathbf{p}\| < 0 \end{aligned}$$

olduğundan $V(\sin p)$ timelike split kuaterniyondur.

■

Şimdi, kosinüs ve sinüs fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2. Split kuaterniyonlarda kosinüs fonksiyonunun tanım kümesi

$$D(\cos) = \mathbb{H}_S \quad (4.70)$$

ve görüntü kümesi

$$R(\cos) = \{q \in \mathbb{H}_S : (q, \mathbf{q}) = (sl, sl) \vee (sl, tl) \vee (tl, tl) \vee (ll, tl)\} \quad (4.71)$$

şeklindedir. Ayrıca sinüs fonksiyonunun tanım kümesi

$$D(\sin) = \mathbb{H}_S \quad (4.72)$$

ve görüntü kümesi

$$R(\sin) = \{q \in \mathbb{H}_S : (q, \mathbf{q}) = (sl, sl) \vee (sl, tl) \vee (tl, tl) \vee (ll, tl)\} \quad (4.73)$$

şeklindedir.

Örnek. 4.1.

1. $p = i$,
2. $p = j$,
3. $p = jk$,
4. $p = 2 + i + j + k$,
5. $p = 1 + j + k$

için $\sin p$ ve $\cos p$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

1. $p = i$ olmak üzere $p \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = i^2 = -1$ olduğundan

$$\sin i = -\frac{1}{2}i(e^{-1} - e^1) = i \sinh 1 \quad (4.74)$$

ve

$$\cos i = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^1) = \cosh 1, \quad (4.75)$$

2. $p = j$ olmak üzere $p \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = j^2 = 1$ olduğundan

$$\sin j = -\frac{1}{2}j(e^1 - e^{-1}) = -j \sinh 1 \quad (4.76)$$

ve

$$\cos j = \frac{1}{2}(e^1 + e^{-1}) = \cosh 1, \quad (4.77)$$

3. $p = k$ olmak üzere $p \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = k^2 = 1$ olduğundan

$$\sin k = -\frac{1}{2}k(e^1 - e^{-1}) = -k \sinh 1 \quad (4.78)$$

ve

$$\cos k = \frac{1}{2}(e^1 + e^{-1}) = \cosh 1, \quad (4.79)$$

4. $p = 2 + i + j + k$ olmak üzere p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike olduğu görülür.

$p \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = (2 + i + j + k)(i + j + k) = 1 + 2i + 2j + 2k$ olduğundan

$$\sin(2 + i + j + k) = -\frac{1}{2}(i + j + k)(e^{1+2i+2j+2k} - e^{-1-2i-2j-2k}) \quad (4.80)$$

yazılır. Burada $I_{1+2i+2j+2k} = 1^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2 = -3$ olup

$$e^{1+2i+2j+2k} = e \left(\cosh 2 + \frac{2i + 2j + 2k}{2} \sinh 2 \right) \quad (4.81)$$

ve

$$e^{-1-2i-2j-2k} = e^{-1} \left(\cosh 2 + \frac{-2i - 2j - 2k}{2} \sinh 2 \right) \quad (4.82)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \sin(2 + i + j + k) &= -\frac{(i + j + k)}{2} \left(e \left(\cosh 2 + \frac{2i + 2j + 2k}{2} \sinh 2 \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{-1} \left(\cosh 2 + \frac{-2i - 2j - 2k}{2} \sinh 2 \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2}(i + j + k) (e \cosh 2 - e^{-1} \cosh 2 + e(i + j + k) \sinh 2 \\ &\quad + e^{-1}(i + j + k) \sinh 2) \\ &= -\frac{1}{2}(i + j + k) ((e - e^{-1}) \cosh 2 + (e + e^{-1})(i + j + k) \sinh 2) \\ &= -(i + j + k) (\sinh 1 \cosh 2 + (i + j + k) \cosh 1 \sinh 2) \\ &= -\cosh 1 \sinh 2 - (i + j + k) \sinh 1 \cosh 2 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca bu eşitlik Teorem 4.2 ile verilen

$$\sin p = -\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \quad (4.83)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\sin p = -\cosh 1 \sinh 2 - (i + j + k) \sinh 1 \cosh 2 \quad (4.84)$$

şeklinde kolaylıkla bulunur.

5. $p = 1 + j + k$ olmak üzere $I_p = -1$ ve $I_{\mathbf{p}} = -2$ olup p ve $\mathbf{p}$ timelike split kuaterniyondur. $p \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) = \frac{(1+j+k)(j+k)}{\sqrt{2}} = \frac{2+j+k}{\sqrt{2}}$ olup iki timelike split kuaterniyonun çarpımı olduğundan spacelike split kuaterniyondur ve vektörel kısmının timelike olduğu görülür. O zaman

$$\sin p = \cosh \sqrt{2} \sin 1 - \frac{\sinh \sqrt{2} \cos 1}{\sqrt{2}} j - \frac{\sinh \sqrt{2} \cos 1}{\sqrt{2}} k \quad (4.85)$$

ve

$$\cos p = \cosh \sqrt{2} \cos 1 + \frac{\sinh \sqrt{2} \sin 1}{\sqrt{2}} j + \frac{\sinh \sqrt{2} \sin 1}{\sqrt{2}} k \quad (4.86)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \sin^2 p &= \left(\cosh \sqrt{2} \sin 1 - \frac{\sinh \sqrt{2} \cos 1}{\sqrt{2}} j - \frac{\sinh \sqrt{2} \cos 1}{\sqrt{2}} k \right) \\ &\quad \left(\cosh \sqrt{2} \sin 1 - \frac{\sinh \sqrt{2} \cos 1}{\sqrt{2}} j - \frac{\sinh \sqrt{2} \cos 1}{\sqrt{2}} k \right) \\ &= \cosh^2 \sqrt{2} \sin^2 1 + \frac{\sinh^2 \sqrt{2} \cos^2 1}{2} + \frac{\sinh^2 \sqrt{2} \cos^2 1}{2} \\ &\quad + \sinh^2 \sqrt{2} \cos^2 1 - \cosh \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} \sin 1 \cos 1 j \\ &\quad - \cosh \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} \sin 1 \cos 1 k \\ &= \cosh^2 \sqrt{2} \sin^2 1 + \sinh^2 \sqrt{2} \cos^2 1 - \cosh \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} \sin 1 \cos 1 (j + k) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\cos^2 p &= \left(\cosh \sqrt{2} \cos 1 + \frac{\sinh \sqrt{2} \sin 1}{\sqrt{2}} j + \frac{\sinh \sqrt{2} \sin 1}{\sqrt{2}} k \right) \\
&\quad \left(\cosh \sqrt{2} \cos 1 + \frac{\sinh \sqrt{2} \sin 1}{\sqrt{2}} j + \frac{\sinh \sqrt{2} \sin 1}{\sqrt{2}} k \right) \\
&= \cosh^2 \sqrt{2} \cos^2 1 + \sqrt{2} \cosh \sqrt{2} \cos 1 \sinh \sqrt{2} \sin 1 j \\
&\quad + \sqrt{2} \cosh \sqrt{2} \cos 1 \sinh \sqrt{2} \sin 1 k + \sinh^2 \sqrt{2} \sin^2 1
\end{aligned}$$

olup

$$\sin^2 p + \cos^2 p = \cosh 2\|\mathbf{p}\| \quad (4.87)$$

elde edilir.

4.2 Split Kuaterniyonlarda Trigonometrik Sekant ve Kosekant Fonksiyonlar

Split kuaterniyonlarda bölme işlemi ters ile çarpma işlemi vasıtasıyla tanımlanır. Tanjant ve kotanjant fonksiyonu tanımlamak için $\sin p$ ve $\cos p$ split kuaterniyonlarının terslerine ihtiyaç duyarız. Bu alt bölümde, sırasıyla kosinüs ve sinüsün split kuaterniyonlarda çarpma işlemine göre tersi olan sekant ve kosekant fonksiyonları tanımlanmıştır.

Tanım 4.2. $p \in \mathbb{H}_S$ ve $\cos p$ lightlike olmayan ve sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere *sekant fonksiyonu*

$$\sec p := (\cos p)^{-1} \quad (4.88)$$

şeklinde tanımlanır. $\sin p$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere *kosekant fonksiyonu*

$$\csc p := (\sin p)^{-1} \quad (4.89)$$

şeklinde tanımlıdır.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike ise

$$\csc p = (\sin p)^{-1} = \frac{\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0}{\sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} \quad (4.90)$$

ve

$$\sec p = (\cos p)^{-1} = \frac{\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sin^2 p_0}, \quad (4.91)$$

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike ise

$$\csc p = (\sin p)^{-1} = \frac{-\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0}{\frac{1}{2}(\sin^2 p_0 - \sin 2\|\mathbf{p}\|)} \quad (4.92)$$

ve

$$\sec p = (\cos p)^{-1} = \frac{\cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0}{\cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|}, \quad (4.93)$$

3. p ve $\mathbf{p}$ timelike ise

$$\csc p = (\sin p)^{-1} = \frac{\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0} \quad (4.94)$$

ve

$$\sec p = (\cos p)^{-1} = \frac{\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0}, \quad (4.95)$$

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike ise

$$\csc p = (\sin p)^{-1} = \frac{-\cosh \|\mathbf{p}\| p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|}{(p_0^2 - 1) \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1} \quad (4.96)$$

ve

$$\sec p = (\cos p)^{-1} = \frac{\cosh \|\mathbf{p}\| + p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} \quad (4.97)$$

şeklindedir.

Örnek. 4.2. $p = 2 + i - 3k$ split kuaterniyonu için $\sec p$ değerini bulunuz.

Çözüm. $\|\mathbf{p}\| = 2\sqrt{2}$ olup Teorem 4.2 gereği

$$\begin{aligned} \sec p &= (\cos p)^{-1} = \frac{\overline{\cos p}}{I_{\cos p}} \\ &= \frac{\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 2\sqrt{2} \cos^2 2 - \sinh^2 2\sqrt{2} \sin^2 2} \left[\cosh 2\sqrt{2} \cos 2 - \frac{i - 3k}{2\sqrt{2}} \sin 2\sqrt{2} \sin 2 \right] \\ &= \frac{1}{\cosh^2 2\sqrt{2} \cos^2 2 - \sinh^2 2\sqrt{2} \sin^2 2} \left[\cosh 2\sqrt{2} \cos 2 - \frac{i - 3k}{2\sqrt{2}} \sin 2\sqrt{2} \sin 2 \right] \end{aligned}$$

Şimdi, sekant ve kosekant fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.3. *Split kuaterniyonlarda tanımlı sekant fonksiyonun tanım kümesi*

$$D(\sec) = \{0 \neq p \in \mathbb{H}_S : I_{\cos p} \neq 0\} \quad (4.98)$$

ve görüntü kümesi

$$R(\sec) = \{q \in \mathbb{H}_S : (q, \mathbf{q}) = (sl, sl) \vee (sl, tl) \vee (tl, tl)\} \quad (4.99)$$

şeklindedir. Ayrıca kosekant fonksiyonunun tanım kümesi

$$D(\csc) = \{0 \neq p \in \mathbb{H}_S : I_{\sin p} \neq 0\} \quad (4.100)$$

ve görüntü kümesi

$$R(\csc) = \{q \in \mathbb{H}_S : (q, \mathbf{q}) = (sl, sl) \vee (sl, tl) \vee (tl, tl)\} \quad (4.101)$$

şeklindedir.

4.3 Split Kuaterniyonlarda Trigonometrik Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonlar

Bu alt bölümde, split kuaterniyonlarda tanjant ve kotanjant fonksiyonları reel kuaterniyonlara benzer olarak tanımlanmıştır. Split kuaterniyonlarda sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının skaler ve vektörel kısımları kullanılarak bu fonksiyonlar da skaler ve vektörel kısımlarına ayrıldı ve karakteristikleri incelendi.

Tanım 4.3. p lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olsun. $\cos p$ lightlike olmayan sıfırdan farklı bir split kuaterniyon olmak üzere *tanjant fonksiyonu*

$$\tan p := (\cos p)^{-1} \sin p \quad (4.102)$$

şeklinde tanımlanır. $\sin p$ lightlike olmayan sıfırdan farklı bir split kuaterniyon olmak üzere *kotanjant fonksiyonu*

$$\cot p := (\sin p)^{-1} \cos p \quad (4.103)$$

şeklinde tanımlıdır.

Not. Split kuaterniyonun tersi tanımından $(\sin p)^{-1} = \frac{\overline{\sin p}}{I_{\sin p}}$ ve $(\cos p)^{-1} = \frac{\overline{\cos p}}{I_{\cos p}}$ yazılabilir.

Şimdi, tanjant ve kotanjant fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.4. Split kuaterniyonlarda tanjant fonksiyonun tanım kümesi

$$D(\tan) = \{p \in \mathbb{H}_S : I_{\cos p} \neq 0\} \quad (4.104)$$

ve kotanjant fonksiyonun tanım kümesi

$$D(\cot) = \{p \in \mathbb{H}_S : I_{\sin p} \neq 0\} \quad (4.105)$$

şeklindedir.

Teorem 4.5. $p_0 \neq 0$ ve $\mathbf{p}$ lightlike olmayan sıfırdan farklı split kuaterniyon olmak üzere

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike iken

$$\tan p = \frac{\sin 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sin^2 p_0)} \quad (4.106)$$

ve

$$\cot p = \frac{\sin 2p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2(\sinh^2 \|\mathbf{p}\| + \sin^2 p_0)}, \quad (4.107)$$

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\tan p = -\frac{\sinh 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\| \cosh 2p_0}{2(\cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|)} \quad (4.108)$$

ve

$$\cot p = \frac{-\sinh 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{\sin^2 p_0 - \sinh 2\|\mathbf{p}\|}, \quad (4.109)$$

3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\tan p = \frac{\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0)} \quad (4.110)$$

ve

$$\cot p = \frac{\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0)}, \quad (4.111)$$

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken

$$\tan p = \frac{-2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (1 - p_0^2) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\|)} \quad (4.112)$$

ve

$$\cot p = \frac{-2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (p_0^2 - 1) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2 \left((p_0^2 - 1) \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1 \right)} \quad (4.113)$$

sağlanır.

İspat. $\forall p = p_0 + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olsun.

1. p ve $\mathbf{p}$ spacelike iken $(\operatorname{sgn}(\mathbf{p}))^2 = -1$ olup

$$\begin{aligned} \tan p &= (\cos p)^{-1} \sin p \\ &= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sin^2 p_0} [(\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\ &\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0)] \\ &= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sin^2 p_0} [\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 + \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0)] \\ &= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sin^2 p_0} [(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 \|\mathbf{p}\|) \cos p_0 \sin p_0 \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| (\cos^2 p_0 + \sin^2 p_0)] \\ &= \frac{\cos p_0 \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\|}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sin^2 p_0} \\ &= \frac{\sin 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2 (\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sin^2 p_0)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\cot p &= (\sin p)^{-1} \cos p \\
&= \frac{1}{\sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} [(\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\
&\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0)] \\
&= \frac{1}{\sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} [\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \cos p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 \\
&\quad - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\cos^2 p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| + \sin^2 p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|)] \\
&= \frac{1}{\sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} [(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 \|\mathbf{p}\|) \cos p_0 \sin p_0 \\
&\quad - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\cos^2 p_0 + \sin^2 p_0) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|] \\
&= \frac{\cos p_0 \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|}{\sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} \\
&= \frac{\sin 2p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2 (\sin^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. p spacelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken $(\operatorname{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ olup

$$\begin{aligned}
\tan p &= (\cos p)^{-1} \sin p \\
&= \frac{1}{\cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} (\cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0) \\
&\quad (-\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) \\
&= \frac{1}{\cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} [-\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \sinh p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \sinh p_0 \\
&\quad - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\sinh^2 p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| + \cosh^2 p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|)] \\
&= \frac{1}{\cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} [(\sinh^2 \|\mathbf{p}\| - \cosh^2 \|\mathbf{p}\|) \cosh p_0 \sinh p_0 \\
&\quad - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\sinh^2 p_0 + \cosh^2 p_0) (\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|)] \\
&= -\frac{\sinh 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cosh 2p_0 \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2 (\cosh^2 p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\cot p &= (\sin p)^{-1} \cos p \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}(\sin^2 p_0 - \sin 2\|\mathbf{p}\|)} [(-\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0) \\
&\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sinh p_0)] \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}(\sin^2 p_0 - \sin 2\|\mathbf{p}\|)} [-\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sinh p_0 \cosh p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cosh p_0 \sinh p_0 \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\cosh^2 p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| - \sinh^2 p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|)] \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}(\sin^2 p_0 - \sin 2\|\mathbf{p}\|)} [(\sinh^2 \|\mathbf{p}\| - \cosh^2 \|\mathbf{p}\|) \cosh p_0 \sinh p_0 \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\cosh^2 p_0 - \sinh^2 p_0) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|] \\
&= \frac{-\cosh p_0 \sinh p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|}{\frac{1}{2}(\sin^2 p_0 - \sin 2\|\mathbf{p}\|)} \\
&= \frac{-\sinh 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{\sin^2 p_0 - \sin 2\|\mathbf{p}\|}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. p timelike ve $\mathbf{p}$ timelike iken $(\operatorname{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ olup

$$\begin{aligned}
\tan p &= (\cos p)^{-1} \sin p \\
&= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0} [(\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0) \\
&\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0)] \\
&= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0} [\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 \\
&\quad + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \cos p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sin^2 p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| \\
&\quad + \cos^2 p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|] \\
&= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0} [(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|) \cos p_0 \sin p_0 \\
&\quad - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\sin^2 p_0 + \cos^2 p_0) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\|] \\
&= \frac{\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\cot p &= (\sin p)^{-1} \cos p \\
&= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0} [(\cosh \|\mathbf{p}\| \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \cos p_0) \\
&\quad (\cosh \|\mathbf{p}\| \cos p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\| \sin p_0)] \\
&= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0} [\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin p_0 \cos p_0 \\
&\quad + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\cos^2 p_0 \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\| \\
&\quad + \sin^2 p_0 \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|)] \\
&= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0} [(\cosh^2 \|\mathbf{p}\| + \sinh^2 \|\mathbf{p}\|) \cos p_0 \sin p_0 \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\cos^2 p_0 + \sin^2 p_0) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|] \\
&= \frac{\cosh 2\|\mathbf{p}\| \cos p_0 \sin p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0} \\
&= \frac{\cosh 2\|\mathbf{p}\| \sin 2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2 (\cosh^2 \|\mathbf{p}\| \sin^2 p_0 - \sinh^2 \|\mathbf{p}\| \cos^2 p_0)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. p lightlike ve $\mathbf{p}$ timelike iken $(\operatorname{sgn}(\mathbf{p}))^2 = 1$ olup

$$\begin{aligned}
\tan p &= (\cos p)^{-1} \sin p \\
&= \frac{(\cosh \|\mathbf{p}\| + p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) (-\cosh \|\mathbf{p}\| p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|)}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} [-\cosh^2 \|\mathbf{p}\| p_0 + \sinh^2 \|\mathbf{p}\| p_0 \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (\cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\|)] \\
&= \frac{(\sinh^2 \|\mathbf{p}\| - \cosh^2 \|\mathbf{p}\|) p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (1 - p_0^2) \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\|}{\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\|} \\
&= \frac{-2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (1 - p_0^2) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2 (\cosh^2 \|\mathbf{p}\| - p_0^2 \sinh^2 \|\mathbf{p}\|)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \cot p = (\sin p)^{-1} \cos p \\
&= \frac{(-\cosh \|\mathbf{p}\| p_0 - \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|) (\cosh \|\mathbf{p}\| - p_0 \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) \sinh \|\mathbf{p}\|)}{(p_0^2 - 1) \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1} \\
&= \frac{-\cosh^2 \|\mathbf{p}\| p_0 + p_0 \sinh^2 \|\mathbf{p}\| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (p_0^2 \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\| - \sinh \|\mathbf{p}\| \cosh \|\mathbf{p}\|)}{(p_0^2 - 1) \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1} \\
&= \frac{p_0 (\sinh^2 \|\mathbf{p}\| - \cosh^2 \|\mathbf{p}\|) + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (p_0^2 - 1) \cosh \|\mathbf{p}\| \sinh \|\mathbf{p}\|}{(p_0^2 - 1) \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1} \\
&= \frac{-2p_0 + \operatorname{sgn}(\mathbf{p}) (p_0^2 - 1) \sinh 2\|\mathbf{p}\|}{2 ((p_0^2 - 1) \cosh^2 \|\mathbf{p}\| + 1)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

■

5 SONUÇ

Split kuaterniyonların karakteristikleri ile toplamları ele alındığında iç çarpımların olası durumları incelendi. Literatürde tanımlanmış olan split kuaterniyonlarda üstel ve logaritmik fonksiyonlar $(+, +, -, -)$ ve $(+, -, -)$ metrikleri ile tekrar ifade edildi. Bu fonksiyonların karakteristikleri ve reel üstel ve logaritmik fonksiyonlar için geçerli olan özelliklerin split kuaterniyonlar için de geçerli olup olmadığı araştırıldı. Sonuç olarak, bazı özellikler tüm split kuaterniyonlar için geçerli olmasa da gerekli kısıtlamalar altında bu özelliklerin sağlandığı gösterildi. Split kuaterniyonlarda üstel ve logaritmik fonksiyonlar kullanılarak kuvvet fonksiyonu reel kuaterniyonlara benzer olarak tarif edildi. Üstel fonksiyon yardımıyla split kuaterniyonlarda sinüs, kosinüs, sekant, kosent, tanjant ve kotanjant fonksiyonları tarif edildi. Split kuaterniyonlarda üstel fonksiyon reel ve skaler kısımları ile ifade edildiğinden bu gösterimler kullanılarak trigonometrik fonksiyonlar reel ve vektörel kısımlarına ayrılarak gösterildi. Split kuaterniyonlarda trigonometrik fonksiyonların karakteristikleri incelendi ve reel trigonometrik fonksiyonların sağladığı temel özelliklerin split kuaterniyonun karakteristiğine göre sağlanıp sağlanmadığı tespit edildi.

- [1] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity* (ISSN). Elsevier Science, 1983, isbn: 9780080570570. [Online]. Available: <https://books.google.com.tr/books?id=CGk1eRSjFIIC>.
- [2] I. Couto, A. Lymberopoulos, *Introduction to Lorentz Geometry: Curves and Surfaces*. CRC Press, 2020, isbn: 9780367468644. [Online]. Available: <https://books.google.com.tr/books?id=77SVzQEACAAJ>.
- [3] J. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds* (Graduate Texts in Mathematics). Springer New York, 2006, isbn: 9780387331973. [Online]. Available: <https://books.google.com.tr/books?id=JV9m8o-ok6YC>.
- [4] I. Yaglom, *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis: An Elementary Account of Galilean Geometry and the Galilean Principle of Relativity* (Heidelberg Science Library). Springer New York, 1979, isbn: 9783540903321. [Online]. Available: <https://books.google.com.tr/books?id=llnvAAAAMAAJ>.
- [5] S. L. Altmann, "Hamilton, rodrigues, and the quaternion scandal," *Mathematics Magazine*, vol. 62, no. 5, pp. 291–308, 1989. doi: 10.1080/0025570X.1989.11977459. eprint: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1989.11977459>. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/0025570X.1989.11977459>.
- [6] M. Erdoğdu, M. Özdemir, "De-moivre's and euler formulas for matrices of split quaternions," Mar. 2015.
- [7] M. Özdemir, A. Ergin, "Some geometric applications of timelike quaternions," Jan. 2005. doi: 10.13140/2.1.2870.5609.
- [8] L. Kula, Y. Yayli, "Split quaternions and rotations in semi euclidean space E_2^4 ," *Journal of The Korean Mathematical Society - J KOREAN MATH SOC*, vol. 44, pp. 1313–1327, Nov. 2007. doi: 10.4134/JKMS.2007.44.6.1313.
- [9] M. Özdemir, A. Ergin, "Rotations with unit timelike quaternions in minkowski 3-space," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 56, Feb. 2006. doi: 10.1016/j.geomphys.2005.02.004.
- [10] R. Ghadami, J. Rahebi, Y. Yayli, "Spline split quaternion interpolation in minkowski space," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 23, Dec. 2013. doi: 10.1007/s00006-013-0410-8.
- [11] M. Özdemir, "The roots of a split quaternion," *Appl. Math. Lett.*, vol. 22, pp. 258–263, Feb. 2009. doi: 10.1016/j.aml.2008.03.020.

- [12] Y. Alagöz, K. Oral, S. Yüce, “Split quaternion matrices,” *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 2, Jan. 2012. doi: 10.18514/MMN.2012.364.
- [13] İ. Öztürk, M. Özdemir, “On geometric interpretations of split quaternions,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 46, Jul. 2022. doi: 10.1002/mma.8518.
- [14] M. Jafari, *Matrix theory over the split quaternions*, Sep. 2013.
- [15] F. Zhang, “Quaternions and matrices of quaternions,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 251, pp. 21–57, 1997.
- [16] M. Erdoğan, *Sayılar ve Matrisler Teorisi*, S. Yüce, Ed. Pegem Akademi Yayıncılık, 2023.
- [17] S. Aktaş, “Split kuaterniyon diziler ve seriler,” Yüksek Lisans Tezi (Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE), Yıldız Teknik Üniversitesi, 2023.
- [18] J. Morais, S. Georgiev, W. Sprossig, *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Springer My Copy UK, 2014, isbn: 9783034806237. [Online]. Available: https://books.google.com.tr/books?id=z-%5C_cnQEACAAJ.
- [19] M. Erdoğan, M. Özdemir, “On exponential of split quaternionic matrices,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 315, pp. 468–476, Dec. 2017. doi: 10.1016/j.amc.2017.08.007.
- [20] N. Ertuğ Gürbüz, “The differential formula for the first derivative of unit timelike split quaternion curve in the semi-euclidean space E_2^4 ,” *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 4, Jan. 2009.
- [21] S. Yüce, “Sayılar ve geometri,” in Jul. 2020, isbn: 9786257880367.
- [22] E. Ata, Y. Yaylı, “Split quaternions and semi-euclidean projective spaces,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 41, no. 4, pp. 1910–1915, 2009, issn: 0960-0779. doi: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.07.049>. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077908003500>.
- [23] E. Ergül, “Split kuaterniyonlarda kombinasyon ve faktöriyel hesabı ile kalkulus,” Yüksek Lisans Tezi (Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE), Yıldız Teknik Üniversitesi, 2023.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. Aykut H.F., Yüce S., "Exponential, Logarithmic and Trigonometric Functions on Split Quaternions and Their Characterizations", *6th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2023)*, 10-13 Mayıs 2023, ss. 111

